Karel Šindelář
Kvadratické plochy

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 4 (1959), No. 3, 289--301

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/137370

KVADRATICKÉ PLOCHY

DR. KAREL ŠINDELÁŘ

Obdobně jako při zkoumání kuželoseček v rovině[1]) mějme nyní dánu v rozšířeném reálném prostoru afinní reálnou soustavu souřadnic s reálným počátkem O a se třemi nekomplanárními, ale jinak zcela libovolnými reálnými vektory $\mathbf{J}_1, \mathbf{J}_2, \mathbf{J}_3$, jednotkovými vektory této afinní soustavy souřadnic.

Kvadratická funkce bodu $P\,[x, y, z]$ v prostoru je vytvořena kvadratickým mnohočlenem

$$F(x, y, z) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 + \\ + 2b_1x + 2b_2y + 2b_3z + c\,, \tag{44}$$

v němž aspoň jeden z koeficientů u kvadratických členů nevymizí, tedy aspoň jedno z čísel $a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_{13}, a_{23}, a_{33}$ není rovno nule.

Definice 20. *Kvadratická plocha (kvadrika, plocha druhého stupně) je množina všech bodů* $[x, y, z]$ *v prostoru, jimž daný kvadratický mnohočlen* (44) *přiřazuje číslo nula.*

Rovnice této kvadriky pak je

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 + \\ + 2b_1x + 2b_2y + 2b_3z + c = 0\,, \tag{45}$$

nebo libovolná rovnice, jež je s ní ekvivalentní.

Transformací soustavy afinních souřadnic v prostoru se mohou změnit její koeficienty, nikoli však její stupeň, tedy rovnice kvadriky je v libovolné soustavě souřadnic kvadratická.

Adjungované (přidružené) mnohočleny ke kvadratickému mnohočlenu (4) mají tvar

$$\begin{aligned} F_1(x, y, z) &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + b_1\,,\\ F_2(x, y, z) &= a_{12}x + a_{22}y + a_{23}z + b_2\,,\\ F_3(x, y, z) &= a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z + b_3\,,\\ F_4(x, y, z) &= b_1\,x + b_2\,y + b_3\,z + c\,, \end{aligned} \tag{46}$$

a tak jako u kuželoseček pro ně platí identická rovnice

$$F(x, y, z) = xF_1(x, y, z) + yF_2(x, y, z) + zF_3(x, y, z) + F_4(x, y, z) \tag{47}$$

a dále

$$\xi F_1(x, y, z) + \eta F_2(x, y, z) + \zeta F_3(x, y, z) + F_4(x, y, z) = xF_1(\xi, \eta, \zeta) + \\ + yF_2(\xi, \eta, \zeta) + zF_3(\xi, \eta, \zeta) + F_4(\xi, \eta, \zeta)\,. \tag{48}$$

Pro stručnost budeme výrazy (48) značit opět buď $F(x, y, z; \xi, \eta, \zeta)$ nebo $F(\xi, \eta, \zeta; x, y, z)$.

Definice 21. *Bod* $P\,[x, y, z]$, *jehož souřadnice splňují rovnice*

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + b_1 &= 0\,,\\ a_{12}x + a_{22}y + a_{23}z + b_2 &= 0\,,\\ a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z + b_3 &= 0\,,\\ b_1x + b_2y + b_3z + c &= 0\,, \end{aligned} \tag{49}$$

[1]) Viz K. Šindelář, *Kuželosečky*, v tomto časopise, IV, 1959, č. 2.

se nazývá singulární bod kvadriky (45). *Směr vektoru* $\mathbf{V}(v_1, v_2, v_3)$, *o jehož souřadnicích platí*

$$\begin{aligned} a_{11}v_1 &+ a_{12}v_2 + a_{13}v_3 = 0\,, \\ a_{12}v_1 &+ a_{22}v_2 + a_{23}v_3 = 0\,, \\ a_{13}v_1 &+ a_{23}v_2 + a_{33}v_3 = 0\,, \\ b_1v_1 &+ b_2v_2 + b_3v_3 = 0\,, \end{aligned} \tag{50}$$

je singulární směr kvadriky (45) *a* $\mathbf{V}$ *je její singulární vektor.*

Je zřejmé, že každý singulární bod kvadriky je jejím bodem, nikoli však naopak.

Definice 22. *Bod kvadriky, který není jejím bodem singulárním, se nazývá regulární bod kvadriky.*

Definice 23. *Kvadrika, která má aspoň jeden singulární bod nebo směr, se nazývá singulární; každá jiná kvadrika se nazývá regulární.*

Diskriminant mnohočlenu (44) je determinant čtvrtého stupně

$$A = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & b_1 \\ a_{12}, & a_{22}, & a_{23}, & b_2 \\ a_{13}, & a_{23}, & a_{33}, & b_3 \\ b_1, & b_2, & b_3, & c \end{vmatrix} \tag{51}$$

a platí o něm

věta 26. *Kvadrika* (45) *je singulární právě tehdy, je-li diskriminant* (51) *mnohočlenu* (44) *rovný nule; jinak je regulární.*

Důkaz: Je-li determinant (51) rovný nule, je hodnost h' rozšířené matice soustavy rovnic (49) nejvýše tři. Je-li h hodnost nerozšířené matice této soustavy, mohou nastat tyto případy:

a) $h = 1$, $h' = 1$; 2) $h = 2$, $h' = 2$; 3) $h = 3$, $h' = 3$; 4) $h = 1$, $h' = 2$; 5) $h = 2$, $h' = 3$.

