Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Alois Urban

Zobrazovací metody v deskriptivní geometrii [Dokončení]

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 3 (1958), No. 2, 139--152

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/137406`

Welch ukázal dále, že obecná diskriminační funkce v případě dvou alternativ je poměr věrohodností dvou hypotes a je možno odvodit ji buď z věty Bayesovy s danými apriorními pravděpodobnostmi nebo pomocí základní věty Neymanovy-Pearsonovy, kdy jsou chyby pro ty dvě hypotesy minimalisovány v určitém daném poměru.

Literatura

[1] W. Feller: *An introduction to probability theory and its applications*. Vol. 1. New York, John Wiley & Sons (1950).

[2] Fisher R. A. (1936): *The use of multiple measurements in taxonomic problems*. Annals of Eugenics, London 7, str. 179.

[3] Fisher R. A. (1940): *The precision of discriminant functions*. Annals of Eugenics, London 10, str. 422.

[4] Hodges J. L. and Lehmann E. L. (1954): *Testing the approximate validity of statistical hypotheses*. Journal of the royal statistical society. Series B, Vol. 16, str. 261—268.

[5] Lehman E. L. (1950): *Some principles of the theory of testing hypotheses*. Annals of mathematical statistics 21, str. 1—26.

[6] Neyman J. (1935): *Su un teorema concernente le cosiddette statistiche sufficienti*. Giornale dell Istituto Italiano degli Attuari. Vol. VI, No 4.

[7] Neyman J. (1941): *On a statistical problem arising in routine analyses and in sampling inspections of mass production*. Annals of mathematical statistics 12, str. 46—76.

[8] Neyman J. and Pearson E. S. (1933): *On the problem of the most efficient tests of statistical hypotheses*. Phil. Trans. Roy. Soc. London, Series *A*, 231, str. 289—337.

[9] Neyman J. and Pearson E. S. (1936): *Sufficient statistics and uniformly most powerful tests of statistical hypotheses*. Statistical research memoirs I, str. 113—137.

[10] Rao R. (1948): *The utilization of multiple measurements in problems of biological classification*. Journal of the Royal Statistical Society, Series B, Vol. 10, str. 159.

[11] Rao R. (1950): *Statistical inference applied to classificatory problems*. Sankhyā 10, str. 229—256.

[12] Rao R. (1951): *The discriminant function approach in the classification of time series*. Sankhyā 11, str. 265.

[13] Roy S. N. (1947): *Notes on testing of composite hypotheses*. Sankhyā 8, str. 257—270.

[14] Roy S. N. (1948): *Notes on testing of composite hypotheses II*. Sankhyā 9, str. 19—38.

[15] Wald A. (1939): *Contributions to the theory of statistical estimation and testing hypotheses* Annals of Math. Stat. 10, str. 299.

[16] Wald A. (1942): *On the principles of statistical inference*. Notre Dame, Indiana.

[17] Wald A.: *Notes on the theory of statistical estimation and testing hypotheses*. Columbia university.

[18] Wald A. (1947): *Sequential analysis*. J. Wiley — New York.

[19] Wald A. (1950): *Statistical decision functions*. J. Wiley — New York.

[20] Welch B. L. (1939): *Note on discriminant functions*. Biometrika 31, str. 218.

ZOBRAZOVACÍ METODY V DESKRIPTIVNÍ GEOMETRII

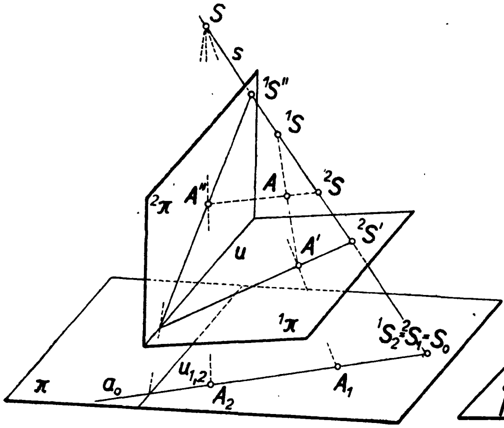
Prof. dr A. Urban

(dokončení)

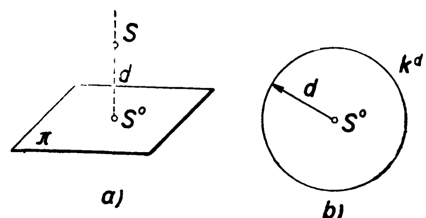
Všechna v běžné technické praxi se vyskytující dvojobrazová zobrazení jsou odvozena buď z dvojobrazového zobrazení v projektivním prostoru, v němž pomocné průmětny splývají (případ *c*), str. 30, č. 1) nebo ze zobrazení, v němž pomocné průmětny i jejich uzly jsou různé (případ *a*), str. 30 č. 1), ale hlavní střed S a pomocné středy ${}^1S$, ${}^2S$ jsou kolineární (obr. 13). Za předpokladu kolineárnosti středů promítání všech tří basí splývají uzlové body ${}^2S_1$, ${}^1S_2$ nákresny v jediný bod (neležící na základnici), který označujeme S_0 a často mu říkáme *hlavní bod* zobrazení. Také sdružené uzlové přímky nákresny splývají v jedinou přímku procházející ovšem hlavním bodem; říkáme jí *ordinála*. Tytéž názvy zavádíme i pro splývající uzly a uzlové přímky dvojobrazového zobrazení se splývajícími pomocnými průmětnami. Označíme-li dvojobrazové zobrazení, pro něž středy promítání všech tří basí jsou kolineární (při čemž však — za předpokladu, že ${}^1\pi \neq {}^2\pi$ — jejich spojnice neprotíná průsečnici $u = {}^1\pi \, . \, {}^2\pi$), za *základní dvojobrazové zobrazení*, pak podmínku pro sdružené obrazy bodu prostoru můžeme vyjádřit ve velmi přehledném tvaru:

Nutná a postačující podmínka pro to, aby v základním dvojobrazovém zobrazení uspořádaná dvojice (A_1, A_2) *bodů* A_1, A_2 *nákresny byla obrazem bodu* A *(neležícího na přímce středů) projektivního prostoru* **P**, *jest, aby body* A_1, A_2 *ležely na téže ordinále a byly různé od hlavního bodu nákresny.*

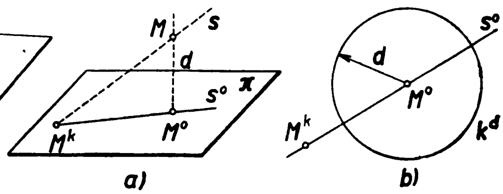
Při praktickém užití základního dvojobrazového zobrazení předpokládáme místo projektivního prostoru **P** eukleidovský prostor rozšířený případně o nevlastní body. Každé ze tří promítání může pak být středové nebo kosoúhlé



Obr. 13.



