Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Karel Mišoň; Zdeněk Pírko

Složené rakety

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 9 (1964), No. 4, 223--239

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/137545

SLOŽENÉ RAKETY

KAREL MIŠOŇ, ZDENĚK PÍRKO, Praha

Předložený článek podává souborné vyšetření základních vlastností složených raket a zdůrazňuje jejich přednosti proti raketám jednoduchým. Pro početní vystižení mechanických vlastností jsou definovány jednak veličiny rozměrové (charakteristiky), jednak veličiny bezrozměrové (parametry). První odstavce jsou věnovány zavedení a užití těchto veličin na raketách jednoduchých, pak se teprve přistupuje k raketám složeným.

Nalezené výsledky se ilustrují numerickými příklady pro balistickou raketu, umělou družici Země a kosmickou raketu pro klasické raketové motory. Jsou uvedeny konkrétní hodnoty pro rakety Vanguard, Aerobee a Viking. Je připojen též výhled pro motory nukleární. Jako charakteristické, standardní typy raket se zavádějí a vyšetřují případy *rakety ekviparametrové*, *idemparametrové*, *geometrické* [1] a limitní případ *rakety infinitezimální.*

Souborné jednotné zpracování látky se opírá o práce, které obsahují toliko některé oddělené jednotlivosti. Přístupné seznamy literatury neuvádějí systematickou práci věnovanou elementárnímu zpracování otázek sledovaných v předloženém článku. Početně je článek obecně přístupným úvodem do problematiky složené rakety. Matematicky poněkud náročnějšímu zpracování optimalizace raket bude věnován některý z příštích článků. Tam také vyplyne účelnost zatím formálně zavedených standardních typů složené rakety.

1. HMOTOVÉ CHARAKTERISTIKY JEDNODUCHÉ RAKETY

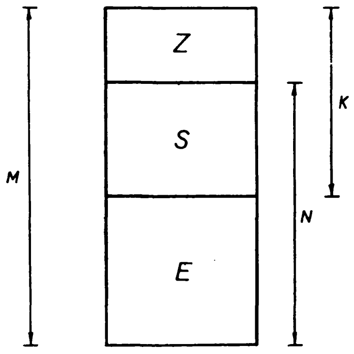
Pro orientační posouzení *jednoduché rakety*, která není v činnosti, je účelno zavést tři (teoreticky nezávislé) hmotové charakteristiky:

$$\begin{aligned} &\textit{energetická hmota } E\,, \\ &\textit{strukturní hmota } S\,, \\ &\textit{užitečná hmota } Z\,. \end{aligned} \tag{1,1}$$

Energetickou hmotou rozumíme soubor všech pohonných hmot, které má raketa k dispozici; strukturní hmota zahrnuje konstrukci rakety: motor, nádrže a těleso rakety; užitečnou hmotou se rozumí vybavení rakety vědeckými přístroji, v případě dopravní rakety přepravovaný náklad, či konečně posádka rakety. S užitím těchto veličin zavedeme tři další charakteristiky:

$$\begin{aligned} &\textit{počáteční hmota} && M = E + S + Z\,, \\ &\textit{nosná hmota} && N = E + S\,, \\ &\textit{konečná hmota} && K = S + Z\,. \end{aligned} \tag{1,2}$$

Chceme-li považovat E, S, Z za nezávislé, jsou M, N, K na nich závislé. Lze ovšem i obráceně považovat trojici charakteristik M, N, K za nezávislou a triádu E, S, Z pak za závislou:



Obr. 1.

$$(1,3) \qquad E = M - K\,, \quad S = N + K - M\,, \quad Z = M - N\,.$$

Uvedené závislosti znázorňuje obr. 1. V případech z praxe je

$$(1,4) \qquad E > S > Z \Rightarrow M > N > K\,.$$

Za technicky výhodná data vybíráme z literatury [2], [3] jako melioraci*)

$$(1,5) \qquad E : S : Z = 7 : 2 : 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow M : N : K = 10 : 9 : 3\,.$$

2. HMOTOVÉ PARAMETRY JEDNODUCHÉ RAKETY

Vytvořením poměrů každé jedné charakteristiky E, S, Z s každou jednou charakteristikou M, N, K získáme 18 bezrozměrných parametrů. Rozdělíme je do dvou skupin:

$$(2,1) \qquad \boxed{\frac{E}{M}}, \frac{E}{N}, \frac{E}{K}; \quad \frac{S}{M}, \boxed{\frac{S}{N}}, \frac{S}{K}; \quad \boxed{\frac{Z}{M}}, \frac{Z}{N}, \frac{Z}{K}$$

$$(2,2) \qquad \frac{M}{E}, \frac{N}{E}, \frac{K}{E}; \quad \frac{M}{S}, \boxed{\frac{N}{S}}, \frac{K}{S}; \quad \boxed{\frac{M}{Z}}, \frac{N}{Z}, \frac{K}{Z}$$

tak, že parametry v témže sloupci jsou reciproké.

Další parametry lze získat jako poměry utvořené uvnitř každé z trojic E, S, Z; M, N, K:

$$\frac{E}{S}, \frac{E}{Z}, \frac{S}{Z}; \quad \frac{M}{N}, \boxed{\frac{M}{K}}, \frac{N}{K},$$

$$\frac{S}{E}, \frac{Z}{E}, \frac{Z}{S}; \quad \frac{N}{M}, \frac{K}{M}, \frac{K}{N}.$$

*) *Meliorovanou raketou* rozumíme zde i v dalším raketu technicky zdokonalenou ve srovnání s dosud užívanými typy raket.