V prvních třech případech má soustava (49) řešení, takže kvadrika (45) má aspoň jeden singulární bod; v prvním případě dokonce celou rovinu singulárních bodů, ve druhém případě celou přímku singulárních bodů — průsečnici dvou rovin, jejichž rovnice ze soustavy (49) jsou lineárně nezávislé.

V prvním, druhém, čtvrtém a pátém případě má soustava rovnic (50) nenulové řešení, takže kvadrika (45) má singulární směr; v prvním a ve čtvrtém případě dokonce celé zaměření singulárních směrů.

Je-li determinant (51) různý od nuly, je $h' = 4$, $h = 3$, takže kvadrika (45) je regulární.

Definice 24. *Hodností kvadriky* (45) *nazýváme hodnost diskriminantu* (51) *mnohočlenu* (44).

Věta 27. *Regulární kvadrika má hodnost 4, singulární má hodnost 3, 2 nebo 1. Má-li hodnost 3, buď má jediný singulární bod nebo jediný singulární směr, má-li hodnost 2, má buď celou přímku singulárních bodů a jeden singulární směr (směr této přímky) nebo celé zaměření singulárních směrů. Má-li konečně hodnost 1, má celou rovinu singulárních bodů a celé zaměření singulárních směrů (zaměření této roviny).*

Důkaz plyne z důkazu věty 26.

Podobně jako kuželosečky rozdělujeme i kvadriky.

Definice 25. *Kvadrika se nazývá formálně reálná, lze-li ji vyjádřit rovnicí tvaru* (45) *se samými reálnými koeficienty; jinak se nazývá formálně imaginární.*

Definice 26. *Formálně reálná kvadrika se nazývá bodově reálná, obsahuje-li aspoň jeden regulární reálný bod; jinak se nazývá bodově imaginární.*

Zkoumejme dále, jaký útvar vyplňují společné body dané kvadratické plochy a roviny; o tom platí

Věta 28. *Rovina, jež neleží celá na kvadrice, má s kvadrikou společnou buď kuželosečku (která může být i singulární), nebo přímku, nebo nemá s kvadrikou společný žádný bod. Rovina, která má s kvadrikou více společných bodů než všechny body nějaké kuželosečky, leží celá na kvadrice. Kvadrika se pak skládá ještě z další roviny, buď jiné nebo totožné s první rovinou.*

Důkaz: Zvolme soustavu souřadnic tak, aby zkoumaná rovina byla rovinou os souřadnic x a y, takže její rovnice zní

$$z = 0\,. \tag{52}$$

Rovnice průseku této roviny s kvadrikou pak zní

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2b_1x + 2b_2y + c = 0\,. \tag{53}$$

Je-li aspoň jeden z koeficientů a_{11}, a_{12}, a_{22} různý od nuly, je průsekem kuželosečka regulární nebo singulární; jsou-li všechny tři uvedené koeficienty rovny nule, ale aspoň jeden z koeficientů b_1, b_2 nenulový, je průsekem přímka; je-li konečně všech pět těchto koeficientů rovno nule, ale c různé od nuly, nemá kvadrika s rovinou společný žádný bod. A je-li konečně kromě všech pěti nulových koeficientů i absolutní člen c rovný nule, leží všechny body roviny na kvadrice, rovina je součástí kvadriky. Potom lze však rovnici kvadriky napsat ve tvaru

$$2a_{13}yz + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 + 2b_3z = 0\,, \tag{54}$$

takže je složena ze dvou rovin, a to z roviny (52) a z roviny

$$2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33}z + 2b_3 = 0\,. \tag{55}$$

Definice 27. *Kvadrika, jež se skládá ze dvou rovin, ať již různých nebo splývajících, se nazývá (složená) rozložitelná; ostatní kvadriky se nazývají (jednoduché) nerozložitelné.*

Poznámka: Na rozdíl od kuželoseček nejsou všechny singulární kvadriky rozložitelné. Ale rozložitelnost kvadrik úzce souvisí s jejich hodností.

O společných bodech kvadriky a přímky platí věta, jež je obdobou věty 3:

Věta 29. *Přímka, jež neleží celá na kvadrice, má s kvadrikou společné buď dva body, nebo jeden bod, nebo nemá s kvadrikou společný žádný bod. Přímka, jež má s kvadrikou více různých společných bodů než dva, leží celá na kvadrice.*

Důkaz: Zvolíme-li si na dané přímce dva body $\Pi(\xi, \eta, \zeta)$ a $P_0[x_0, y_0, z_0]$, lze každý bod $P[x, y, z]$ této přímky vyjádřit ve tvaru

$$x = \frac{x_0 - \lambda\xi}{1 - \lambda}\,, \quad y = \frac{y_0 - \lambda\eta}{1 - \lambda}\,, \quad z = \frac{z_0 - \lambda\zeta}{1 - \lambda}\,, \tag{56}$$

kromě bodu Π, a naopak každé hodnotě $\lambda \neq 1$ odpovídá nějaký bod přímky.