Obr. 14.



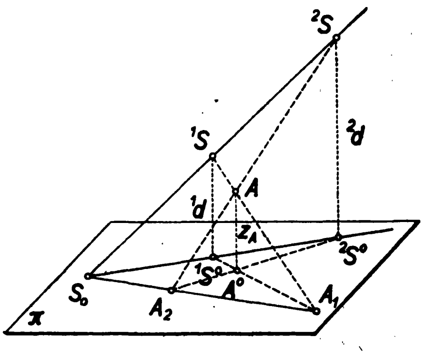
Obr. 15.

nebo pravoúhlé, takže v eukleidovském prostoru dostaneme celou řadu dvojobrazových zobrazení. Věty o vzájemné jednoznačnosti přiřazení bodů a jejich obrazů je možno odvodit z vět o dvojobrazovém zobrazení v projektivním prostoru. Jestliže připustíme nevlastní body, pak není mezi nimi žádného rozdílu; jestliže se omezíme jen na body vlastní, pak v některých případech (v nichž vystupuje středové promítání) je nutno vyjmout některé geometrické útvary prostoru ze zobrazení — dostáváme *singularity*. Příslušné věty nebudeme formulovat; jenom v přehledu uvedeme některé důležité speciální případy základního dvojobrazového zobrazení.

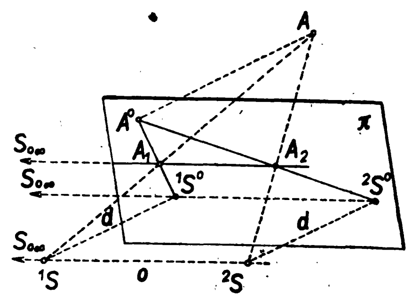
Poznamenejme, že s konstrukčního hlediska nemůžeme jen prostě říci, že je dáno středové nebo kosoúhlé promítání. Musíme pro ně dát takové údaje, abychom uměli skutečně střed promítání nebo směr kosoúhlého promítání (při dané nákresně a průmětně) v prostoru určit. Proto při středovém promítání $[S, \pi]$ předpokládáme, že známe pravoúhlý průmět S° středu S do π a vzdálenost SS°, kterou označujeme jako distanci d (obr. 14a). V nákresně (průmětně) pak S určujeme právě bodem S° a t. zv. *distanční kružnicí* o středu S° a poloměru d (obr. 14b). Pokud není výslovně řečeno jinak, předpokládáme, že střed promítání leží v kladném poloprostoru o hraniční rovině π. Při kosoúhlém promítání směr promítání určujeme nějakou kosoúhle promítací přímkou s (obr. 15a). Zvolíme na ní libovolný bod M neležící v nákresně π (obvykle však v kladném poloprostoru o hraniční rovině π), zadáme jeho kosoúhlý průmět M^k, pravoúhlý průmět M° (jest $M^k \neq M^\circ$) a vzdálenost $d = MM^\circ$ od průmětny. Z těchto údajů již můžeme basi kosoúhlého promítání skutečně v prostoru určit (obr. 15b).

a) Dvojstředové promítání na jednu průmětnu (obr. 16). Obě pomocná promítání jsou středová promítání na tutéž průmětnu, která je současně nákresnou; na volbě hlavního středu promítání nezáleží. Base jsou tedy $[{}^1S, \pi]$, $[{}^2S, \pi]$, ${}^1S \neq {}^2S$. Středy promítání obvykle leží v témže poloprostoru o hraniční rovině π.

Při praktické aplikaci tohoto zobrazení určujeme ať již graficky nebo výpočtem ze známých středů ${}^1S$, ${}^2S$ (t. j. z prvků ${}^1S^\circ$, ${}^1d$, ${}^2S^\circ$, ${}^2d$), uzlu S_0 a obrazů A_1, A_2 polohu pravoúhlého průmětu A° bodu A i jeho kótu z_A; tedy k danému obrazu (A_1, A_2) přechodem přes pravoúhlé promítání (přesně řečeno přes kótované promítání) hledáme vzor A.



Obr. 16.



Obr. 17.

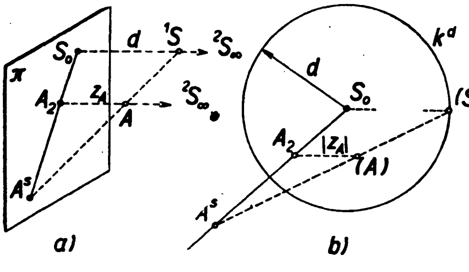
Vzhledem k tomu, že obě promítání jsou středová, uplatňuje se dvojstředové promítání v mnohých praktických oborech. Zdůrazněme zde užití v lékařství, v průmyslu a v zeměměřictví. Středy promítání zastupují nejrůznější zdroje; je možno užít i roentgenů (v lékařské praxi pro určování polohy cizích těles v těle) nebo betatronů (v lékařství pro hloubkovou therapii, v průmyslu v defektoskopii), případně i lineárních vysokofrekvenčních urychlovačů (pro therapeutické účely), nebo cyklotronů, opatřených dvěma terčíky, jež zastupují středy promítání.

b) Stereoskopické promítání (obr. 17) v podstatě opět je dvojstředovým promítáním na jednu průmětnu, avšak s doplňující podmínkou, aby oba středy promítání ležely v témže poloprostoru určeném nákresnou π a aby obě distance byly stejně veliké $d = {}^1d = {}^2d$. Jestliže ještě navíc předpokládáme, že vzdálenost o středů promítání ${}^1S$, ${}^2S$ je přibližně rovna 65 mm, což je průměrná vzdálenost očních os lidských očí, pak stereoskopické promítání odpovídá geometricky prostorovému vidění dvěma očima.

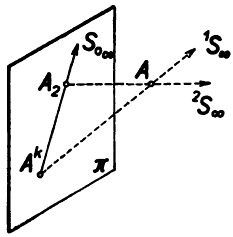
Stereoskopické průměty lze prakticky získat poměrně hodně užívaným *stereoskopickým fotoaparátem*, který má dva objektivy, jejichž optické osy jsou ve vzdálenosti $o \doteq 65$ mm. Na stereoskopické snímky je ovšem třeba se dívat tak, aby každé oko vidělo jen svůj příslušný obraz. Zobrazovaný útvar musí být tedy dosti vzdálený od nákresny (a to v opačném poloprostoru než leží středy promítání), aby obrazy se nepřekrývaly. Užitím *stereoskopů*, u nichž obrazy klademe vedle sebe, dostáváme zpětným (inversním) zobrazovacím procesem dojem prostorově viděného útvaru.