V dalším vycházíme z parametrů (1), (2). V každé devítici těchto parametrů jsou vzhledem k přípustné nezávislosti charakteristik v každé z trojic $E, S, Z; M, N, K$ nezávislé jen dva parametry. Vzhledem k požadavkům praxe vybíráme ze skupiny (1) jako *parametry prvého druhu* („řecké“) dvojici

$$\lambda = Z/M\,, \quad \varepsilon = S/N \tag{2,3}$$

a doplňujeme ji dalším (již závislým) parametrem téže skupiny

$$\xi = E/M\,. \tag{2,3*}$$

Podobně ze skupiny (2) jako *parametry druhého druhu* („latinské“) volíme dvojici

$$p = M/Z\,, \quad q = N/S \tag{2,4}$$

a doplňujeme ji dalším (již závislým) parametrem definovaným poměrem

$$r = M/K\,. \tag{2,4*}$$

Snadným počtem dostaneme pro závislost zavedených parametrů

1. druhu

$$(1 - \lambda)\,.\,(1 - \varepsilon) - \xi = 0\,, \tag{2,5}$$

2. druhu

$$\frac{p-1}{p}\,.\,\frac{q-1}{q} - \frac{r-1}{r} = 0\,, \tag{2,6}$$

popřípadě

$$(p - r)\,.\,(q - r) = r(r - 1) \tag{2,6*}$$

a pro vzájemnou souvislost parametrů 1. a 2. druhu

$$\lambda = 1/p\,, \quad \varepsilon = 1/q\,, \quad \xi = 1 - 1/r\,, \tag{2,7}$$

$$p = 1/\lambda\,, \quad q = 1/\varepsilon\,, \quad r = 1/(1 - \xi)\,. \tag{2,8}$$

3. PARAMETRY PRVNÍHO DRUHU

Vzhledem k fyzikálnímu významu parametrů

λ... užitečná hmota na jedničku počáteční hmoty,
ε... strukturní hmota na jedničku nosné hmoty,
ξ... energetická hmota na jedničku počáteční hmoty

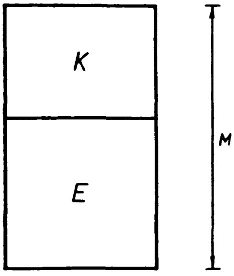
nazveme

λ... *užitečný parametr*,
ε... *strukturní parametr*,
ξ... *energetický parametr*.

Definice těchto parametrů vzhledem k nerovnostem $Z < M$, $S < N$, $E < M$ plynoucím z (1,2) podávají ihned horní ohraničení

$$\lambda < 1\,, \quad \varepsilon < 1\,, \quad \xi < 1\,.$$

Energetický parametr souvisí úzce s Ciolkovského číslem C jednoduché rakety, jejíž hmotné schéma je zredukováno na počáteční ($M = E + K$) a konečnou hmotu (K). (Srovnej obr. 2). Vzhledem k



Obr. 2.

$$M = E + K \Rightarrow 1 = \frac{E}{M} + \frac{K}{M} = \xi + \frac{K}{M}$$

při obvyklé definici Ciolkovského čísla

$$C = M/K\,, \quad r = C\,,$$

platí

$$(3{,}1) \qquad \xi = 1 - 1/C\,, \quad \text{resp.} \quad C \doteq 1/(1 - \xi)\,.$$

Vycházejíce z (2,5), vyjádříme každý z parametrů λ, ε, ξ oběma zbývajícími

$$(3{,}2) \qquad 1 - \lambda = \frac{\xi}{1 - \varepsilon}\,, \quad 1 - \varepsilon = \frac{\xi}{1 - \lambda}\,, \quad \xi = (1 - \lambda)(1 - \varepsilon)\,.$$

Způsob, kterým byl definován strukturní parametr ε, ukazuje jeho užitečnost pro posouzení konstrukční dokonalosti rakety, ale jen bez zřetele na její užitečnou hmotu. Ale ta často právě tvoří závažný požadavek praktické potřeby. Proto je záhodné přihlédnout k parametrům vztaženým na jedničku počáteční hmoty (zahrnující v sobě i hmotu užitečnou); z uvedených to jsou

$$\xi = \frac{E}{M}\,, \quad \frac{K}{M}\,, \quad \frac{S}{M}\,, \qquad \lambda = \frac{Z}{M}\,, \quad \frac{N}{M}\,.$$

Pro dnešní rakety je $0{,}05 < \varepsilon < 0{,}10$ [4]. Pokládáme-li hodnotu ε za a priori danou,

Tabulka I

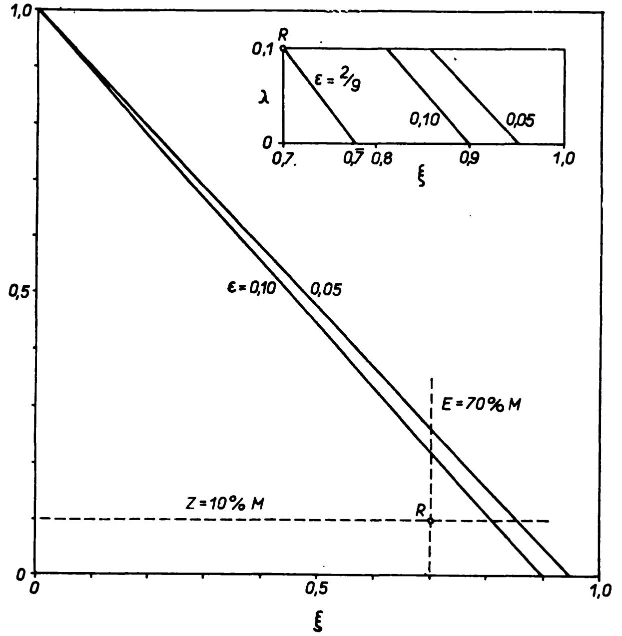
$\frac{E}{M}$	$\frac{K}{M}$	$\frac{S}{M}$	$\frac{Z}{M}$	$\frac{N}{M}$
$(1 - \varepsilon)(1 - \lambda)$	$\varepsilon + (1 - \varepsilon)\lambda$	$\varepsilon(1 - \lambda)$	λ	$1 - \lambda$
ξ	$1 - \xi$	$\frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon}\xi$	$\frac{1 - \varepsilon - \xi}{1 - \varepsilon}$	$\frac{\xi}{1 - \varepsilon}$

je přirozené vyjádřit tyto všecky parametry explicitně jednak hodnotami ε, ξ, jednak hodnotami ε, λ. Výsledky snadného počtu sestavujeme do tabulky I.

