Framtišek Harant
O speciálních kuželosečkových klínových plochách

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 1 (1956), No. 4, 412--416

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/137416`

FRANTIŠEK HARANT

O SPECIÁLNÍCH KUŽELOSEČKOVÝCH KLÍNOVÝCH PLOCHÁCH

Tato práce navazuje na výsledky prací uvedených na závěr jako [1], [2], [3].

V těchto pracích bylo dokázáno, že t. zv. implicitní plocha klínová je definována rovnicí

$$F(x, z \cdot G(y) + H(y)) = 0$$

při splnění těchto požadavků:

$G(y)$, $H(y)$ jsou funkce, mající v jednorozměrné oblasti $\boldsymbol{J}$ spojité první derivace, při čemž neplatí $G(y) = 0$ pro žádné $y \in \boldsymbol{J}$, a $F(x, \bar{z})$ je funkce definovaná na dvojrozměrné oblasti $\boldsymbol{O}_1$ tak, že, $F((x, \bar{z}) = 0)$ je křivka v rovině uspořádaných dvojic (x, z)*).

Za splnění daných předpokladů je tedy možno sestavit rovnici určitého druhu klínových ploch takto:

Nechť je dána $F(x, \bar{z}) = \sum_{i=1}^{r} a_i, x^{v_i} \bar{z}^{w_i}$, kde uspořádané dvojice celých nezáporných čísel (v_i, w_i), $i = 1, \ldots, r$, jsou vzájemně různé a kde platí $a_i \neq 0$ pro každé $i = 1, \ldots, r$. Dosadíme do tohoto vztahu $\bar{z} = z \cdot G(y) + H(y)$, kde $G(y)$ a $H(y)$ splňují předpoklady k definici implicitní klínové plochy. Dostaneme tak rovnici implicitní plochy klínové, která má systém základních křivek vzájemně afinních v rovinách ($y =$ konst.).

Užitím těchto výsledků vyšetříme nyní z uvedených klínových ploch ty, na nichž leží kuželosečky. K soustavnému studiu klínových ploch došlo se právě na základě několika speciálních klínových ploch s kuželosečkami, které byly známy (z popudu technické praxe).

I. Hledejme tedy mezi uvedenými implicitními klínovými plochami takové, na nichž leží kuželosečky. Omezíme se na plochy stupně nejvýše čtvrtého, v případě, že $F(x, \bar{z}) = 0$ je kvadratická rovnice, $G(y)$ je lineární a $H(y)$ kvadratická funkce. (O stupni viz poučku 7 v práci [1]).

Nechť tedy

$$F(x, \bar{z}) \equiv a_1 x^2 + b_1 \bar{z}^2 + c_1 x\bar{z} + a_2 x + b_2 \bar{z} + c_2 = 0,$$

$$\bar{z} = z \cdot (ay + b) + (cy^2 + dy + e),$$

kde a_i, b_i, c_i $(i = 1, 2)$, a, b, c, d, e jsou daná reálná čísla, a, b_1, c_1, b_2 nerovnají se současně nule.

Po dosazení a úpravě dostaneme rovnici implicitní klínové plochy nejvýše čtvrtého stupně:

$$b_1c^2y^4 + 2\,ab_1cy^3z + a^2b_1y^2z^2 + cc_1xy^2 + ac_1xyz + 2\,b_1cdy^3 + 2\,b_1(ad + bc)y^2z + \\ + 2\,abb_1yz^2 + a_1x^2 + My^2 + b_1b^2z^2 + c_1dxy + bc_1xz + Lyz + Nx + Py + \\ + Rz + S = 0, \qquad (1)$$

kde

$$M = b_1d^2 + 2\,b_1ce + cb_2, \qquad P = 2\,b_1de + b_2d,$$

*) Symbolem $(F(x, \bar{z}) = 0)$ označíme množinu uspořádaných dvojic v dané oblasti, splňujících rovnici $F(x, \bar{z}) = 0$. Obdobně v dalším textu.

$$L = 2\,ab_1e + 2\,bb_1d + ab_2, \qquad R = 2\,b_1be + bb_2,$$
$$N = a_2 + c_1e, \qquad S = b_1e^2 + b_2e + c_2.$$

Zkoumejme nyní podmínky pro to, aby na ploše ((1)) ležely kuželosečky, a to v rovinách $(z = mx + ny + q)$, resp. $(y = mx + n)$, resp. $(x = \text{konst})$.

