Václav Havel

O mezi stínu vlastního a vrženého

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 1 (1956), No. 4, 417--420

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/137426

VÁCLAV HAVEL

O MEZI STÍNU VLASTNÍHO A VRŽENÉHO

1. Předmětem vyšetřování bude euklidovský prostor $\boldsymbol{E}_3$, a jeho rozšíření $\boldsymbol{E}_3^*$. Hranici bodového útvaru $\boldsymbol{U} \subset \boldsymbol{E}_3$ označíme $h(\boldsymbol{U})$. V $\boldsymbol{E}_3$ definujme těleso jako topologický obraz polyedru [4]; plochou budeme rozumět (neprázdnou) hranici tělesa. Adjunkcí nevlastních bodů (náleží-li polopřímka polyedru, pak polyedru rozšířenému bude náležet polopřímka i s příslušným bodem nevlastním) přejdeme k pojmům tělesa a plochy v $\boldsymbol{E}_3^*$. Je-li těleso $\boldsymbol{T} \subset \boldsymbol{E}_3^*$ konvexní a obsahuje-li otevřený poloprostor $\Pi \subset \boldsymbol{E}_3^*$ vnitřní bod z $\boldsymbol{T}$, pak útvar $\Pi \cap h(\boldsymbol{T})$ nazveme lokálně konvexním plošným útvarem.

2. V $\boldsymbol{E}_3^*$ zvolme pevný bod S (svítící bod) a pevnou plochu π neprocházející bodem S. Je-li S nevlastní, pak zvolme v osnově přímek jdoucích bodem S pevnou orientaci ω (obr. 1).

„Paprskem“ s^X bodu $X \in \boldsymbol{E}_3$, $X \neq S$ budeme rozumět

a) v případě, že S je vlastní, polopřímku, obsahující bod X, vycházející z bodu S a orientovanou tak, že $S < X$ (S před X);

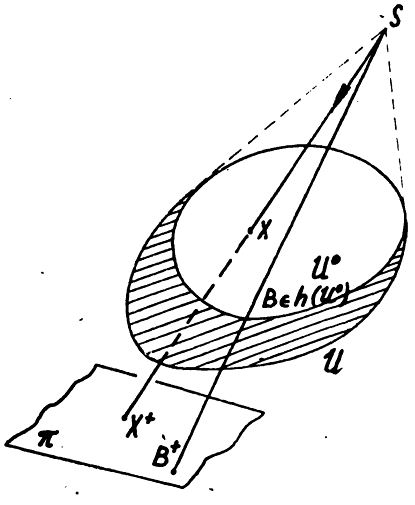
b) v případě, že S je nevlastní, přímku jdoucí body S, X, orientovanou podle ω.

Jestliže útvar t je neprázdný a uzavřený, neobsahuje-li bod S, je-li částí některého paprsku a je-li orientován souhlasně s paprskem, pak označme t_1 ten bod útvaru t, pro nějž platí $t_1 \leq X$ pro všecka $X \in t$.

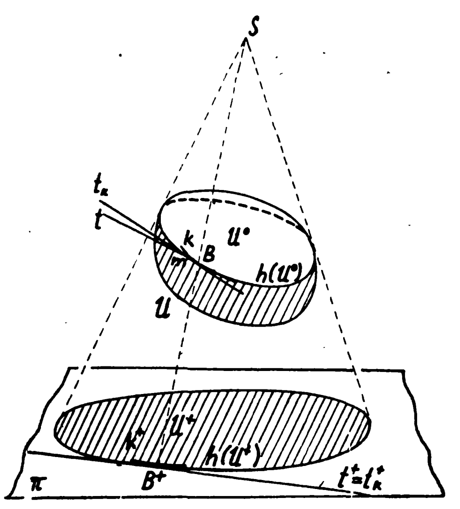
3. Osvětlenou část $\boldsymbol{U}^\circ$ daného útvaru $\boldsymbol{U} \subset \boldsymbol{E}_3$, $\boldsymbol{U} \not\ni S$, definujme jako množinu všech bodů $(s^X \cap \boldsymbol{U})_1$, $X \in \boldsymbol{U}$. Je-li $\boldsymbol{U}$ plocha, pak hranice $h(\boldsymbol{U}^\circ)$ je precisovaným pojmem t. zv. meze vlastního stínu (při osvětlení plochy $\boldsymbol{U}$ ze svítícího bodu S).