Při daném strukturním parametru ε klesá užitečný parametr λ podle (3,2) lineárně

$$\lambda = 1 - \frac{1}{1 - \varepsilon} \xi \tag{3,3}$$

a minimální hodnoty $\lambda = 0$ (tj. případ nulové užitečné hmoty $Z = 0$) dosáhne pro $\xi = 1 - \varepsilon$ (tj. $E = (1 - \varepsilon) M$, $S = \varepsilon M = \varepsilon N$); s klesajícím energetickým para-



Obr. 3.

metrem ξ roste užitečný parametr λ a svého formálního suprema ($\lambda = 1$, $Z = M$) by dosáhl pro $\xi = 0$ (tj. $E = 0$ a s ohledem na $Z = M$ také $S = 0$, resp. $M \to \infty$).

Obr. 3 podává závislost $\lambda(\xi)$. Připojený detail svým bodem R vystihuje orientační meliorovanou raketu vztahů (1,5), pro kterou je $\xi = E/M = 0,7$, $\lambda = Z/M = 0,1$. Těmto hodnotám odpovídá $\varepsilon = 2/9$, tj. hodnota vně intervalu (0,05; 0,10).

4. PARAMETRY DRUHÉHO DRUHU

Vzhledem k fyzikálnímu významu parametrů

- p... počáteční hmota na jedničku užitečné hmoty,
- q... nosná hmota na jedničku strukturní hmoty,
- r... počáteční hmota připadající na jedničku konečné hmoty

nazveme

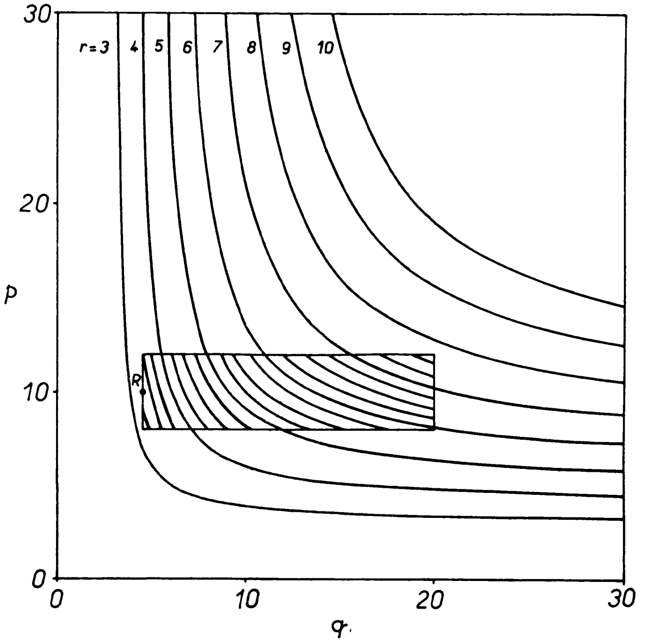
$p\ldots$ *užitečný parametr,*
$q\ldots$ *strukturní parametr,*
$r\ldots$ *hmotový parametr.*

*)

Parametr r je vzhledem k definici Ciolkovského čísla, které bylo připomenuté v předchozím odstavci, Ciolkovského číslem jednoduché rakety:

$$C = r\,. \tag{4,1}$$

Z významu parametru r je znova vystižena výhodnost Ciolkovského čísla pro posouzení konstrukční dokonalosti rakety, a to i se zřetelem na její užitečnou hmotu.



Obr. 4.

Definice parametrů druhého druhu vzhledem k nerovnostem $M > Z$, $N > S$, $M > K$ poskytují ihned dolní ohraničení

$$p > 1\,, \quad q > 1\,, \quad r > 1\,.$$

Rovnice (2,6) dovolují vyjádření každého z parametrů p, q, r oběma zbývajícími:

$$p = \frac{q-1}{q-r}\,r\,, \quad q = \frac{p-1}{p-r}\,r\,, \quad r = \frac{pq}{p+q-1}\,. \tag{4,2}$$

*) Užíváme stejného názvu jako pro (jiné) parametry λ, ε. Všude dále bude taková formulace, že k záměně nedojde.

Pro dnešní rakety je $5 < r < 10$, tj. $5K < M < 10K$ [5], takže pro orientaci lze středně klást $M \approx 7{,}5K$. Považujeme-li r za hodnotu předem danou, máme v prvé z rovnic (2) explicitní vyjádření $p \equiv p(r, q)$ a v druhé $q \equiv q(r, p)$. Pro rozbor závislosti parametrů p, q, r je účelné užít (2,6*):

$$(p - r)(q - r) = r(r - 1)\,. \tag{4,3}$$

Grafické znázornění závislosti $p(q)$ je na obr. 4. Připojený detail zachycuje bodem R orientační meliorovanou raketu vztahů (1,5), pro kterou je $p = M/Z = 10$, $q = N/S = 4{,}5$, $r \approx 3{,}3$, tj. hodnota ležící vně intervalu $5 < r < 10$.

5. ANALÝZA JEDNODUCHÉ RAKETY

a) *Užití parametrů prvního druhu*

Když raketa v okamžiku $t = 0$ vstoupí v činnost, přejde v pohyb z klidové polohy, v níž měla *statické rozdělení hmot* podle odst. 1; předpokládáme, že jde o pohyb přímočarý ve *svobodném**) *prostředí.*