Někdy se používá t. zv. *anaglyfů*, u nichž nesnáz spojená s podmínkou, aby obrazy se nepřekrývaly, odpadá. Poloha zobrazovaného útvaru je omezena jen známými fysiologickými podmínkami vidění; útvar může ležet i před nákresnou. Oba obrazy se narýsují v doplňkových barvách (obvykle červené a zelenomodré). Na obrazy je třeba se dívat brýlemi, které mají skla v těchže barvách; na červený (zelenomodrý) průmět se díváme zelenomodrým (červeným) sklem.

Téhož principu, umožňujícímu prostorové vidění, užívá se v poslední době u t. zv. *stereoskopických filmů*. V zeměměřictví se stereoskopického zobrazení hodně používá ve *stereofotogrammetrii* k určování vzdálenosti pozorovaných



Obr. 18.


Obr. 19.

objektů od stanoviska. Nedávno byl sestrojen stereobetatron*), sloužící k současnému zaměření intensivního záření gamma odrazem od dvou terčíků ${}^1S$, ${}^2S$ na daný objekt.

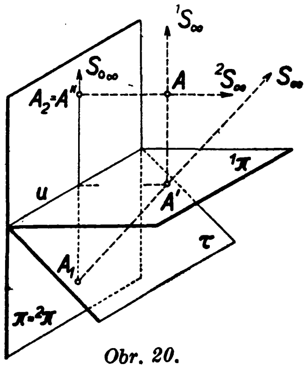
c) Perspektivní promítání distanční methodou (obr. 18). O průmětnách předpokládáme ${}^1\pi = {}^2\pi = \pi$, jedno promítání je pravoúhlé, tedy ${}^1S_\infty$ je dán směrem kolmic k nákresně π, druhé promítání je středové. I když lze v tomto promítání řešit všechny úlohy deskriptivní geometrie, samo o sobě se prakticky nepoužívá. Vyskytuje se ve vhodné kombinaci s jiným dvojobrazovým zobrazením v *lineární perspektivě*.

d) Kosoúhlé promítání na jednu průmětnu (obr. 19). V tomto zobrazení je opět $\pi = {}^1\pi = {}^2\pi$, jedno promítání je kosoúhlé a druhé pravoúhlé, tedy oba středy promítání jsou nevlastní body. Hlavní bod je nevlastní bod pravoúhlých průmětů kosoúhle promítacích přímek (nebo kosoúhlých průmětů pravoúhle promítacích přímek). Užívá se ve spojení s jiným kosoúhlým promítáním ve známém *technickém kosoúhlém promítání*.

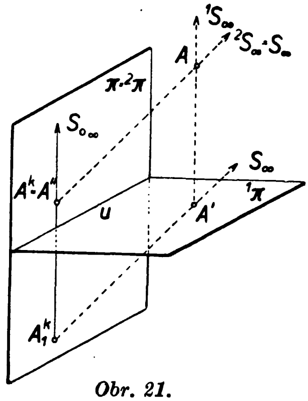
e) Pravoúhlé promítání na dvě k sobě kolmé průmětny (Mongeova projekce, obr. 20). Pomocné průmětny ${}^1\pi$ a ${}^2\pi$ volíme k sobě kolmé, pomocné středy promítání ${}^1S$ a ${}^2S$ jsou nevlastní body kolmic k pomocným průmětnám. Hlavní průmětnu π volíme totožnou s jednou pomocnou průmětnou (na př. $\pi = {}^2\pi$). Na hlavní průmětnu promítáme kosoúhle; tedy hlavní střed promítání S volíme rovněž jako nevlastní bod a to ve směru kolmém na jednu rovinu souměrnosti pomocných průměten ${}^1\pi$ a ${}^2\pi$. Zvolenou rovinu symetrie značíme τ

*) Viz tento časopis, roč. 1957, č. 3, str. 379. *Pozn. red.*

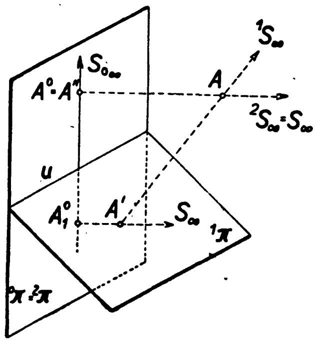
a říkáme jí *rovina totožnosti*, neboť sdružené obrazy bodů právě této roviny se ztotožňují. Protože promítání jedné roviny na druhou rovinu ve směru kolmém na jejich rovinu symetrie lze nahradit otáčením jedné roviny přes uvedenou rovinu symetrie do druhé roviny, můžeme hlavní promítání v Mongeově projekci nahradit otočením roviny ${}^1\pi$ přes rovinu τ do roviny ${}^2\pi$; říkáme, že jsme *průmětny sdružili*. Obvykle průmětny sdružíme tak, že nejprve zvolíme orientaci poloprostorů určených průmětnami ${}^1\pi$ a ${}^2\pi$ a pak otočíme ${}^1\pi$ do ${}^2\pi$ tak, aby kladná polorovina ${}^1\pi$ se ztotožnila se zápornou polorovinou ${}^2\pi$; rovina totožnosti půlí úhel 2. a 4. kvadrantu.



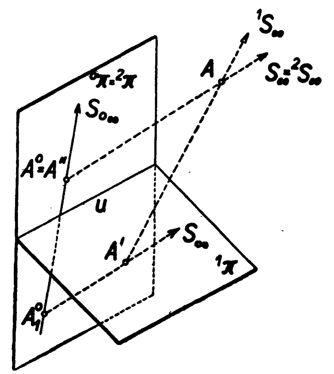
Obr. 20.



Obr. 21.



Obr. 22.

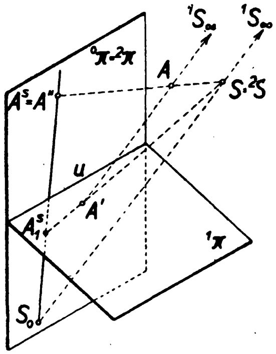


Obr. 23.