Ideální stín $\boldsymbol{U}^+$ útvaru $\boldsymbol{U}$ definujme jako množinu všech bodů $(s^X \cap \pi)_1$, kde bod X probíhá útvar $\boldsymbol{U}$, a v případě, že S je vlastní, též útvar $\boldsymbol{U}_\mathrm{I}$, souměrný s $\boldsymbol{U}$ dle S.

Je-li $\boldsymbol{U}$ plocha, pak hranice $h(\boldsymbol{U}^+)$ je precisovaným pojmem t. zv. meze vrženého stínu (při osvětlení plochy $\boldsymbol{U}$ ze svítícího bodu S do plochy π).



Obr. 1



Obr. 2

4. V dalším se omezíme na případ, kdy π je rovina; podle předpokladu je rovina π vlastní a neprochází bodem S.

Poznamenejme, že pro plochu $\boldsymbol{U} \subset \boldsymbol{E}_3$, $\boldsymbol{U} \not\ni S$ nemusí platit $h(\boldsymbol{U}^\circ) \subset \bar{\boldsymbol{U}}^\circ$, jak se dokáže ze snadno konstruovatelného protipříkladu (obr. 3). Dále lze sestrojit plochu $\boldsymbol{U} \subset \boldsymbol{E}_3$, $\boldsymbol{U} \not\ni S$ tak, že $h(\boldsymbol{U}^+) \neq [h(\boldsymbol{U}^\circ)]^+$ (obr. 4). Přesto platí základní poznatek, který nyní sformulujeme.

Věta 1. Je-li $\boldsymbol{U} \subset \boldsymbol{E}_3$, $\boldsymbol{U} \not\ni S$ plocha, pak platí inkluse $h(\boldsymbol{U}^+) \subset [h(\boldsymbol{U}^\circ)]^+$.

Důkaz. Nechť $B \in h(\boldsymbol{U}^+)$; pak paprsek s^B protíná některou z ploch $\boldsymbol{U}, \boldsymbol{U}_{\mathrm{I}}$ (viz odst. 3), na př. plochu $\boldsymbol{U}$ v bodě A; pak ovšem $B = A^+$. Kdyby bod A byl vnitřním bodem vzhledem k $\boldsymbol{U}^\circ$, pak $A^+ \notin h(\boldsymbol{U}^+)$. Z tohoto sporu plyne tvrzení věty.

V učebnicích deskriptivní geometrie se zavádí pojem meze vlastního stínu i meze vrženého stínu vcelku cestou intuitivní; to má sice nevýhodu v matematické nepřesnosti, avšak na druhé straně poskytuje intuitivní methoda možnost volné formulace vět; obvyklá definice „mez vrženého stínu je vrženým stínem meze vlastního stínu“ vyhovuje sice pro plochy konvexní [3], avšak zásadně nevyhovuje pro obecné plochy.

5. A. O. Volberg věnoval ve své učebnici *Lekcii po načertatělnoj geometrii**) rozboru pojmu osvětlení značnou péči; podal též precisaci věty o křivkách, protínajících mez vlastního stínu. Touto větou se nyní budeme zabývat.

Věta 2. a) Nechť $\boldsymbol{U} \subset \boldsymbol{E}_3$, $\boldsymbol{U} \not\ni S$ je plocha, nechť $B \in h(\boldsymbol{U}^\circ)$, $B^+ \in h(\boldsymbol{U}^+)$; nechť Ω je takové okolí bodu B, pro něž $\Omega \cap \boldsymbol{U}$ je hladkým plošným útvarem. b) Předpokládejme dále, že $m = h(\boldsymbol{U}^\circ) \cap \Omega$ je hladký oblouk, který má v bodě B tečnu $t \not\ni S$ a že $k \subset \boldsymbol{U}$, $k \ni B$ je hladký oblouk, který má v bodě B tečnu $t_k \not\ni S$. Pak křivky m^+, k^+ dotýkají se v bodě B^+ (obr. 2).

Důkaz. Nechť platí předpoklady a). Nechť plošný útvar $\Omega \cap \boldsymbol{U}$ má parametrické rovnice $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$, $z = \chi(u, v)$, kde $(u, v) \in \theta$, přičemž funkce φ, ψ, χ mají všude v θ spojité parciální derivace prvního řádu a všude v θ má matice