V aktivní periodě $0 < t < T$, kde T je celková doba kontinuitní práce raketového motoru, jehož *výtokovou rychlost* měřenou vzhledem ke stěnám trysky předpokládáme stálou, nastoupí *balistické rozdělení hmot*: okamžitá hmota rakety m je jistou funkcí času

$$m \equiv m(t)\,,$$

která monotonně klesá z počáteční hodnoty $m(0) = M$ na konečnou hodnotu $m(T) = K$, přičemž pokles z M na K se děje poklesem energetické hmoty z hodnoty E na nulu. Funkční závislost $m(t)$ nazýváme *režimovou funkcí* neboli *režimem hoření.* Označíme-li U výtokovou rychlost (U = konst v $0 < t < T$, měřeno v soustavě pevně spojené s raketou), v okamžitou rychlost rakety ($v \equiv v(t)$ v $0 < t < T$, měřeno v soustavě pevně spojené s nehybnou Zemí), platí pro každý okamžik aktivní periody *Ciolkovského rovnice*

$$m\dot{v} = -U\dot{m}\,.$$

Její neurčitý integrál

$$v + U \ln m = \text{konst}$$

má pro začátek ($t = 0$, $m(0) = M$, $v(0) = 0$), popř. konec ($t = T$, $m(T) = K$, $v(T) = V$) aktivní periody tvar $U \ln M$ = konst, popř. $V + U \ln K$ = konst, takže pro konečnou rychlost, kterou nazveme *charakteristickou rychlostí* jednoduché rakety, získáváme známý *Ciolkovského vzorec*

$$V = -U \ln(K/M)\,. \tag{5,1}$$

---

*) *Svobodným prostředím* rozumíme prostor bez gravitačního působení a bez odporujícího prostředí.

Analýza jednoduché rakety, ovšem s podstatně zjednodušujícími předpoklady učiněnými na začátku tohoto odstavce, se opírá o tento vzorec, do něhož zavádíme parametry 1. nebo 2. druhu. Závěry, k nimž dospíváme používáním obou druhů parametrů, jsou kvantitativně i kvalitativně odlišné. Zavedeme-li vedle charakteristické rychlosti ještě také bezrozměrnou *parametrickou rychlost*

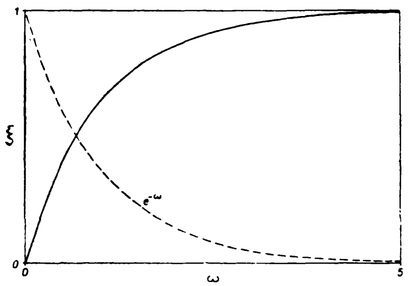
$$\omega = \frac{V}{U} \tag{5,2}$$

a užijeme-li parametrů 1. druhu (tabulka v odst. 3), dáme Ciolkovského vzorci (1) jeden z těchto dvou tvarů:

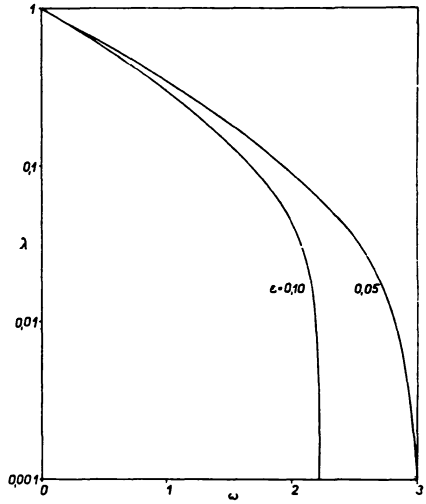
$$\omega = \ln \frac{1}{1 - \xi} = \ln \frac{1}{\varepsilon + (1 - \lambda)\lambda} \Rightarrow \tag{5,3}$$

$$\xi = 1 - e^{-\omega}, \quad \lambda = \frac{e^{-\omega} - \varepsilon}{1 - \varepsilon}. \tag{5,3*}$$

První rovnice (3*)*) určuje energetický parametr ξ nutný k dosažení dané para-



Obr. 5.



Obr. 6.

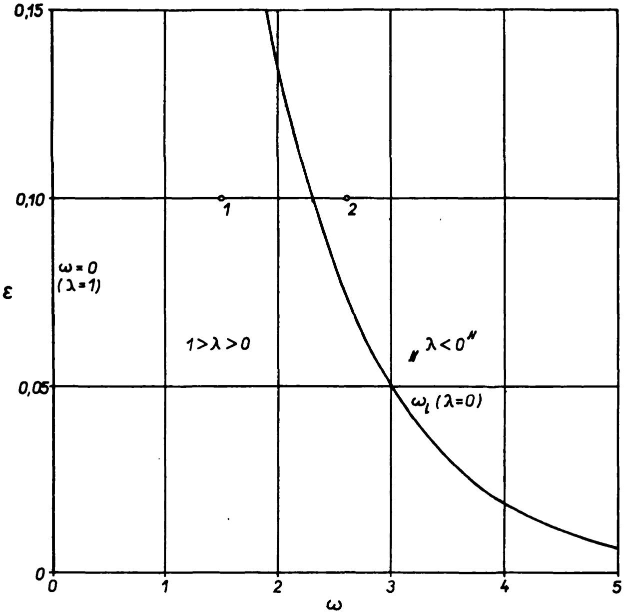
metrické rychlosti ω. S rostoucím ω roste ξ podle komplementární exponenciely (obr. 5); existuje teoretická horní mez energetického parametru

$$\xi_l = \lim_{\omega \to \infty} \xi = 1\,, \quad \text{tj.} \quad M_l = E_l\,.$$

*) Při odvolání na vztah probíhajícího odstavce cituje se zde i v dalším pouze číslo vztahu v závorce; jen při odvolání na vztahy z odstavců jiných připojuje se i číslo odpovídajícího odstavce.