1) Protněme tedy plochu (1) rovinou

$$z = mx + ny + q. \tag{2}$$

Aby průnik byl kuželosečkou, musí být současně splněny tyto podmínky:

$$\begin{aligned}
&\text{I.} \quad b_1\,(c + an)^2 = 0,\\
&\text{II.} \quad ab_1m\,(c + an) = 0,\\
&\text{III.} \quad a^2b_1m^2 = 0,\\
&\text{IV.} \quad b_1\,(a^2nq + acq + cd + adn + bcn + abn^2) = 0,\\
&\text{V.} \quad 2\,b_1m\,(a^2q + ad + bc + 2\,abn) + ac_1n + cc_1 = 0,\\
&\text{VI.} \quad am\,(c_1 + 2\,bb_1m) = 0.
\end{aligned} \tag{3}$$

Z I. plyne buďto a) $b_1 = 0$, anebo b) $c + an = 0$.
Je-li $b_1 = 0$, pak v soustavě (3) platí i rovnice II.—IV. a zbývá splnit rovnice

$$\text{V}'. \quad c_1\,(an + c) = 0,$$
$$\text{VI}'. \quad ac_1m = 0.$$

Tyto rovnice jsou splněny, platí-li některá z dalších podmínek:

$$\alpha)\ c_1 = 0, \qquad \beta)\ a = 0,\ an + c = 0, \qquad \gamma)\ m = 0,\ an + c = 0.$$

Případy aα), aβ) však mají za následek snížení stupně plochy ((1)); pak jde o plochy kvadratické. Význam má tedy jen případ aγ), z něhož plyne:

$$b_1 = 0,\ m = 0,\ an + c = 0,$$

a tedy pro $a \neq 0$

$$n = -\frac{c}{a}.$$

Protože případ b) $c + an = 0$ vede ke stejným závěrům jako a), můžeme vyslovit tento výsledek:

Věta 1: Nechť a_i, b_i, c_i $(i = 1, 2)$, a, b, c, d, e jsou reálná čísla, z nichž c_1, b_2 nejsou současně rovna nule, a dále nechť $a \neq 0$. Na ploše o rovnici

$$cc_1xy^2 + ac_1xyz + a_1x^2 + cb_2y^2 + c_1dxy + bc_1xz + ab_2yz + (a_2 + c_1e)\,x + b_2dy + {} + bb_2z + b_2c + c_2 = 0 \tag{4}$$

leží pak kuželosečky v rovinách

$$\left(z = -\frac{c}{a}\,y + q\right). \tag{5}$$

Budeme vyšetřovat znovu soustavu rovnic (3). Tuto soustavu lze anulovat i tehdy, když $b_1 \neq 0 = m = n$. Za tohoto předpokladu je soustava (3) splněna právě tehdy, když platí současně

$$\text{I}'.\quad b_1c^2 = 0,$$
$$\text{IV}'.\ b_1c\,(a\,q + d) = 0, \tag{6}$$
$$\text{V}'.\quad cc_1 = 0.$$

Rovnice soustavy (6) platí však současně, když a jen když $c = 0$. Odtud pak plyne:

Věta 2: Nechť a_i, b_i, c_i $(i = 1, 2)$, a, b, c, d, e jsou reálná čísla, $b_1 \neq 0$. Jestliže rovnice

$$a^2b_1y^2z^2 + ac_1xyz + 2\,ab_1dy^2z + 2\,abb_1yz^2 + a_1x^2 + b_1d^2y^2 + b_1b^2z^2 + c_1dxy +$$
$$+ bc_1xz + Lyz + Nx + Py + Rz + S = 0$$

se neredukuje na identitu (vzhledem k x, y, z), pak na ploše o rovnici (7) leží kuželosečky v rovinách $(z = \text{konst})$. [Význam symbolů L, N, P, R, S je uveden za rovnicí (1)].

Poznámka: V rovinách $y = \text{konst}$ leží kuželosečky; tyto kuželosečky tvoří systém základních křivek klínové plochy, které jsou podle definice implicitní klínové plochy spjaty navzájem afinitou a posunutím.