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial\varphi}{\partial u}, & \dfrac{\partial\psi}{\partial u}, & \dfrac{\partial\chi}{\partial u} \\[2ex] \dfrac{\partial\varphi}{\partial v}, & \dfrac{\partial\psi}{\partial v}, & \dfrac{\partial\chi}{\partial v} \end{pmatrix}$$

hodnost 2. Je-li bod S vlastní bod se souřadnicemi x_s, y_s, z_s, pak tečné roviny plochy $\Omega \cap \boldsymbol{U}$, jdoucí bodem S, mají body dotyku (u, v) určené rovnicí $F(u, v) =$

$$= \begin{vmatrix} \varphi - x_s, & \psi - y_s, & \chi - z_s \\[1ex] \dfrac{\partial\varphi}{\partial u}, & \dfrac{\partial\psi}{\partial u}, & \dfrac{\partial\chi}{\partial u} \\[2ex] \dfrac{\partial\varphi}{\partial v}, & \dfrac{\partial\psi}{\partial v}, & \dfrac{\partial\chi}{\partial v} \end{vmatrix} = 0.$$

Je-li bod S nevlastní bod přímky o směrových kosinech a, b, c, pak podmínka pro to, aby tečná rovina plochy $\Omega \cap \boldsymbol{U}$ procházela bodem S, je, aby bod dotyku (u, v) byl vázán rovnicí

$$G(u, v) = a \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\psi}{\partial u}, & \dfrac{\partial\chi}{\partial u} \\[2ex] \dfrac{\partial\psi}{\partial v}, & \dfrac{\partial\chi}{\partial v} \end{vmatrix} + b \cdot \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi}{\partial u}, & \dfrac{\partial\chi}{\partial u} \\[2ex] \dfrac{\partial\varphi}{\partial v}, & \dfrac{\partial\chi}{\partial v} \end{vmatrix} + c \cdot \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi}{\partial u}, & \dfrac{\partial\psi}{\partial u} \\[2ex] \dfrac{\partial\varphi}{\partial v}, & \dfrac{\partial\psi}{\partial v} \end{vmatrix} = 0.$$

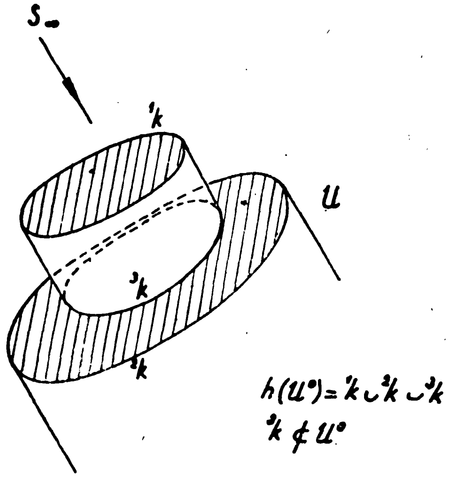
*) Český překlad s názvem „Deskriptivní geometrie“ vyšel v Praze v r. 1953.

Nechť platí předpoklady a), b). Tečná rovina plochy $\boldsymbol{U}$ v bodě B prochází bodem S. Kuželová plocha o vrcholu S a o řídicí křivce m je proťata rovinou π v oblouku m^+, kdežto kuželová plocha o vrcholu S a řídicí křivce k je rovinou π proťata v křivce k^+. Křivka m^+ má v bodě B^+ tečnu t^+; křivka k^+ má v bodě B^+ tečnu $t_k^+ = t^+$. Věta je dokázána.

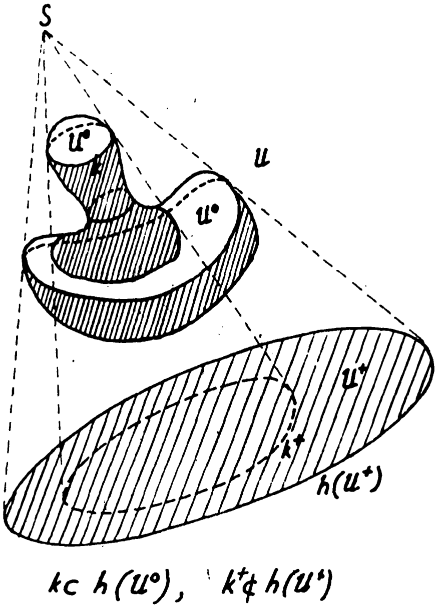
Projednáme ještě případy, vyloučené ve větě 2. Jestliže $t \ni S$, pak m nemůže být rovinnou křivkou; pak křivka m^+ má v bodě B^+ bod vratu, jak je známo z diferenciální geometrie.

Jestliže $t_k \ni S$, pak (není-li křivka k rovinná) v bodě B^+ má křivka k^+ bod vratu obdobně jako v předchozím.

Tyto případy nemají valného konstruktivního významu.