Druhou rovnicí (3*) je stanoven užitečný parametr λ nutný k dosažení předepsané parametrické rychlosti ω při a priori daném strukturním parametru ε. Výsledky jsou v grafu obr. 6. Orientačně zvolené meliorované raketě § 1 odpovídá pořadnice $\lambda = 0{,}1$. Z tohoto grafu čteme dva závěry:

a) Užitečný parametr λ a tím i (při daném M) užitečná hmota Z klesají s rostoucí požadovanou parametrickou rychlostí ω a tím i (při stálé výtokové rychlosti U) s rostoucí požadovanou charakteristickou rychlostí V tak rychle, že pro dosažení



Obr. 7. Body 1, 2 ilustrují příklady řešené v textu.

vysokých V přestává být jednoduchá raketa z hlediska užitečného zatížení ekonomickou, popř. se stává neuskutečnitelnou.

b) Pro jednoduchou raketu existuje (při dané nosné hmotě $N = E + S$) teoretická horní mez rychlosti; obdržíme ji patrně pro nulovou hodnotu užitečné hmoty. Pro $Z = 0$ čili $\lambda = 0$ plyne pro tuto limitní parametrickou rychlost

$$\omega_l = \lim_{\lambda \to 0} \omega ,$$

z druhé rovnice (3)

$$\varepsilon = e^{-\omega_l}, \quad \omega_l = \ln \frac{1}{\varepsilon} . \tag{5,4}$$

Prvou rovnicí (4) je stanoven strukturní parametr ε nutný k dosažení dané limitní rychlosti ω_l; ε klesá s rostoucím ω_l podle exponenciely. Srovnej graf na obr. 7.

Možnost užití grafu ilustrujeme dvěma příklady. Mějme na příklad k dispozici raketový motor na kapalné pohonné látky s $U = 3000$ m/s v raketě s $\varepsilon = 0{,}1$:

1. K splnění programu balistické rakety středního doletu se požaduje $V = 4500$ m/s. Poněvadž

$$\omega = V/U = 1{,}5 < \omega_l = \ln(1/\varepsilon) \approx 2{,}3 \,,$$

je tento program uvažovanou raketou *fyzikálně teoreticky**) realizovatelný. Přitom její užitečný parametr je

$$\lambda = \frac{e^{-\omega} - \varepsilon}{1 - \varepsilon} \approx 0{,}14 \Rightarrow Z \approx M/7 \,.$$

2. K vyplnění programu umělé družice Země se požaduje první kosmická rychlost (cyklická rychlost na povrchu Země) 7900 m/s. Kdybychom položili $V = 7900$ m/s (což ovšem k vyvedení družice do dráhy nestačí), bylo by

$$\omega = 7900/3000 \approx 2{,}6 > \omega_l \approx 2{,}3 \,,$$

takže tento program není uvažovanou raketou ani fyzikálně teoreticky uskutečnitelný. Pro strukturní parametr $\varepsilon = 0{,}05$ je už však $\omega_l \approx 2{,}99 > 2{,}6 \approx \omega$.

6. ANALÝZA JEDNODUCHÉ RAKETY

b) *Užití parametrů druhého druhu*

Z formálních důvodů budeme psát (5,2) také ještě ve tvaru

$$w = V/U \tag{6,1}$$

zavádějíce tak pro parametrickou rychlost označení latinkou (činíme tak důsledně v úvahách týkajících se parametrů 2. druhu). S užitím (2,4*) nabude Ciolkovského vzorec (5,1) tvaru

$$w = \ln r \Rightarrow r = e^{w} \tag{6,2}$$

nebo s ohledem na třetí vztah (4,2)

$$e^{-w} = \frac{p + q - 1}{pq} \Rightarrow (p - e^{w})(q - e^{w}) = e^{w}(e^{w} - 1)\,. \tag{6,2*}$$

Druhá rovnice (2) určuje Ciolkovského číslo r nutné k dosažení dané parametrické rychlosti w; r vzrůstá s rostoucím w exponenciálně a $r_l = \lim\limits_{w \to \infty} r = \infty$ (obr. 8). Rovnicí (2*) je vyjádřena závislost mezi užitečným parametrem p a strukturním parametrem q při dané parametrické rychlosti w. Výsledky jsou zachyceny v grafu odstav-

*) Pojmem *fyzikálně teoreticky* jsou zde i v dalším myšleny zjednodušující předpoklady tohoto odstavce.

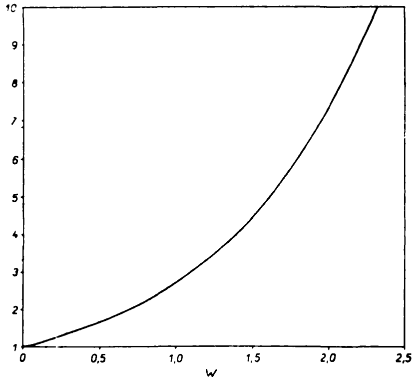
ce 4, nahradíme-li jeho kóty r kótami $w = \ln r$, jimž při výtokové rychlosti $U =$ $= 3000$ m/s odpovídá charakteristická rychlost $V = wU$ podle tabulky II.

Z obou grafů vyplývají tytéž závěry o neekonomičnosti jednoduché rakety jako v odst. 5, nyní však z hlediska poměru její počáteční a konečné hmoty (váhy). Pro charakteristickou rychlost rovnou první kosmické rychlosti $V = 7900$ m/s je to už $w = 2{,}6 \Rightarrow r = e^{2{,}6} \Rightarrow M \approx 14K$, pro 2. kosmickou rychlost (parabolická rychlost na povrchu Země) $V = 11200$ m/s jde dokonce o $w = 3{,}7 \Rightarrow r = e^{3{,}7} \Rightarrow M \approx 40K$.

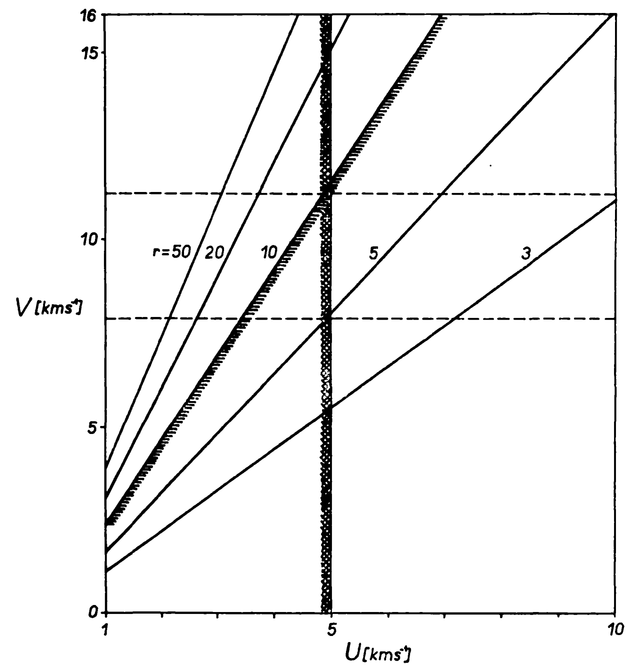
První rovnice (2), která udává souvislost rychlostních charakteristik U, V s hmotovým parametrem (Ciolkovského číslem) $C = r$

$$(6{,}3) \qquad V/U - \ln C = 0\,,$$

poskytuje dvě možnosti názorné představy o omezené použitelnosti jednoduché



Obr. 8.