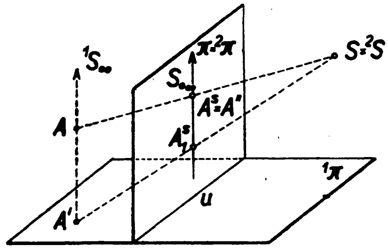
f) Kosoúhlé promítání s pomocnou průmětnou (obr. 21). Podobně jako v Mongeově projekci pomocné průmětny ${}^1\pi$ a ${}^2\pi$ volíme k sobě kolmé; nákresnu π ztotožníme s ${}^2\pi$. Na pomocnou prvou průmětnu promítáme pravoúhle, na pomocnou druhou průmětnu kosoúhle. Týž směr kosoúhlého promítání volíme také za směr hlavního promítání. Protože hlavní střed promítání S nesmí ležet v žádné pomocné průmětně, nemůžeme směr kosoúhlého promítání volit rovnoběžně s ${}^1\pi$.

g) Pravoúhlá axonometrie (obr. 22) je velmi známé a v technické praxi často užívané zobrazení. S výhodou užívá pravoúhlého souřadnicového systému v prostoru. Jejím základem je však opět jen základní dvojobrazové zobrazení. Pomocné průmětny ${}^1\pi$ a ${}^2\pi$ jsou k sobě kosé; na obě promítáme pravoúhle, pomocné středy ${}^1S$, ${}^2S$ jsou tedy nevlastní body kolmic k pomocným průmětnám. Hlavní průmětnu, kterou nazýváme *axonometrickou průmětnou* a značíme π^0, ztotožňujeme s druhou pomocnou průmětnou $\pi^0 = {}^2\pi$. Hlavní promítání je opět pravoúhlé, tedy $S_\infty = {}^2S_\infty$.

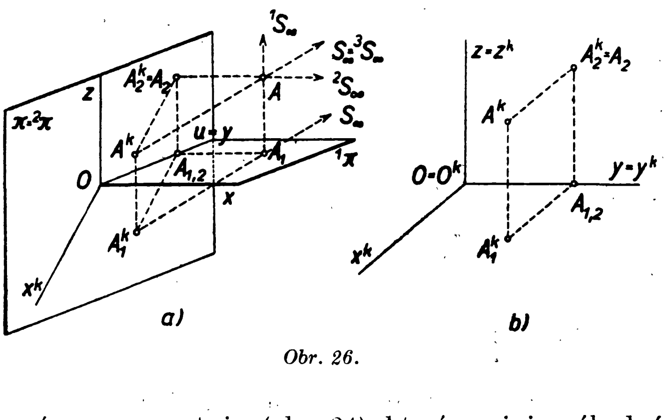
h) Kosoúhlá axonometrie (obr. 23). Také v kosoúhlé axonometrii základem je dvojobrazové zobrazení, jehož pomocné průmětny jsou k sobě kosé a hlavní axonometrická průmětna π^0 splývá s druhou pomocnou průmětnou. Prvé pomocné promítání je pravoúhlé; druhé pomocné promítání, které je na rozdíl od promítání v pravoúhlé axonometrii kosoúhlé (nikoli však rovnoběžné s prvou pomocnou průmětnou), splývá s hlavním promítáním. ($S_\infty = {}^2S_\infty$).



Obr. 24.



Obr. 25.



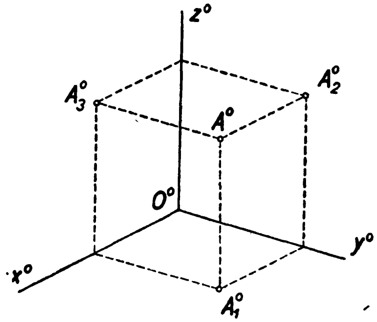
Obr. 26.

ch) Středová axonometrie (obr. 24), která spojuje výhodné vlastnosti středového promítání s přednostmi užití pravoúhlého souřadnicového systému, vychází podobně jako obě předchozí zobrazovací methody z dvojobrazového zobrazení, jehož pomocné průmětny ${}^1\pi$ a ${}^2\pi$ jsou opět k sobě kosé, první pomocné promítání je pravoúhlé a hlavní axonometrická průmětna π^0 je totožná s ${}^2\pi$. Hlavní promítání je opět totožné s druhým pomocným promítáním, které je však nyní středové (jehož střed neleží v ${}^1\pi$).

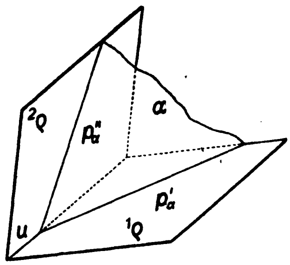
i) Středové promítání s pomocnou průmětnou (obr. 25) je v podstatě jen speciálním případem zobrazení, které je základem středové axonometrie. Liší se od něho jen tím, že pomocné průmětny jsou k sobě kolmé (${}^1\pi \perp {}^2\pi$). Hlavní průmětna π opět splývá s druhou průmětnou, $\pi = {}^2\pi$.

První pomocné promítání je pravoúhlé, kdežto druhé pomocné promítání, které je totožné s hlavním promítáním, je středové ($S = {}^2S$; S non ϵ ${}^1\pi$). Používá se, kombinováno s perspektivním promítáním distanční methodou, v lineární perspektivě.

Při skutečném užití uvedených zobrazovacích method se často pro docílení lepší názornosti nebo výhodnějších konstrukcí volí více středů promítání nebo i pomocných průměten, než je nutno. V podstatě dvojobrazové promítání, které volíme jako základní, doplňujeme některým jiným vhodným dvojobrazovým zobrazením. Známý je případ běžného *technického kosoúhlého promítání* (obr. 26), které vzniká kombinací kosoúhlého promítání s pomocnou průmětnou (str. 143) s kosoúhlým promítáním na jednu průmětnu (str. 142). V pravoúhlém souřadnicovém systému $(O; x, y, z)$ volíme ${}^1\pi = (xy)$, ${}^2\pi = (yz)$ (obr. 26a). Do těchto pomocných průměten promítáme pravoúhle užitím ${}^1S_\infty$ a ${}^2S_\infty$ (tím pro bod A najdeme obrazy A_1, A_2 a k bodu A_1 resp. A_2 obraz A_{12}). Dále do ${}^2\pi$



Obr. 27.

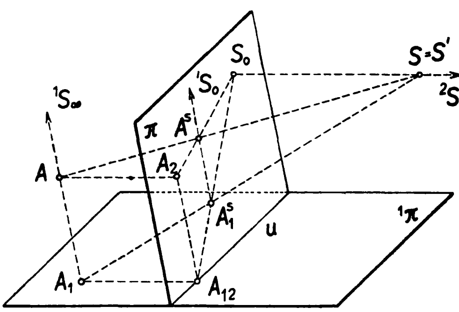


Obr. 28.