Společné body této přímky s kvadrikou (45) určíme, když rozřešíme rovnici, která vznikne dosazením výrazů (56) do rovnice (45); tato rovnice po úpravě nabude tvaru

$$F(\xi, \eta, \zeta) \,.\, \lambda^2 - 2F(\xi, \eta, \zeta; x_0, y_0, z_0) \,.\, \lambda + F(x_0, y_0, z_0) = 0\,, \tag{57}$$

obdobného rovnici (15). Další úvahy jsou již zcela obdobné těm, jež jsme prováděli u kuželoseček.

Rovněž následující definice je obdobná definici 9:

Definice 28. *Směr vektoru* $\mathbf{V}(v_1, v_2, v_3)$, *jehož souřadnice jsou vázány rovnicí*

$$a_{11}v_1^2 + 2a_{12}v_1v_2 + a_{22}v_2^2 + 2a_{13}v_1v_3 + 2a_{23}v_2v_3 + a_{33}v_3^2 = 0, \tag{58}$$

se nazývá asymptotický směr kvadriky (45).

Věta 30. *Přímka, jež neleží celá na kvadrice* (45), *má s touto kvadrikou společný nejvýše jeden bod odpovídající jednoduchému kořenu* λ *rovnice* (57) *právě tehdy, když má asymptotický směr kvadriky.*

Důkaz je zcela obdobný důkazu věty 4.

Definice 29. *Přímka, která nemá s kvadrikou společný žádný bod, se nazývá asymptota kvadriky.*

Věta 31. *Asymptota kvadriky má vždy její asymptotický směr, ale každá přímka asymptotického směru kvadriky není její asymptotou.*

Důkaz plyne z definice asymptoty a asymptotického směru kvadriky.

Poznámka: Zvolíme-li na asymptotě kvadriky libovolné dva od sebe různé body a vyjádříme tuto asymptotu parametrickými rovnicemi (56), budou oba kořeny rovnice (57) rovny jedné.

Obdobně jako u kuželoseček si všimněme dále ještě dvou případů, kdy přímka leží celá na kvadrice.

Věta 32. *Spojnice singulárního bodu kvadriky s dalším jejím bodem leží celá na kvadrice*

Důkaz je obdobný důkazu věty 6, jen je třeba rovnice (14) nahradit rovnicemi (56) a rovnici (15) rovnicí (57).

Věta 33. *Přímka, která má singulární směr kvadriky a prochází některým jejím bodem, leží celá na kvadrice.*

Důkaz je obdobný důkazu věty 7, jen parametrické vyjádření příslušné přímky bude

$$x = x_0 + v_1t\,, \quad y = y_0 + v_2t\,, \quad z = z_0 + v_3t\,, \tag{59}$$

a bude-li ležet bod $P_0[x_0, y_0, z_0]$ na kvadrice, bude splněna rovnice

$$F(x_0 + c_1t, y_0 + v_2t, z_0 + v_3t) = 0 \tag{60}$$

po každé t.

Poznámka: Přímka obsahující singulární bod nebo rovnoběžná se singulárním směrem kvadriky a procházející kromě toho dalším bodem kvadriky, leží podle posledních dvou vět celá na kvadrice. Obráceně to však neplatí; existují dokonce přímky ležící celé na regulárních kvadrikách.

O rozložitelnosti kvadrik platí:

Věta 34. *Kvadrika je rozložitelná právě tehdy, je-li její hodnost menší než tři. Potom se skládá ze dvou rovin; tyto roviny spolu splývají právě tehdy, když hodnost kvadriky je jedna.*

Důkaz: Skládá-li se kvadrika ze dvou rovin

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0\,,\quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0\,, \tag{61}$$

je její rovnice

$$(A_1x + B_1y + C_1z + D_1)\,.\,(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0 \tag{62}$$

a diskriminant kvadratického mnohočlenu z levé strany této rovnice je

$$\begin{vmatrix} 2A_1A_2\,, & A_1B_2 + A_2B_1, & A_1C_2 + A_2C_1, & A_1D_2 + A_2D_1 \\ A_1B_2 + A_2B_1, & 2B_1B_2\,, & B_1C_2 + B_2C_1, & B_1D_2 + B_2D_1 \\ A_1C_2 + A_2C_1, & B_1C_2 + B_2C_1, & 2C_1C_2\,, & C_1D_2 + C_2D_1 \\ A_1D_2 + A_2D_1, & B_1D_2 + B_2D_1, & C_1D_2 + C_2D_1, & 2D_1D_2 \end{vmatrix}. \tag{63}$$

Vybereme-li si z něho kterýkoli subdeterminant třetího stupně, lze jej vyjádřit ve tvaru

$$\begin{vmatrix} \alpha_1\pi_2 + \alpha_2\pi_1, & \alpha_1\varrho_2 + \alpha_2\varrho_1, & \alpha_1\sigma_2 + \alpha_2\sigma_1 \\ \beta_1\pi_2 + \beta_2\pi_1, & \beta_1\varrho_2 + \beta_2\varrho_1, & \beta_1\sigma_2 + \beta_2\sigma_1 \\ \gamma_1\pi_2 + \gamma_2\pi_1, & \gamma_1\varrho_2 + \gamma_1\varrho_2, & \gamma_1\sigma_2 + \gamma_2\sigma_1 \end{vmatrix}, \tag{64}$$

kde α, β, γ a π, ϱ, σ jsou dvě různé nebo splývající kombinace třetí třídy bez opakování z prvků A, B, C, D. Ale o každém determinantu (64) lze dokázat obdobně jako o determinantu (19), že je rovný nule.