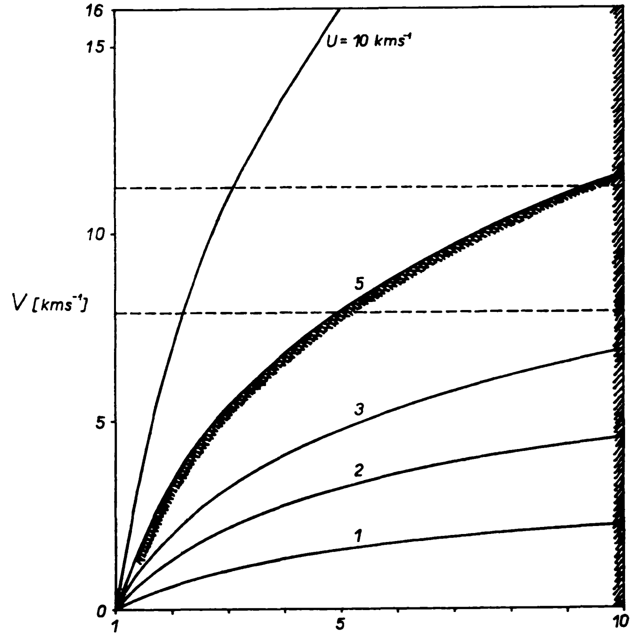
Obr. 9.

rakety, a to jednak znázorněním závislosti V na U při různých hodnotách $C = r$ (obr. 9), jednak znázorněním závislosti V na $C = r$ při různých hodnotách U (obr. 10).

Tabulka II

r	5	6	8	10
w	1,6	1,8	2,1	2,3
V m/s	4800	5400	6300	6900

Rozsah charakteristické rychlosti V v obou grafech zahrnuje ještě i 3. kosmickou rychlost. Jednoduchým šrafováním je naznačena hranice použitelnosti jednoduchých

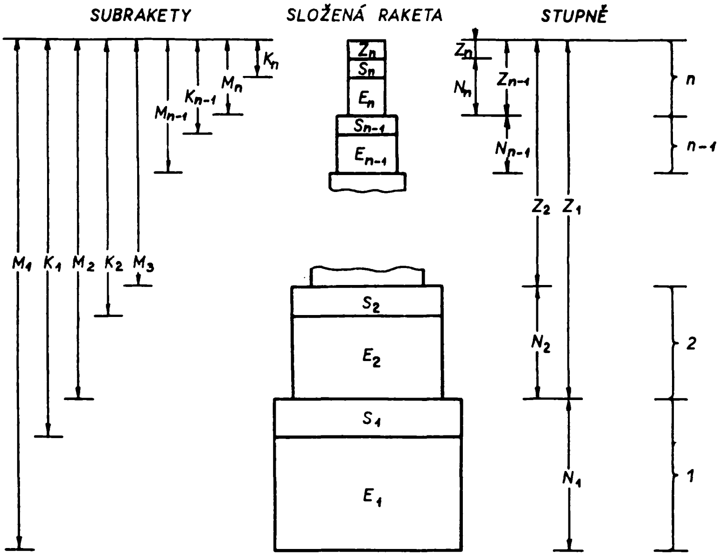


Obr. 10.

raket se zřetelem na dnešní hodnoty Ciolkovského čísla, křížovým šrafováním je naznačena hranice použitelnosti jednoduchých raket z hlediska raketového motoru se zřetelem na dnešní hodnoty výtokových rychlostí. (Upraveno podle [6], [7].)

7. HMOTOVÉ CHARAKTERISTIKY SLOŽENÉ RAKETY

Nejúplněji pojal myšlenku sériově uspořádané kombinace n ($n \geq 2$) jednoduchých raket Ciolkovskij [8]. Dospěl tak ke *složené raketě*, která snižuje principiální nedostatky jednoduché rakety, jak jsme na ně poukázali v odst. 5 a 6. Rozdělení hmot v Ciolkovského složené raketě znázorňuje schematicky obr. 11, který zároveň ukazuje podstatný rozdíl mezi pojmem *stupeň* a *subraketa* složené rakety.



Obr. 11.

Činnost složené rakety je zahájena jejím prvním stupněm, jehož počáteční hmota M_1 je rovna hmotě celé složené rakety (hmotě 1. subrakety) a rozděluje se na

$$(7,1)\qquad \left.\begin{array}{r} \text{energetickou hmotu 1. stupně...}\ E_1\,, \\ \text{strukturní hmotu 1. stupně...}\ S_1\,, \\ \text{užitečnou hmotu 1. stupně...}\ Z_1\,. \end{array}\right\}$$

Přitom užitečná hmota Z_1 1. stupně je hmota 1. subrakety, zmenšená o její nosnou hmotu $N_1 = E_1 + S_1$. Je tedy

$$(7,2)\qquad \left.\begin{array}{lll} \text{počáteční hmota 1. subrakety...} & M_1 & = E_1 + S_1 + Z_1\,, \\ \text{nosná hmota 1. stupně} \quad \ldots & N_1 & = E_1 + S_1\,, \\ \text{konečná hmota 1. subrakety} \ldots & K_1 & = S_1 + Z_1\,, \end{array}\right\}$$

kde K_1 je hmota složené rakety po spotřebování energetické hmoty 1. stupně. Jakmile byla spotřebována energetická hmota prvního stupně, oddělí se od celku strukturní hmota 1. stupně a nastupuje v činnost 2. stupeň složené rakety.