2) Protněme plochu ((1)) nyní rovinou $(y = mx + n)$. Aby průnik byl kvadratický, nutno splnit tyto podmínky:

$$\text{I.}\quad b_1c^2m^4 = 0,$$
$$\text{II.}\quad cm^2\,[2\,b_1m\,(2\,cn + d) + c_1m] = 0,$$
$$\text{III.}\ 2\,ab_1cm^3 = 0, \tag{8}$$
$$\text{IV.}\quad m\,[6\,ab_1cmn + ac_1 + 2\,b_1m\,(ad + bc)],$$
$$\text{V.}\ a^2\,b_1\,m^2 = 0.$$
$$\text{VI.}\quad ab_1m\,(an + b) = 0.$$

Nechť opět $b_1 = 0$, Pak soustava (8) je ekvivalentní se soustavou rovnic

$$\text{II}'.\quad cc_1m^3 = 0,$$
$$\text{IV}'.\ ac_1m = 0. \tag{9}$$

Rovnice (9) jsou splněny právě, když platí některá z rovnic

$$\alpha)\ m = 0,\quad \beta)\ a = 0,\ c = 0,\quad \gamma)\ c_1 = 0.$$

Případy β), γ) vedou ovšem opět na kvadratickou plochu a případ α) $m = 0$ dává výsledek známý již z definice implicitní klínové plochy (kuželosečky v rovinách $(y = \text{konst})$).

Vyloučíme-li tedy případy, kdy platí současně

$$b_1 = 0,\quad c_1 = 0, \tag{10a}$$

nebo

$$a = 0,\quad c = 0, \tag{10b}$$

pak už soustavu rovnic (8) nelze jiným způsobem splnit.

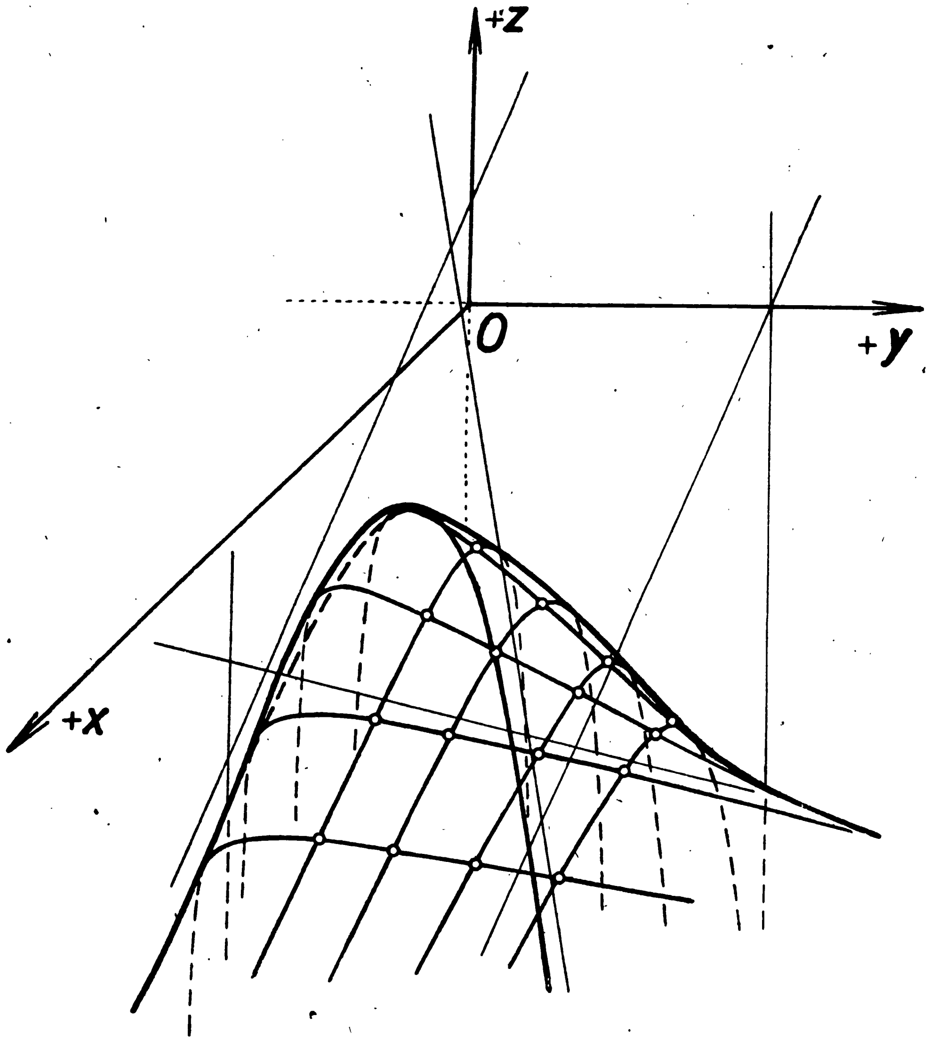
3) Zkoumejme nyní podmínky pro to, aby kuželosečky ležely v rovinách