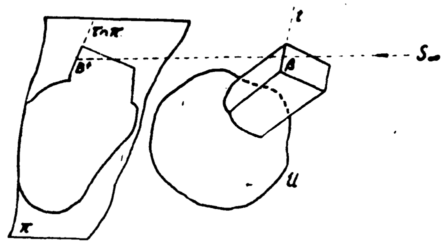


Obr. 3



Obr. 4

6. V. Medek se zabýval v práci [3] případem konvexní plochy, avšak zavedl pojem skutečného obrysu jinak, než je námi zavedený pojem meze vlastního stínu. Rozdíl



Obr. 5

mezi oběma pojmy je však celkem formální. Uvedeme věty 1, 2 z článku [3] v souvislost s předcházejícími úvahami.

Věta 3. Nechť $\boldsymbol{U} \subset \boldsymbol{E}_3$, $\boldsymbol{U} \not\ni S$ je plocha; nechť $B \in h(\boldsymbol{U}^\circ)$, $B^+ \in h(\boldsymbol{U}^+)$; nechť Π

je takový otevřený podprostor, obsahující bod B, pro nějž $\Pi \cap \boldsymbol{U}$ je lokálně konvexním plošným útvarem. Pak existuje styčná rovina $\pi \ni S$ plošného útvaru $\Pi \cap \boldsymbol{U}$ v bodě B a styčná přímka $\Pi \cap \boldsymbol{U}$ křivky $[h(\Pi \cap \boldsymbol{U})]^+$ v bodě B^+.

Snadný důkaz vede se nepřímo. Je zřejmě $[h(\Pi \cap \boldsymbol{U})]^+ \subset h(\boldsymbol{U}^+)$ (obr. 5).

Závěr. V předchozích úvahách byl precisován pojem meze vlastního a vrženého stínu a odvozeno několik základních vět. Úvahy byly vázány na plochy, definované v odst. 1.

Literatura

[1] Kadeřávek-Klíma - Kounovský, *Deskriptivní geometrie*, II. díl, Praha 1954, str. 556; věta, uvedená v uvozovkách.

[2] J. Klapka, *Deskriptivní geometrie*, Praha 1951, str. 187, věta 4, 15.

[3] V. Medek, *O obryse vypuklých ploch*, Mat.-fyz. čas. 4 (1945), str. 38—42.

[4] K. Reidemeister, *Topologie der Polyeder und kombinatorische Topologie der Komplexe*, Leipzig 1953, str. 34.

[5] O. A. Volberg, *Deskriptivní geometrie*, (překlad z ruštiny) Praha 1953, str. 177, odstavec „Průmět čáry protínající zdánlivý obrys".

ING. KURT LANGHANS

MĚŘENÍ ZÁŘENÍ

V článku je uveden přehled základních jednotek záření a jejich vzájemné převody. Podle první části článku Ing. K. Langhanse o měřičích záření (Strahlungsmessgeräte) v časopise „Radio und Fernsehen", 5. roč. (1956), č. 2, str. 44.

Nejjednodušší jednotkou záření je údaj počtu impulsů, které emitované částice vyvolají v účinném objemu počítače.

Součet impulsů za theoreticky libovolný čas je dávka. Počet impulsů za určitý čas, na př. za 1 minutu, je intensita záření. Údaje počítačů jsou tedy v impulsech nebo v impulsech za minutu. Počet impulsů však nemůže být přesným měřítkem účinnosti nebo nebezpečnosti záření, i kdybychom předpokládali, že počet impulsů je v nejpříznivějším případě úměrný počtu emitovaných částic nebo kvantů.

Účinnost záření totiž nezáleží jen na počtu „paprsků" (částic, kvant), nýbrž také na druhu a na energii záření. Počet impulsů za minutu je proto údaj důležitý při srovnávání a relativním měření, avšak absolutní měření lze počítáním impulsů provádět jen zřídka a jen za zcela určitých předpokladů.

Aktivita

Jednotkou aktivity radioaktivních preparátů je curie (c) a nověji též rutherford (rd).

Jeden curie odpovídá záření takového množství radonu, které je v radioaktivní rovnováze s 1 gramem radia, což je prakticky rovno záření 1 g radia.

Číselně je 1 curie $= 3{,}7 \cdot 10^{10}$ rozpadů za vteřinu.

Protože tato jednotka má nevhodné číselné vyjádření, byl za novou jednotku zvolen 1 rutherford $= 10^6$ rozpadů za vteřinu.

Zmíněné jednotky aktivity jsou nezávislé na masse zářiče. Pro „specifickou aktivitu" se používá jednotky mc/kg a nověji též milirutherford/kg. Specifická aktivita je důležitá zejména v lékařství, kde se na př. ordinuje určité množství záření v milird na kg tkáně.