Počáteční hmota druhé subrakety M_2 je rovna hmotě složené rakety zmenšené o hmotu 1. stupně a rozděluje se zase na

$$\text{(7,1*)} \qquad \left.\begin{array}{r} \text{energetickou hmotu 2. stupně } E_2\,, \\ \text{strukturní hmotu 2. stupně } S_2\,, \\ \text{užitečnou hmotu 2. stupně } Z_2\,, \end{array}\right\}$$

přičemž užitečná hmota 2. stupně je hmotou 2. subrakety zmenšené o součet $E_2 + S_2$. Je tedy

$$\text{(7,2*)} \qquad \left.\begin{array}{lll} \text{počáteční hmota 2. subrakety} & M_2 & = E_2 + S_2 + Z_2\,, \\ \text{nosná hmota 2. stupně} & N_2 & = E_2 + S_2\,, \\ \text{konečná hmota 2. subrakety} & K_2 & = S_2 + Z_2\,, \end{array}\right\}$$

kde K_2 odpovídá stavu po spotřebování energetické hmoty 2. stupně atd. Když byla spotřebována energetická hmota $(n - 1)$-ho stupně, oddělí se od zbývajícího celku strukturní hmota $(n - 1)$-ho stupně a v činnost vstoupí n-tý stupeň složené rakety. Jeho počáteční hmota M_n je rovna hmotě n-té subrakety a rozděluje se zase na

$$\text{(7,1**)} \qquad \left.\begin{array}{r} \textit{energetickou hmotu n-ho stupně } E_n\,, \\ \textit{strukturní hmotu n-ho stupně } S_n\,, \\ \textit{užitečnou hmotu n-ho stupně } Z_n\,, \end{array}\right\}$$

přičemž užitečná hmota n-ho stupně je hmota n-té subrakety zmenšená o součet $E_n + S_n$ a je to užitečná hmota složené rakety ve vlastním významu tohoto slova. Je tedy

$$\text{(7,2**)} \qquad \left.\begin{array}{lll} \textit{počáteční hmota n-té subrakety} & M_n & = E_n + S_n + Z_n\,, \\ \textit{nosná hmota n-ho stupně (subrakety)} & N_n & = E_n + S_n\,, \\ \textit{konečná hmota n-té subrakety (stupně)} & K_n & = S_n + Z_n\,. \end{array}\right\}$$

Srovnáním těchto výsledků s odst. 1 shledáme, že tamní výrazy (1,1) a (1,2) jsou obdobou výrazů (1), (1*), …, (1**) a (2), (2*), …, (2**), a tedy každé subraketě složené rakety přísluší formálně stejná trojice hmotových charakteristik jako jednoduché raketě. Složené raketě o n stupních (a o n subraketách) přísluší tedy těchto $6n$ hmotových charakteristik

$$E_i,\, S_i,\, Z_i,\, M_i,\, N_i,\, K_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n)\,.$$

Veličiny vztahující se na jednotlivé stupně, popř. subrakety, jsou vázány $3n$ vztahy

$$\text{(7,3)} \qquad \left.\begin{array}{l} M_i = E_i + S_i + Z_i\,, \\ N_i = E_i + S_i\,, \\ K_i = S_i + Z_i\,. \end{array}\right\} \quad (i = 1, 2, \ldots, n)\,.$$

Veličiny vztahující se na dvě subrakety následující*) v průběhu činnosti složené rakety jsou vázány $n - 1$ vztahy

(7,4) $$M_{i+1} = Z_i \left(\text{nebo } M_i - M_{i+1} = N_i; \quad i = 1,2,\ldots\ldots,n-1\right).$$

Z charakteristik v počtu $6n$ je tedy jen

$$6n - 3n - (n - 1) = 2n + 1$$

charakteristik nezávislých; nejjednoduššími nezávislými charakteristikami jsou patrně hmoty

(7,5) $$E_1, S_1; E_2, S_2; \ldots; E_n, S_n, Z_n$$

uvedené ve střední koloně schematického obrazce 11.

8. HMOTOVÉ PARAMETRY SLOŽENÉ RAKETY

a) Parametry 1. druhu

Podle (7,3) pro každou subraketu složené n-stupňové rakety platí o hmotových charakteristikách tyto tři vztahy:

(8,1) $$\begin{aligned} M_i &= E_i + S_i + Z_i, \\ N_i &= E_i + S_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \\ K_i &= S_i + Z_i. \end{aligned}$$

Tabulka III

$\frac{E_i}{M_i}$	$\frac{K_i}{M_i}$	$\frac{S_i}{M_i}$	$\frac{Z_i}{M_i}$	$\frac{N_i}{M_i}$
$(1-\varepsilon_i)(1-\lambda_i)$	$\varepsilon_i + (1-\varepsilon_i)\lambda_i$	$(1-\lambda_i)\varepsilon_i$	λ_i	$1-\lambda_i$
ξ_i	$1-\xi_i$	$\frac{\varepsilon_i}{1-\varepsilon_i}\xi_i$	$\frac{1-\varepsilon_i-\xi_i}{1-\varepsilon_i}$	$\frac{\xi_i}{1-\varepsilon_i}$

Obdobně k (2,3), (2,3*) lze tedy pro každou subraketu definovat bezrozměrné para metry 1. druhu (s týmž pojmenováním jako v odst. 3):

(8,2) $$\lambda_i = Z_i/M_i, \quad \varepsilon_i = S_i/N_i, \quad \xi_i = E_i/M_i$$

*) V dalším nazýváme takové subrakety *následnými*; podobně užíváme i názvu *následný stupeň*.

$$(\lambda_i < 1, \ \varepsilon_i < 1, \ \xi_i < 1)$$

vázané vztahem analogickým k (2,5)

$$(8,3) \qquad (1 - \lambda_i)(1 - \varepsilon_i) - \xi_i = 0 \, .$$

Formální totožnost těchto rovnic s rovnicemi odst. 2 dovoluje ihned sestavit pro každou subraketu tabulku III obdobnou k tabulce v odst. 3.