$$(x = \text{konst}). \tag{11}$$

Po dosazení do rovnice (1) dostaneme tyto podmínky:

$$\begin{aligned} \text{I.}\quad & b_1c^2 = 0, \\ \text{II.}\quad & a^2b_1 = 0, \\ \text{III.}\quad & 2\,b_1\,(ad + bc) = 0, \\ \text{IV.}\quad & 2\,ab_1c = 0, \\ \text{V.}\quad & 2\,b_1cd = 0, \\ \text{VI.}\quad & 2\,abb_1 = 0. \end{aligned} \tag{12}$$

Vyloučíme-li ihned případy (10), lze soustavu splnit, jen když $b_1 = 0$, a odtud plyne, že na ploše ((4)) leží kuželosečky v rovinách (11). Ve spojení s větou 1 sformulujeme nyní závěr:



Obr. 1

Věta 3: Nechť a_i, b_i, c_i ($i = 1, 2$), a, b, c, d, e jsou reálná čísla, nechť c_1, b_2 nejsou současně rovna nule, a dále nechť $a \neq 0$. Na ploše o rovnici (4) leží kuželosečky v rovinách (5) a (11), (vyjma kuželoseček v rovinách ($y = \text{konst}$)).

II. Věta 3 přináší tento výsledek: Vyjma dvou soustav vzájemně afinních kuželoseček v (rovinách $x = \text{konst}$), ($y = \text{konst}$), leží na ní kuželosečky v rovinách $\left(z = -\frac{c}{a}y + q\right)$, ($a \neq 0$).

Ilustrujme tuto větu na příkladu.

Pišme rovnici (4) v tomto tvaru:

$$Axy^2 + Bxyz + Cx^2 + Dy^2 + Exy + Fxz + Gyz + Hx + Ky + Lz + M = 0. \tag{13}$$

Zvolme

$$A = B = C = D = G = H = M = 1 \quad \text{a} \quad E = F = K = L = 0;$$

dostaneme tak rovnici

$$xy^2 + xyz + x + y + yz + x + 1 = 0. \tag{14}$$

Na ploše ((14)) leží hyperboly. Pro takovou hyperbolu v rovině ($y = k$) je $A_{33} = A = -\frac{1}{4}k^2$, a tedy tato hyperbola má střed $S\left(-1, k, \frac{1}{k}(1 - k^2)\right)$ a asymptoty ($x + 1 = 0$) a ($x + kz + k^2 = 0$). Pro hyperbolu v rovině ($x = \text{konst}$) je $A_{33} = -\frac{1}{4}(k+1)^2$ a $A = -\frac{1}{4}(k+1)^2 \cdot (k^2 + k + 1)$, a hyperbola má střed $S(k, 0, 0,)$ a asymptoty ($y = 0$) a ($y + z = 0$).

Mimo to leží na ploše hyperboly v rovinách ($z = -y + q$), přičemž $A = A_{33} = -\frac{1}{4}q^2$; hyperboly mají středy $S\left(-1, \frac{1}{q}, \frac{1}{q}(q^2 - 1)\right)$ a asymptoty ($x + 1 = 0$) a ($x + qy = 0$). Je vidět, že tyto kuželosečky nejsou závislé na volbě k, nýbrž jen na volbě q.

V obrázku jsme se omezili na případ $k \geq 1$, a zobrazili jen jednu větev hyperbol, ležících v rovinách ($y = \text{konst}$) a ($x = \text{konst}$); mimo to je zobrazena větev hyperboly, ležící v rovině ($z = -y - 1$).

Literatura

[1] V. Havel, *O plochách klínových I.*, Časopis pro pěstování matematiky, roč. 80 (1955), str. 51.

[2] V. Havel: *O plochách klínových II.*, Časopis pro pěstování matematiky, roč. 80 (1955), str. 308.

[3] V. Havel, F. Harant: *O některých vlastnostech klínových ploch*, Geometrie v technice a v umění, sborník prací k sedmdesátým narozeninám prof. Dr Ing. Františka Kadeřávka, SNTL, Praha 1955.