Splývají-li obě roviny (61), z nichž se kvadrika skládá, je $A_1 = A_2$, $B_1 = B_2$, $C_1 = C_2$, $D_1 = D_2$; označme tato čísla postupně A, B, C, D. Potom každý subdeterminant druhého stupně diskriminantu (63) má tvar (20), kde α, β a π, ϱ jsou opět dvě totožné nebo různé kombinace druhé třídy bez opakování z prvků A, B, C, D. Ale protože každý determinant (20) je rovný nule, je hodnost kvadriky v tomto případě jedna.

Naopak je-li hodnost kvadriky menší než tři, mohou pro soustavu lineárních rovnic (49) nastat jen ty případy, kdy $h' < 3$, tedy z případů uvedených v důkazu věty 26 jen případ první, druhý a čtvrtý.

Nastane-li případ druhý, má podle věty 27 kvadrika právě přímku singulárních bodů. A podle věty 32 leží spojnice každého z bodů této přímky s libovolným dalším bodem kvadriky celá na kvadrice. Kvadrika tedy obsahuje celou rovinu. Tato rovina však není dvojnásobná rovina kvadriky, neboť pak by musela být hodnost kvadriky jedna. Obsahuje tedy kvadrika ještě další rovinu, jež s ní protíná v její přímce singulárních bodů.

Ve čtvrtém případě má kvadrika podle věty 27 celé zaměření singulárních směrů. Protože libovolná přímka rovnoběžná s tímto zaměřením, jež má s kvadrikou společný bod, leží podle věty 33 celá na kvadrice, obsahuje kvadrika v tomto případě s každým svým bodem celou rovinu, která jím prochází a má zaměření singulárních směrů kvadriky. Tato rovina však není dvojnásobnou rovinou kvadriky, protože hodnost kvadriky je dvě. Obsahuje tedy kvadrika ještě další bod a s ním i celou rovinu, která jím prochází a je s první rovinou rovnoběžná.

Konečně v prvním případě obsahuje kvadrika celou rovinu singulárních bodů a kromě ní již žádný jiný bod, neboť pak by kvadrika obsahovala ještě aspoň jednu další rovinu a to není možné, protože její hodnost je jedna.

Z tohoto důkazu vyplývá ještě další věta:

Věta 35. *Kvadrika se skládá ze dvou různých rovin právě tehdy, je-li její hodnost h' dvě. Tyto roviny jsou rovnoběžné, je-li hodnost h (nerozšířené) matice soustavy rovnic (49) jedna, a různoběžné, je-li tato hodnost dvě.*

Singulární kvadriky, jejichž hodnost je tři, jsou tedy nerozložitelné a mají zvláštní pojmenování.

Definice 30. *Singulární kvadratická plocha, která má jediný singulární bod, se nazývá kvadratická plocha kuželová a singulární bod vrchol této plochy. Kvadratická plocha bez singulárních bodů, která má jediný singulární směr, se nazývá kvadratická plocha válcová.*

Poznámka: Z pěti případů uvedených v důkazu věty 26 je ve třetím plocha kuželová, v pátém plocha válcová.

Protože přímka, která neleží celá na kvadrice, má s touto kvadrikou nejvýše dva společné body, lze na ní vždy zvolit bod $\Pi(\xi, \eta, \zeta)$, který není bodem kvadriky, a další libovolný bod $P_0[x_0, y_0, z_0]$, a vyjádřit ji parametricky rovnicemi (56), takže pro její společné body s kvadrikou je splněna rovnice (57), jejímž dvěma kořenům, pokud jsou různé od jedné, odpovídají společné body obou útvarů.

Splynou-li takové dva kořeny, má přímka s kvadrikou společný jen jeden bod, dvojnásobný průsečík. To nastane vždycky, když přímka prochází singulárním bodem kvadriky, jenž je pak tímto dvojnásobným průsečíkem. Proto singulární bod kvadriky nazýváme také jejím dvojnásobným bodem. Ale může se stát, že dvojnásobný průsečík přímky s kvadrikou je regulárním bodem kvadriky; pak příslušná přímka nemá již s kvadrikou žádný další společný bod.