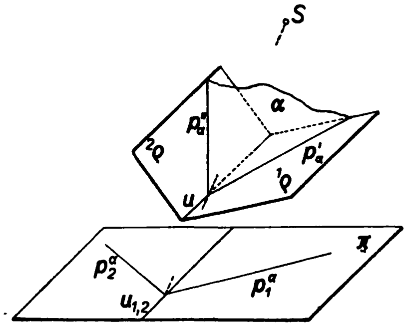
promítáme kosoúhle z ${}^3S_\infty$ (sestrojíme obraz A^k). Konečně volíme hlavní průmětnu $\pi = {}^2\pi$ a do ní promítáme z bodu $S_\infty = {}^3S_\infty$ (tím k bodům A_1, A_2, A_{12} dostaneme obrazy A_1^k, $A_2^k = A_2$, $A_{12}^k = A_{12}$). V nárysně π stanovíme obvykle body A_{12}, A_1^k, A^k v tomto pořadí, někdy i A_2, ačkoli již dvojice (A_1^k, A^k) nebo (A_2, A^k) určují jednoznačně vzor v prostoru (obr. 26b). Často i rovina (xz) se volí za novou průmětnu ${}^3\pi$; promítáme do ní pravoúhle. Podobně, chceme-li zobrazovat v axonometrii (obr. 27, kde je znázorněna *rovnoběžná axonometrie*), volíme souřadnicové roviny pravoúhlé souřadnicové soustavy za pomocné průmětny (tedy dvě nadbytečné průmětny), za axonometrickou průmětnu rovinu π^0 neprocházející počátkem O souřadnicové soustavy, kosou ke všem pomocným průmětnám. Do pomocných průměten promítáme pravoúhle; průměty pak spolu se vzorem promítáme do axonometrické průmětny pravoúhle nebo kosoúhle nebo středově podle toho, zda jsme zvolili pravoúhlou, kosoúhlou nebo středovou axonometrii. Konečně uveďme ještě *technické středové promítání* (jehož zvláštním případem je *lineární perspektiva*, obr. 28), které je složeno z perspektivního promítání distanční methodou (str. 142) a ze středového promítání s pomocnou průmětnou (str. 144). Z uvedeného je zřejmé, že základní myšlenkou kombinovaných zobrazení je vhodné využití os pravoúhlého souřadnicového systému v prostoru (t. zv. *axonometrický princip*).

Při dvojobrazovém zobrazení v projektivním prostoru **P** jsme užili promítání, které bylo složeno ze dvou lineárních operací v tomto sledu 1) spojování, 2) protínání. Kdybychom zobrazovací proces dualisovali, pak z geometrického hlediska bychom dostali novou zobrazovací methodu, rovněž lineární, složenou ze dvou operací v tomto pořádku 1) protínání, 2) spojování. Sledujeme-li však jako cíl získání rovinných obrazů prostorových útvarů, pak jako novou zobrazovací methodu v projektivním prostoru **P** můžeme vzít již prvou operaci *protínání* (rovin a přímek) pevně zvolenou rovinou ϱ, kterou nazýváme *stopní rovinou*. Zobrazení nazýváme *stopním zobrazením*; je to lineární zobrazení. Snadno si ověříme, že stopní zobrazení je zobrazením množiny $\mathbf{M} = \mathbf{P} - \varrho$, jejíž prvky jsou roviny, na množinu $\mathbf{M}' = \varrho$, jejíž prvky jsou přímky; stopní zobrazení není prostým zobrazením. Obraz roviny (přímky) nazýváme *stopou* (*stopníkem*) roviny (přímky); stopní rovina je při zobrazení *singulární*.

Abychom dosáhli prostého zobrazení, volíme dvě stopní zobrazení o různých stopních rovinách ${}^1\varrho$, ${}^2\varrho$; jejich průsečnice nechť je u (obr. 29). Stopy roviny α ($\neq {}^1\varrho, {}^2\varrho$) na rovinách ${}^1\varrho$, ${}^2\varrho$ označíme postupně p'_α, p''_α.



Obr. 29.



Obr. 30.

Dvojí stopní zobrazení v projektivním prostoru **P** *je prosté zobrazení množiny* $\mathbf{M} = \mathbf{P} - u$, *jejíž prvky jsou roviny* α *neprocházející průsečnicí* u *stopních rovin, na množinu* $\mathbf{M}' = {}^1\varrho \cup {}^2\varrho - u$, *jejíž prvky jsou dvojice* (p'_α, p''_α) *přímek* p'_α, p''_α, *protínajících se na průsečnici* u *a od ní různých* ($p'_\alpha \in {}^1\varrho$, $p''_\alpha \in {}^2\varrho$).

Nevýhodné zobrazování do dvou různých rovin odstraníme podobně jako u dvojobrazového zobrazení promítáním obrazů v ${}^1\varrho$, ${}^2\varrho$ do jedné nákresny. Basi $[S, \pi]$ promítání volíme tak, aby S neležel ve stopních rovinách. Zobrazení pak nazýváme *dvojstopní zobrazení* (obr. 30). Obrazu průsečnice $u = {}^1\varrho \,.\, \varrho^2$ říkáme *základnice*.

Dvojstopní zobrazení o stopních rovinách ${}^1\varrho$, ${}^2\varrho$ *a basi* $[S, \pi]$ *v projektivním prostoru* **P** *je prosté zobrazení množiny* $\mathbf{M} = \mathbf{P} - u$, *jejíž prvky jsou roviny* α *neprocházející průsečnicí* u, *na množinu* $\mathbf{M}^* = \pi - u_1$, *jejíž prvky jsou uspořádané dvojice* (p_1^α, p_2^α) *přímek* p_1^α, p_2^α, *různých od základnice, majících společný bod na základnici.*

V eukleidovském prostoru můžeme dostat různé případy dvojstopního zobrazení. Nejužívanější je případ ${}^1\varrho \parallel {}^2\varrho$, $\pi = {}^1\varrho$ a kdy promítání je rovnoběžné (ať již pravoúhlé nebo kosoúhlé). Jednou stopní rovinou je tedy nákresna, druhá stopní rovina se nazývá *distanční rovina*.

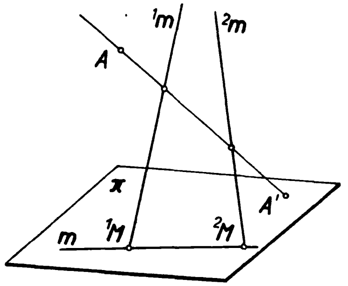
Dvojobrazové a dvojstopní zobrazení se velmi často vhodně doplňují. V Mongeově promítání užíváme pomocných průměten jako stopních rovin. Při středovém promítání volíme (jak pro zobrazování rovin tak i zobrazování přímek) za jednu stopní rovinu nákresnu, za druhou stopní rovinu nevlastní rovinu rozšířeného eukleidovského prostoru.

4. Některé jiné zobrazovací methody

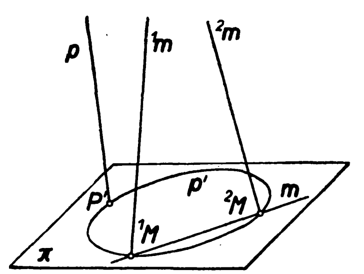
Lineární zobrazovací methody jsou v praktické deskriptivní geometrii sice nejužívanější, ale zdaleka nejsou to všechna užívaná zobrazení. Uvedeme ještě alespoň ukázkou některé jiné zobrazovací methody, které ukáží, jak důležité a současně výhodné je studovat vlastnosti geometrických útvarů užitím prostého zobrazení.