Na naší složené raketě tedy rozeznáváme $3n$ hmotových parametrů 1. druhu, totiž $\lambda_i, \varepsilon_i, \xi_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Mezi nimi však platí n vztahů (3); i je jen $3n - n = 2n$ těchto parametrů nezávislých. Velmi jednoduchou soustavu $2n$ nezávislých parametrů získáme ze soustavy (7,5) po dělení Z_n:

$$\frac{E_1}{Z_n}, \frac{S_1}{Z_n}; \frac{E_2}{Z_n}, \frac{S_2}{Z_n}; \ldots; \frac{E_n}{Z_n}, \frac{S_n}{Z_n} \, .$$

Souvislost těchto parametrů s parametry 1. druhu je dána třeba vztahy

$$\frac{E_i}{Z_n} = \xi_i \frac{M_i}{Z_n}, \quad \frac{S_i}{Z_n} = \varepsilon_i \frac{N_i}{Z_n} = \varepsilon_i \left(\frac{E_i}{Z_n} + \frac{S_i}{Z_n} \right).$$

Vztahy obsahující vedle $\lambda_i, \varepsilon_i, \xi_i$ jen parametry $E_j/Z_n, S_j/Z_n, j = 1, 2, \ldots, n$ jsou složitější. Snadný výpočet poskytne

$$\lambda_i \left(1 + \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{E_j}{Z_n} + \frac{S_j}{Z_n} \right) \right) = 1 + \sum_{j=i+1}^{n} \left(\frac{E_j}{Z_n} + \frac{S_j}{Z_n} \right),$$

$$\varepsilon_i \left(\frac{E_i}{Z_n} + \frac{S_i}{Z_n} \right) = \frac{S_i}{Z_n},$$

$$\xi_i \left(1 + \sum_{j=i}^{n} \left(\frac{E_j}{Z_n} + \frac{S_j}{Z_n} \right) \right) = \frac{E_j}{Z_n} \, .$$

Při analýze složené rakety se praxe zajímá především o to, kolik užitečné hmoty ve vlastním významu slova připadá na jedničku hmoty celé složené rakety (1. subrakety), popř. kolik pohonné hmoty celé složené rakety (1. subrakety) připadá na jedničku hmoty celé složené rakety (1. subrakety). K tomu cíli zavádíme:

(8,4)

úhrnný užitečný parametr $\Lambda = Z/M \ (Z = Z_n, \ M = M_1)$,

úhrnný energetický parametr $\Xi = E/M \ (E = \sum_{i=1}^{n} E_i)$.

Podle první rovnice (2) a první rovnice (7,4) je

$$\lambda_j = \frac{Z_j}{M_j} = \frac{M_{j+1}}{M_j}^{*)} \Rightarrow \prod_{j=1}^{n} \lambda_j = \frac{Z_n}{M_1} = \frac{Z}{M}, \quad \prod_{j=1}^{i-1} \lambda_j = \frac{M_i}{M_1} = \frac{M_i}{M}$$

a dále podle třetí rovnice (2)

$$\xi_i \prod_{j=1}^{i-1} \lambda_j = \frac{E_i}{M_i} \frac{M_i}{M} = \frac{E_i}{M} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \xi_i \prod_{j=1}^{i-1} \lambda_j = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{n} E_i = \frac{E}{M},$$

takže pro úhrnné parametry (4) máme

$$\Lambda = \prod_{j=1}^{n} \lambda_j, \quad \Xi = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \prod_{j=1}^{i-1} \lambda_j. \tag{8,5}$$

Tyto rovnice také ukazují, že na užitečnou, popř. energetickou hmotu celé složené rakety připadá z její úhrnné hmoty

$$Z = M\Lambda = M \prod_{j=1}^{n} \lambda_j, \quad \text{popř.} \quad E = M\Xi = M \sum_{i-1}^{n} \xi_i \prod_{j-1}^{i-1} \lambda_j \tag{8,6}$$

a tedy na *úhrn* její *strukturní hmoty*, který označíme S

$$S = \sum_{i-1}^{n} S_i = M - (E + Z)$$

připadá

$$S = (1 - \Lambda - \Xi) M. \tag{8,6*}$$

(*Pokračování*)

Najpresnejší spôsob merania magnetického poľa

Najpresnejším spôsobom merania magnetického poľa je meranie pomocou magnetickej rezonancie. Pre magnetickú rezonanciu platí $\omega = \gamma \,.\, H$, kde ω je kruhová frekvencia v. f. poľa, H intenzita súčasne pôsobiaceho jednosmerného poľa kolmého na smer v. f. poľa a γ tzv. gyromagnetický pomer rezonujúceho jadra alebo elektrónu. Uvedený vzťah umožňuje pri použití normálovej vzorky s úzkou rezonančnou čiarou merať jednosmerné polia pomocou paramagnetickej elektrónovej rezonancie (EPR) a jadernej magnetickej rezonancie (NMR), pretože frekvenciu vieme merať s presnosťou 10^{-7}. V posledných rokoch sa počali vyrábať priemyselne prístroje na princípe NMR pre meranie polí o intenzite 10^3 až $50 \,.\, 10^3$ Oe s presnosťou $\pm$ 0,05 Oe (Varian, USA). Firma Harvey Wells vyrába prístroj na princípe NMR s minimálnou presnosťou 10^{-5} meranej hodnoty poľa. Presnosť merania poľa na princípe NMR je vždy o niekoľko rádov väčšia než hociktorou inou metódou.

Matej Rákoš

K čemu slouží stříbro?

Ze světové produkce stříbra se spotřebuje asi 30% na výrobu fotografických materiálů, 25% na pájení, 20% na galvanizaci elektrických vodičů; na všechny ostatní účely zbývá 25%.

Ivan Soudek

---

*) Klademe $M_{n+1} = Z_n$, což je fyzikálně zřejmé.