Definice 31. *Má-li přímka s kvadrikou dvojnásobný průsečík v jejím regulárním bodě, nazývá se tečnou kvadriky v tomto bodě a příslušný bod bodem dotyku (dotykovým bodem).*

O tečnách kvadriky v jejím daném regulárním bodě platí

věta 36. *Všechny tečny kvadriky, jež se jí dotýkají v jejím daném regulárním bodě $P_0\,[x_0, y_0, z_0]$, leží v rovině, jejíž rovnice zní*

$$F(x, y, z; x_0, y_0, z_0) = 0\,. \tag{65}$$

Důkaz: Nechť $P_0[x_0, y_0, z_0]$ je regulární bod kvadriky (45). Bod $\Pi(\xi, \eta, \zeta)$ leží na tečně této kvadriky v bodě P_0 právě tehdy, když rovnice (57) má dvojnásobný kořen $\lambda = 0$. To však nastane právě tehdy, když souřadnice bodu Π vyhovují rovnici (65).

Poznámka: Rovnice (65) vyjadřuje rovinu, pokud bod P_0 je regulárním bodem kvadriky (45), z důvodů zcela obdobných těm, pro něž rovnice (21) vyjadřuje přímku.

Definice 32. *Rovina* (65) *se nazývá tečná rovina kvadriky* (45) *v jejím regulárním bodě $P_0[x_0, y_0, z_0]$.*

Věta 37. *Tečná rovina nerozložitelné kvadriky v jejím regulárním bodě P_0 protíná kvadriku ve složené kuželosečce, která má v bodě P_0 svůj singulární bod.*

Důkaz: Zvolme soustavu souřadnice tak, aby bod P_0 byl počátek a tečná rovina kvadriky v něm rovina os souřadnic x, y, která má rovnici (52). Rovnice kvadriky pak zní

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 + 2b_3z = 0 \tag{66}$$

a rovina (52) ji protíná v kuželosečce

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = 0\,, \tag{67}$$

jež se skládá ze dvou přímek, které obě procházejí počátkem.

Poznámka: V rovnici (67) je aspoň jeden koeficient nenulový, neboť jinak by kvadrika (66) měla nutně hodnost nižší než tři a nebyla by tedy nerozložitelná.

Všechny tečny kvadriky, které se jí dotýkají v jejím daném bodě P_0, leží v rovině, tečné rovině kvadriky v tomto bodě. Nechť nyní bod P_0 leží mimo kvadriku a zkoumejme útvar, v němž leží všechny tečny kvadriky, které bodem P_0 procházejí.

Definice 33. *Plocha tečen vedených z bodu $P_0[x_0, y_0, z_0]$ ležícího mimo kvadriku (45) k této kvadrice, je množina všech takových bodů, jejichž spojnice s bodem P_0 buď protíná kvadriku ve dvojnásobném průsečíku nebo je její asymptotou.*

Poznámka: Plocha tečen právě definovaná je tedy plocha, na níž leží nejen všechny tečny a asymptoty kvadriky procházející daným bodem P_0, nýbrž i spojnice bodu P_0 se všemi singulárními body kvadriky.

Věta 38. *Plocha tečen vedených ke kvadrice (45) z bodu $P_0[x_0, y_0, z_0]$ mimo ni ležícího má rovnici*

$$[F(x, y, z; x_0, y_0, z_0)]^2 - F(x, y, z)\, F(x_0, y_0, z_0) = 0\,. \tag{68}$$

Důkaz je obdobný důkazu věty 11.

Věta 39. *Plocha tečen vedených ke kvadrice (45), jejíž hodnost je aspoň dvě, z bodu P_0, který na ní neleží, je singulární kvadrika a dvojnásobným bodem v bodě P_0.*

Důkaz je obdobný důkazu věty 12.

Definice 34. *Bod $P_0[x_0, y_0, z_0]$, ležící mimo nerozložitelnou kvadriku, se nazývá jejím vnějším bodem, je-li plocha tečen vedených z něho k této kvadrice reálná; je-li tato plocha tečen imaginární, nazývá se vnitřním bodem dané kvadriky.*

Rovnice (65) vyjadřuje rovinu i když bod P_0 leží mimo kvadriku (45), pokud ovšem jeho souřadnice nevyhovují zároveň prvním třem z rovnic (49). Tuto rovinu pak daná kvadrika bodu P_0 jednoznačně přiřazuje. Proto zavádíme definici:

Definice 35. *Rovina, jejíž rovnice je (65), se nazývá polární rovina bodu P_0 vzhledem ke kvadrice (45).*

Polární rovina regulárního bodu dané kvadriky vzhledem k této kvadrice je tedy její tečná rovina v tomto bodě. Leží-li však bod P_0 mimo kvadriku, platí o ní tato věta:

Věta 40. *Polární rovina bodu $P_0[x_0, y_0, z_0]$ ležícího mimo kvadriku vzhledem k této kvadrice (pokud je definována) je geometrické místo bodů, které 1. na přímkách procházejících bodem P_0 a protínajících kvadriku ve dvou různých průsečících oddělují bod P_0 harmonicky od těchto průsečíků; 2. na přímkách procházejících bodem P_0 a protínajících kvadriku ve dvojnásobném průsečíku leží v tomto průsečíku; 3. na přímkách procházejících bodem P_0 a protínajících kvadriku v jediném jednoduchém průsečíku vytínají s bodem P_0 úsečku, jež je tímto průsečíkem s kvadrikou půlena.*

Důkaz je obdobný důkazu věty 13.