Nejprve uvedeme některá zobrazení eukleidovského prostoru na rovinu.

a) Cyklografické promítání. Jeho princip jsme vysvětlili již dříve (str. 23, č. 1). Nyní jen zdůrazněme, že cyklografické promítání je vzájemně jednoznačné zobrazení eukleidovského prostoru na eukleidovskou rovinu; přitom prvky prostoru jsou jeho body, prvky v průmětně cykly, t. j. buď orientované kružnice se středem nebo body (obr. 1). Cyklografické promítání nese plným právem název promítání. Předně střed cyklu je pravoúhlým průmětem bodu prostoru. Za druhé kružnice, jež je nositelkou cyklu zobrazujícího bod, který



Obr. 31.



Obr. 32.

neleží v průmětně, je stopou rotační kuželové plochy, mající vrchol v zobrazovaném bodě a vrcholový úhel pravý. V prostoru rozšířeném o nevlastní body všechny tyto kuželové plochy procházejí touž nevlastní kružnicí k_∞. Tedy nositelky cyklů jsou průmětny (vlastních) bodů prostoru z nevlastní kružnice k_∞. Cyklografické promítání není ovšem lineární. Veliké uplatnění, zvláště v poslední době, má v krystalografii.**)

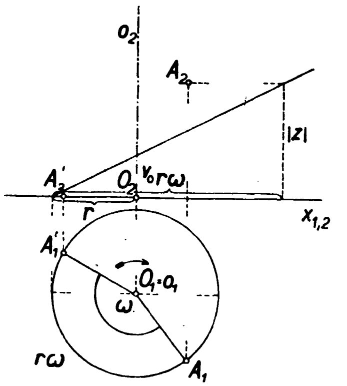
b) Síťové promítání. V podstatě je při něm použito lineární kongruence přímek, t. j. souhrnu všech přímek protínajících dvě dané přímky, *řídicí přímky kongruence*, o nichž budeme pro jednoduchost předpokládat, že jsou to (reálné) mimoběžky. Za basi síťového promítání v projektivním prostoru **P** zvolíme tedy dvě mimoběžky ^1m, ^2m jako řídicí přímky lineární kongruence a průmětnu π, protínající obě mimoběžky (obr. 31). Zobrazení se skládá ze dvou operací v tomto pořádku: 1) vedení příčky mimoběžek ^1m, ^2m daným bodem (t. j. sestrojení *promítací přímky* bodu), 2) protínání příčky rovinou π (t. j. sestrojení *průmětu* bodu). Odtud je patrno, že přímky ^1m, ^2m a $m = {}^1M{}^2M$, kde ^1M (^2M) je průsečík ^1m (^2m) s průmětnou π, jsou *singulární přímky* zobrazení. Pro bod přímek ^1m, ^2m není jednoznačná prvá operace, pro bod přímky m neexistuje řešení druhé operace. V každém jiném případě bod A prostoru **P**

**) Viz na př. S. A. Kasjanjuk, *O interpretaci ak. J. S. Fedorova trojrozměrného eukleidovského prostoru*, v tomto čas. roč. 1957, č. 3. *Pozn. red.*

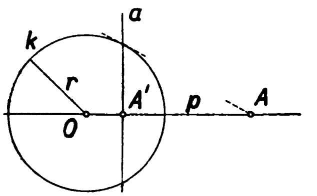
se zobrazí do bodu A' roviny π. *Je tedy síťové promítání zobrazením množiny* $\mathbf{M} = \mathbf{P} - {}^1m - {}^2m - m$, *jejíž prvky jsou body, na množinu* $\mathbf{M}' = \pi - m$, *jejíž prvky jsou rovněž body*; zobrazení není prosté.

Jestliže nežádáme, aby obrazem bodu byl vždy opět bod, pak síťové promítání můžeme rozšířit i na body přímek m, ${}^1m$, ${}^2m$. Bodem řídicí přímky kongruence prochází nekonečně mnoho přímek kongruence, jež všechny leží v rovině určené zvoleným bodem a druhou řídicí přímkou. Její průsečnici s π prohlásíme za obraz daného bodu. Za obraz bodu ležícího na m můžeme vzít přímku m. *Síťové promítání je tedy také zobrazením prostoru* $\mathbf{P}$, *jehož prvky jsou body, na rovinu* π, *jejímiž prvky jsou jednak body, jednak přímky svazků přímek o středech* ${}^1M$ *a* ${}^2M$. Ani toto zobrazení není prosté. Není také lineární, t. j. obrazem přímky p není přímka; ukážeme, že jejím obrazem je kuželosečka p'.

Předpokládejme, že daná přímka p je mimoběžná jednak s řídicími přímkami ${}^1m$, ${}^2m$, jednak s přímkou m (obr. 32). Z prvé podmínky plyne, že promítací přímky bodů přímky p leží na zborcené kvadrice $\varkappa$ určené mimoběžkami p, ${}^1m$, ${}^2m$, kterou průmětna π protíná v kuželosečce p' procházející body ${}^1M$, ${}^2M$. Z druhé podmínky plyne, že π není tečnou rovinou kvadriky $\varkappa$ a tedy kuželo-



Obr. 33.



Obr. 34.

sečka p' je jednoduchá. Protože obráceně jednoduchou kuželosečkou p' a dvěma mimoběžkami ${}^1m$, ${}^2m$, které protínají rovinu π kuželosečky p' v různých bodech kuželosečky, je určena zborcená kvadrika, plyne odtud:

Síťové promítání o řídicích přímkách ${}^1m$, ${}^2m$ *je zobrazením množiny přímek* p *projektivního prostoru* $\mathbf{P}$, *jež neprotínají přímky* m, ${}^1m$, ${}^2m$, *na množinu jednoduchých kuželoseček* p' *roviny* π *procházejících body* ${}^1M$, ${}^2M$.

Zobrazení není prosté, neboť táž kuželosečka je obrazem každé jiné přímky (různé od ${}^1m$, ${}^2m$) téhož regulu, k němuž náleží p. Jestliže však k obrazu p' přímky p připojíme ještě stopník P' přímky p (leží vždy na p' a je různý od ${}^1M$, ${}^2M$), tedy jestliže za obraz přímky p prohlásíme kuželosečku p' s bodem P', pak také obrazem (p', P') je jednoznačně určen vzor a tedy platí:

Síťové promítání je prosté zobrazení množiny přímek p *projektivního prostoru* $\mathbf{P}$, *které neprotínají přímky* m, ${}^1m$, ${}^2m$, *na množinu jednoduchých kuželoseček* p' *(procházejících body* ${}^1M$, ${}^2M$*) s bodem* P' *(různým od* ${}^1M$, ${}^2M$*)*.