Věta 41. *Bod P_0 leží na své polární rovině vzhledem ke kvadrice (45) právě tehdy, když je regulárním bodem této kvadriky.*

Důkaz je obdobný důkazu věty 14.

Věta 42. *Leží-li ze dvou bodů P_1 a P_2 jeden v polární rovině druhého vzhledem k dané kvadrice a existuje-li jeho polární rovina, leží v ní druhý z těchto bodů.*

Důkaz je obdobný důkazu věty 15.

Definice 36. *Dva body, z nichž každý leží v polární rovině druhého, vzhledem k dané kvadrice, se nazývají sdružené póly této kvadriky; jejich polární roviny se nazývají sdružené polární roviny příslušné kvadriky.*

Věta 43. *Polární roviny všech bodů dané přímky vzhledem k dané kvadrice (pokud existují) patří do téhož svazku rovin.*

Důkaz: Nechť daná přímka je vyjádřena rovnicemi (59). Potom polární roviny vzhledem ke kvadrice (45) odpovídající jejím jednotlivým bodům, tedy jednotlivým hodnotám parametru t, pokud existují, mají rovnice

$$F(x, y, z; x_0 + v_1t, y_0 + v_2t, z_0 + v_3t) = 0\,, \tag{69}$$

jež lze napsat ve tvaru

$$F(x, y, z; x_0, y_0, z_0) + t[v_1F_1(x, y, z) + v_2F_2(x, y, z) + v_3F_3(x, y, z)] = 0\,. \tag{70}$$

Všechny tyto roviny buď splývají nebo patří do téhož svazku rovin, a to buď prvního nebo druhého druhu.

V případě svazku prvního druhu je osa tohoto svazku přímka, jejíž vztah k přímce (59) je vzájemný. Platí totiž

věta 44. *Procházejí-li polární roviny všech bodů dané přímky vzhledem k dané kvadrice (pokud jsou definovány) nějakou druhou přímkou, procházejí polární roviny všech bodů této druhé přímky vzhledem k téže kvadrice (pokud jsou definovány) první danou přímkou.*

Důkaz: Nechť polární roviny (70) všech bodů přímky (59) vzhledem ke kvadrice (45) procházejí (pokud jsou definovány) určitou druhou přímkou. Potom každý bod této druhé přímky, pokud je definována jeho polární rovina, je sdruženým pólen ke všem bodům dané přímky (59), jejichž polární rovina je definována, takže jeho polární rovina prochází přímkou (59).

Poznámka: Polární rovina každého bodu druhé přímky, (pokud je definována) prochází nutně nejméně dvěma body přímky (59), neboť není možné, aby byla definována polární rovina právě jen jednoho bodu přímky (59).

Definice 37. *Dvě přímky, z nichž každá leží v polárních rovinách všech bodů druhé přímky vzhledem k dané kvadrice, se nazývají sdružené poláry této kvadriky.*

Každému bodu $P_0[x_0, y_0, z_0]$ přiřazuje kvadrika (45) jedinou polární rovinu (65), pokud jeho souřadnice neanulují zároveň první tři adjugované mnohočleny (46), tedy pokud jeho souřadnice nejsou řešením prvních tří rovnic ze soustavy (49).

Definice 38. *Bod $S[m, n, p]$, jehož souřadnice vyhovují prvním třem z rovnic (49), se nazývá střed kvadriky (45).*

Věta 45. *Střed S kvadriky je jejím středem souměrnosti.*

Důkaz je obdobný důkazu věty 16, jen transformační rovnice (33) mají tvar

$$x = x' + m, \quad y = y' + n, \quad z = z' + p \tag{71}$$

a rovnice (34) zní

$$a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 + 2a_{13}x'z' + 2a_{23}y'z' + a_{33}z'^2 + \\ + 2F_1(m, n, p)\,x' + 2F_2(m, n, p)\,y' + 2F_3(m, n, p)\,z' + F(m, n, p) = 0. \tag{72}$$

Věta 46. *Kvadrika nemá buď žádný střed, nebo má jeden střed, nebo má středů nekonečně mnoho a ty pak vyplňují celou přímku nebo celou rovinu. Nekonečně mnoho středů může mít jen kvadrika singulární.*

Důkaz: První tři rovnice ze soustavy (49) označme (49_0). Hodnost matice soustavy (49_0) označme h_0, hodnost rozšířené matice soustavy (49_0) označme h'_0. Celkem mohou nastat tyto případy:

1) $h_0 = 1$, $h'_0 = 1$; 2) $h_0 = 2$, $h'_0 = 2$; 3) $h_0 = 3$, $h'_0 = 3$; 4) $h_0 = 1$, $h'_0 = 2$; 5) $h_0 = 2$, $h'_0 = 3$.

V prvním a druhém případě má kvadrika středů nekonečně mnoho; tyto středy pak vyplňují v prvním případě rovinu, ve druhém přímku. Ve třetím případě má kvadriku jediný střed, kdežto ve čtvrtém a pátém případě nemá kvadrika střed žádný.