Poznamenejme, že obě množiny jak vzorů tak i obrazů závisí na čtyřech parametrech; jde tedy o vzájemně jednoznačné zobrazení dvou čtyřrozměrných prostorů na sebe.

c) Šroubové promítání. Šroubový pohyb v prostoru (eukleidovském) je určen osou, redukovanou výškou závitu $v_0 > 0$ (t. j. posunutím, jež přísluší otočení o radiant) a údajem, zda je pravotočivý nebo levotočivý. Při šroubovém pohybu každý bod A prostoru vytvoří šroubovici; její průsečík s rovinou π kolmou k ose šroubového pohybu prohlásíme za *šroubový průmět* A' bodu A. Při *šroubovém promítání* tedy protínáme šroubovice daného pohybu pevnou rovinou kolmou k ose šroubového pohybu. *Šroubové promítání je zobrazením eukleidovského prostoru*, jehož prvky jsou body, *na eukleidovskou rovinu* π, jejíž prvky jsou opět body. Obraz každého bodu osy šroubového pohybu je její průsečík s π. Při konstrukci obrazu A' bodu A, který neleží na ose (obr. 33), nezobrazujeme obvykle šroubovici bodu A, nýbrž použijeme vhodně posunutí a otočení, z něhož lze daný šroubový pohyb složit. Platí totiž $z = v_0\omega$, kde z je orientovaná vzdálenost bodu A od průmětny π a ω úhel otočení příslušný stoupnutí z při daném šroubovém pohybu. Je-li tedy dán šroubový pohyb (v obr. 33 pohyb je pravotočivý) a bod A, určíme z úměry $r\omega : z = r : v_0$ přímo oblouk $r\omega$, o který se musí otočit pravoúhlý průmět A_1 bodu A do π, aby přešel do bodu A'.

Šroubové promítání není prosté zobrazení, protože všechny body téže šroubovice mají týž obraz. Abychom docílili jednoznačnosti i v opačném směru, je třeba připojit nějakou vhodnou podmínku pro bod A. Jestliže k šroubovému průmětu připojíme ještě kótu daného bodu, dostáváme t. zv. *kótované šroubové promítání*, které *je prostým zobrazením eukleidovského prostoru*, jehož prvky jsou body A, na *množinu uspořádaných dvojic* (A', z_A), kde A' je bod průmětny a z_A reálné číslo. Jiné *dvojobrazové šroubové zobrazení* získáme, jestliže se omezíme na polootevřenou vrstvu $\mathbf{V}$ prostoru, jejíž šířka je rovna výšce závitu a jejíž hraniční roviny (z nichž právě jednu k vrstvě nepočítáme) jsou kolmé k ose šroubového pohybu. K šroubovému průmětu A' bodu A připojíme jeho pravoúhlý průmět A_1 do průmětny π, který s bodem A' leží na téže kružnici o středu v průsečíku $O = o \,.\, \pi$. Protože pro body osy ani takto nedosáhneme jednoznačnosti v obou směrech, vyjmeme ji ze zobrazení. *Je tedy dvojobrazové šroubové promítání prostým zobrazením množiny* $\mathbf{M} = \mathbf{V} - o \cap \mathbf{V}$, jejíž prvky jsou body A, *na množinu* $\mathbf{M}' = \pi - O$, jejíž prvky jsou uspořádané dvojice (A', A_1) bodů A', A_1 ležících na téže kružnici o středu O.

Všechna dosud uvedená zobrazení v podstatě patří do klasického oboru deskriptivní geometrie, neboť zobrazují prostor na rovinu. Uvážíme-li, že v trojrozměrném prostoru existují také jednorozměrné útvary a kromě roviny i jiné dvojrozměrné útvary, pak je patrno, že už geometrie trojrozměrného prostoru dává bohaté možnosti studia dalších zobrazení a to zobrazení jednorozměrných útvarů do jiných jednorozměrných útvarů, dvojrozměrných do dvojrozměrných, ale také zobrazení prostoru na sebe a na jeho pravou část. Většinou přitom neužíváme jen synthetických method; velice často je nahrazujeme nebo doplňujeme vhodnějšími analytickými methodami. Alespoň stručně se zmíníme o některých známých případech, hlavně proto, abychom zdůraznili, že mnohdy celé partie geometrie nejsou nic jiného než podrobným studiem jistých zobrazení.

d) Projektivní geometrie jednoparametrických útvarů. Základem této známé partie geometrie je studium velmi speciální korespondence mezi přímými bodovými řadami, svazky přímek a svazky rovin — *projektivity*. Rozumíme tím algebraickou lineární korespondenci mezi uvedenými jednoparametrickými útvary; její charakteristickou vlastností je, že zachovává dvojpoměr.

e) Projektivní geometrie dvojparametrických útvarů. Také tato část geometrie je velmi dobře známá a proto jen připomeneme, že některé korespondence, které se probírají na střední škole, jako je posunutí, otáčení a stejnolehlost, ale také i osová afinita a středová kolineace v rovině, jsou speciální afinní typy této projektivity. Přitom jak osová afinita, tak zejména středová kolineace jsou přímo ukázkou toho, jak je možno výhodně použít korespondence ke studiu resp. konstrukci jedné skupiny křivek (kuželoseček) pomocí jiné skupiny křivek (kružnic).

f) Cremonovy transformace v rovině. Jsou to algebraická zobrazení (biracionální transformace) roviny na rovinu, v níž přímce obecně odpovídá křivka k-tého ($k \geqq 2$) stupně. Nejznámější z nich jsou *kvadratické transformace*, mezi něž patří i často užívaná *kruhová inverse*, kterou můžeme definovat takto (obr. 34). V eukleidovské rovině π je dána pevná (základní) kružnice k o středu O (střed inverse) a poloměru r (poloměr inverse). K bodu $A \neq O$ sestrojíme jeho inversní obraz A', jestliže 1) najdeme poláru a bodu A vzhledem k základní kružnici k, 2) sestrojíme spojnici $p = OA$, 3) najdeme průsečík $A' = p \,.\, a$. Protože pro každý bod — s výjimkou středu inverse, který je pro zobrazení singulární — každá z těchto operací je jednoznačná, je kruhová inverse zobrazením množiny $\mathbf{M} = \pi - O$, jejíž prvky jsou body, na množinu $\mathbf{M}' = \mathbf{M}$, jejíž prvky jsou opět body; zobrazení je prosté.