Protože hodnost kvadriky může být nejvýše o jedničku vyšší než h'_0, nemůže být kvadrika regulární v prvním, druhém a čtvrtém případě.

Definice 39. *Kvadrika se nazývá středová, má-li právě jeden střed; jinak se nazývá nestředová.*

Věta 47. *Kvadrika je nestředová právě tehdy, když determinant*

$$B = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{12}, & a_{22}, & a_{23} \\ a_{13}, & a_{23}, & a_{33} \end{vmatrix} \tag{73}$$

je rovný nule; jinak je středová.

Důkaz plyne z definice 39 a d důkazu věty 46.

Definice 40. *Nestředová regulární kvadrika se nazývá paraboloid; středová regulární kvadrika se nazývá elipsoid, je-li střed jejím vnitřním bodem.*

Poznámka: Plocha tečen vedených k regulární středové kvadrice z jejího středu, je plocha jejích asymptot.

Věta 48. *Kvadratická plocha václová nemá nuď střed žádný nebo má středů nekonečně mnoho a ty pak vyplňují přímku, jejíž body jsou všechny buď vnitřními nebo vnějšími body této kvadratické plochy.*

Důkaz: Pro kvadratickou válcovou plochu (45) je hodnost matice soustavy rovnic (49) $h = 2$, a matice rozšířené $h' = 3$. Hodnost rozšířené matice soustavy (49_0) prvních tří z nich je $h'_0 = h = 2$ a hodnost h_0 nerozšířené matice soustavy (49_0) je buď jedna nebo dvě.

Je-li $h_0 = 1$, nemá soustava rovnic (49_0) žádné řešení, válcová plocha nemá žádný střed.

Je-li $h_0 = 2$, má soustava (49_0) řešení nekonečně mnoho, a ta jsou souřadnicemi bodů vyplňujících přímku určenou libovolnými dvěma rovnicemi soustavy (49_0), jež jsou lineárně nezávislé. Zvolme soustavu souřadnic tak, aby tato přímka byla osa z. Pak bude platit $a_{13} = a_{23} = a_{33} = b_1 = b_2 = b_3 = 0$ a rovnice plochy válcové bude mít tvar (36). Rovnice plochy tečen vedených k ní z libovolného bodu na ose z bude mít tvar (37), bude tedy pro libovolný střed plochy (36) vyjadřovat tutéž plochu a to pro všechny středy reálnou nebo pro všechny středy imaginární.

Definice 41. *Kvadratická plocha válcová, která nemá žádný střed, se nazývá parabolická; kvadratická plocha válcová, která má celou přímku středů, se nazývá eliptická, jsou-li tyto středy její body vnitřní, a hyperbolická, jsou-li tyto středy její body vnější.*

Tak jako u kuželoseček je střed kvadriky bod, který půlí všechny tětivy kvadriky, které jím procházejí.

Zkoumejme naopak, co je geometrickým místem středů tětiv dané kvadriky zvoleného směru, který pro danou kvadriku není asymptotický, ale jinak zcela libovolný. Platí

věta 49. *Geometrické místo středů tětiv, které na přímkách rovnoběžných s daným vektorem $\mathbf{V}(v_1, v_2, v_3)$, nemá asymptotický směr kvadriky* (45), *vytíná tato kvadrika, je rovina*

$$v_1F_1(x, y, z) + v_2F_2(x, y, z) + v_3F_3(x, y, z) = 0 . \tag{74}$$

Důkaz je zcela obdobný důkazu věty 20, jen bod Π bude mít souřadnice ξ, η, ζ. K rovnicím (39) přibude ještě další, takže místo nich dostaneme

$$x = \xi + v_1t , \ y = \eta + v_2t , \ z = \zeta + v_3t ; \tag{75}$$

dále místo rovnice (40) dostaneme rovnici

$$\begin{aligned} a_{11}(\xi + v_1t)^2 + 2a_{12}(\xi + v_1t)(\eta + v_2t) + a_{22}(\eta + v_2t)^2 + \\ + 2a_{13}(\xi + v_1t)(\zeta + v_3t) + 2a_{23}(\eta + v_2t)(\zeta + v_3t) + a_{33}(\zeta + v_3t)^2 + \\ + 2b_1(\xi + v_1t) + 2b_2(\eta + v_2t) + 2b_3(\zeta + v_3t) + C = 0 \end{aligned} \tag{76}$$

a konečně místo rovnice (41) dostaneme rovnici

$$\begin{aligned} [(a_{11}v_1^2 + 2a_{12}v_1v_2 + a_{22}v_2^2 + 2a_{13}v_1v_3 + 2a_{23}v_2v_3 + a_{33}v_3^2)] \, t^2 + \\ + 2[v_1F_1(\xi, \eta, \zeta) + v_2F_2(\xi, \eta, \zeta) + v_3F_3(\xi, \eta, \zeta)] \, t + F(\xi, \eta, \zeta) = 0 . \end{aligned} \tag{77}$$

Definice 42. *Rovina, která půlí tětivy, jež na přímkách daného směru, který není asymptotický, vytíná daná kvadrika, se nazývá průměrová rovina této kvadriky sdružená s daným směrem.*

Věta 50. *Každá průměrová rovina středové kvadriky prochází jejím středem.*

Důkaz je obdobný důkazu věty 21.