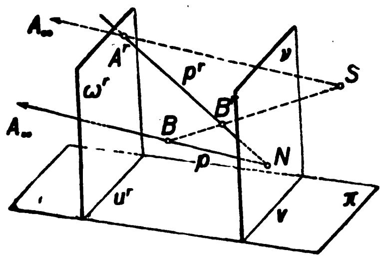
g) Konformní zobrazení roviny na rovinu definujeme jako bodovou transformaci (zobrazení, v němž bodu odpovídá bod), která zachovává úhel křivek. Jednoduchým příkladem je posunutí v rovině, ale na př. i kruhová inverse v rovině je konformním zobrazením.

h) Rozvinutí ploch do roviny. Definujeme je jako bodovou transformaci, která zachovává 1) velikost oblouků, 2) velikost úhlů. Aby bylo možno rozvinout plochu do roviny, k tomu je nutné a stačí, aby plocha byla rozvinutelná, t. j. aby byla buď válcovou nebo kuželovou plochou nebo plochou tečen prostorové křivky. Na př. rozvinutí rotační válcové plochy poloměru r do roviny je prosté zobrazení válcové plochy na polootevřený pás šířky $2\pi r$.

i) Perspektivní projekce kulové plochy do roviny. V podstatě je to indukované zobrazení, neboť jak již název naznačuje, jeho základem je promítání prostoru na rovinu, při čemž si všímáme zobrazení jen jednoho geometrického útvaru prostoru — kulové plochy. Rozhodující je poloha base promítání vzhledem ke kulové ploše. Je-li promítání pravoúhlé, mluvíme o *orthografickém průmětu*; je-li střed promítání bodem kulové plochy a průmětna prochází středem kulové plochy rovnoběžně s tečnou rovinou kulové plochy ve středu promítání, dostáváme *stereografický průmět*; jestliže konečně střed promítání splyne se středem kulové plochy, obraz se nazývá *gnómický průmět*. Abychom mohli mluvit o prostém zobrazení, pak při orthografickém promítání se omezujeme jen na polokouli (přesněji řečeno na polokulovou plochu, omezenou hlavní kružnicí rovnoběžnou s průmětnou), při stereografickém promítání ze zobrazení musíme vyloučit střed promítání a při gnómickém promítání volíme polokouli, jejíž hraniční hlavní kružnice je rovnoběžná s průmětnou, při čemž hranici k polokouli nepočítáme.

V kartografii každá z perspektivních projekcí kulové plochy může být ještě trojího druhu: jestliže průmětna π je kolmá k polární ose, průmět se nazývá *polární*, je-li s ní rovnoběžná, *rovníkový*, ve všech ostatních případech *horizontální*. Tato specialisace není však s geometrického hlediska zobrazení nijak podstatná.

j) Středový relief je v podstatě středovou kolineací v eukleidovském prostoru rozšířeném o nevlastní body. Je-li středová kolineace určená středem S, samodružnou rovinou ν a úběžnicovou rovinou ω^r (obr. 35), pak obraz A^r (relief) nevlastního bodu A_∞ je průsečík promítací přímky AS s ω^r. Středu S, samodružné roviny ν a páru odpovídajících si bodů A_∞, A^r (za předpokladu, že A_∞ neleží v ν) je již možno použít k sestrojení reliefu libovolného dalšího bodu (v obr. 35 je nalezen relief B^r bodu B). Ze známých vlastností středové kolineace v prostoru bezprostředně plyne, že středový relief je prostým bodovým zobrazením prostoru na prostor. Protože o základních elementech S, ν, ω^r středové kolineace, jež je podkladem středového reliefu, předpokládáme, že jsou vlastní a že S a ω^r leží v opačných poloprostorech určených samodružnou rovinou ν, je patrno, že středový relief je také prostým bodovým zobrazením poloprostoru opačného k νS na prostorovou vrstvu o hraničních rovinách ν, ω^r.



Obr. 35.

Poznamenejme, že při skutečném sestrojování reliefu se ovšem konstrukce převzaté ze středové kolineace s výhodou doplňují pravoúhlým promítáním jednak na samodružnou rovinu ν, jednak na základní (*nosnou*) rovinu reliefu $\pi \perp \nu$, volenou tak, aby neprocházela středem S.

Jestliže místo středové kolineace volíme afinitu (se základní rovinou), dostáváme prosté zobrazení (eukleidovského) prostoru na sebe, kterému říkáme *rovnoběžný relief* (pravoúhlý nebo kosoúhlý).

V praxi se nejčastěji používá pravoúhlého reliefu (mince, medaile, reliefy na pamětných deskách, plastické mapy).

5. Závěr

Deskriptivní geometrie daleko více než jiná odvětví geometrie nalézá zejména po konstruktivní stránce bezprostřední, často i rozsáhlé upotřebení v technické praxi. Každý technik, pracující v konstrukci, musí se seznámit s jejími základy, s některými nejjednoduššími a běžně užívanými zobrazovacími methodami. Praktické cíle v průměru nebývají však vždy příliš vysoké. Pro obvyklé technické užití je většinou třeba znalostí základních, zejména názorných zobrazovacích principů, jednoduchých vět o zobrazování bodů, přímek a rovin, kuželoseček a rotačních kvadrik a ovšem řešení základních úloh polohy a metrických. Vedoucí technik v konstrukci, inženýr při svých náročnějších úkolech se setkává s aplikacemi, které zhusta vyžadují četné další a současně i hlubší, někdy hodně speciální znalosti deskriptivní geometrie (rozvinutelné a zborcené plochy, kvadratické plochy, rotační a šroubové plochy atd.). Jako celek zabírá však obvykle užívaná deskriptivní geometrie celkem neměnný standartní rozsah, který pro geometra-specialistu není (v porovnání s jinými matematickými disciplinami) příliš náročný. Spolu se zdůrazněním konstrukčně-grafické stránky vět potřebných pro aplikace vedlo to a někdy ještě vede k názoru, že deskriptivní geometrie je sice velmi potřebná jako geometrická disciplina, zvyšující konstrukčně-technickou úroveň, ale jako vědní obor je celkem uzavřená. Je snad zbytečné zdůrazňovat, že vlastní rozsah deskriptivní geometrie je podstatně širší. Její program je možno stručně označit jako studium křivek a ploch s hlediska zobrazovacích method. Nestuduje je však jako dříve jen synthetickými methodami; pracuje převážně analyticky, užívajíc bohatě i method jiných odvětví geometrie zejména algebraické a diferenciální geometrie. Přitom podstatným znakem dnešní deskriptivní geometrie je, že se nespokojuje jen obvyklými názornými zobrazovacími methodami, nýbrž využívá jak podnětů ryze geometrických, tak také podnětů přicházejících z jiných vědních disciplin, jako mechaniky, krystalografie, kartografie a pod., aby studovala obecnější zobrazovací methody, které by umožnily na obrazech přehledněji a zvláště pro požadované účele pohodlněji než pomocí originálů zkoumat vlastnosti a vzájemné vztahy geometrických objektů jak elementárních, tak také křivek a ploch.