Věta 51. *Je-li jedna ze dvou průměrových rovin kvadriky sdružená s některým směrem zaměření druhé, je druhá sdružená s některým směrem zaměření první.*

Důkaz: O souřadnicích vektoru $\mathbf{U}(u_1, u_2, u_3)$ rovnoběžného s průměrovou rovinou (74) kvadriky (45), jež je sdružena se směrem vektoru $\mathbf{V}(v_1, v_2, v_3)$, platí

$$\begin{aligned} (a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + a_{13}v_3) \, . \, u_1 + (a_{12}v_1 + a_{22}v_2 + a_{23}v_3) \, . \, u_2 + \\ + (a_{13}v_1 + a_{23}v_2 + a_{33}v_3) \, . \, u_3 = 0 , \end{aligned} \tag{78}$$

což však znamená, že naopak vektor $\mathbf{V}$ je rovnoběžný s průměrovou rovinou sdruženou se směrem vektoru $\mathbf{U}$.

Definice 43. *Dvě průměrové roviny kvadriky, z nichž každá je sdružená s některým směrem zaměření druhé, se nazývají sdružené.*

Věta 52. *Všechny průměrové roviny kvadriky sdružené s jednotlivými směry daného zaměření (pokud tyto směry nejsou asymptotické) jsou buď totožné nebo patří do téhož svazku rovin.*

Důkaz: Nechť příslušné zaměření je určeno dvěma nekolineárními vektory $\boldsymbol{U}(u_1, u_2, u_3)$ a $\boldsymbol{V}(v_1, v_2, v_3)$. Potom libovolný vektor rovnoběžný s tímto zaměřením lze vyjádřit ve tvaru $\lambda_1\boldsymbol{U} + \lambda_2\boldsymbol{V}$ a průměrová rovina, jež je sdružena s jeho směrem, má rovnici tvaru

$$\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 = 0\,, \tag{79}$$

kde P_2 je levá strana rovnice (74) a P_1 je výraz, který z ní vznikne, když v ní souřadnice vektoru $\boldsymbol{V}$ nahradíme souřadnicemi vektoru $\boldsymbol{U}$.

Definice 44. *Určují-li průměrové roviny kvadriky sdružené s jednotlivými směry daného zaměření svazek rovin prvního druhu, nazývá se jeho osa průměr sdružený s daným zaměřením.*

Věta 53. *Každý průměr středové kvadriky prochází jejím středem.*

Důkaz plyne přímo z věty 49 a definice 44.

Je-li průsečnice dvou sdružených průměrových rovin kvadriky průměr jiného směru než asymptotického, je s jeho směrem sdružena průměrová rovina kvadriky, s jejímiž některými dvěma směry jsou sdruženy obě původní dané průměrové roviny. Takové roviny tvoří útvar, jehož si zvláště všimneme.

Definice 45. *Tři průměrové roviny kvadriky, z nichž každé dvě jsou sdružené, tvoří trojici navzájem sdružených průměrových rovin kvadriky.*

Definice 46. *Průsečnice jednotlivých párů rovin vybraných z trojice sdružených průměrových roviny dané kvadriky, tvoří trojici navzájem sdružených průměrů této kvadriky.*

Poznámka: Trojice navzájem sdružených průměrů i průměrových rovin existují vždy u regulárních kvadrik středových, kde se lze o tom snadno přesvědčit sestrojením takové trojice. U regulárních kvadrik nestředových je tomu však jinak. Tam platí

Věta 54. *Všechny průměrové roviny nestředové kvadriky jsou rovnoběžné s týmž směrem, tak zvaným průměrovým směrem této kvadriky.*

Důkaz: Protože determinant (73) je u nestředových kvadrik rovný nule, jsou lineární členy adjungovaných mnohočlenů $F_1(x, y, z)$, $F_2(x, y, z)$ a $F_3(x, y, z)$ lineárně závislé, tedy nejvýše dva z nich mohou být lineárně nezávislé. To znamená, že existuje směr rovnoběžný se všemi rovinami (74).

Věta 55. *Všechny průměry regulární nestředové kvadriky jsou rovnoběžné s jejím jediným průměrovým směrem, tedy i navzájem.*

Důkaz: Že jsou všechny průměrové roviny nestředové kvadriky rovnoběžné s každým jejím průměrovým směrem plyne z předchozí věty 53. Zbývá ukázat, že v případě regulární nestředové kvadriky je tento průměrový směr jediný. To však plyne z toho, že kdyby jich bylo více, tedy celé zaměření, byla by hodnost determinantu (73) menší než dvě, tedy rovna jedné a hodnost diskriminantu Δ kvadriky, která může být nejvýše o dvě vyšší, by nemohla být čtyři; kvadrika by nebyla regulární.

Věta 56. *Každou regulární kvadriku lze při vhodné volbě soustavy souřadnic vyjádřit buď rovnicí*

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + c = 0\,, \tag{80}$$

je-li to kvadrika středová, nebo rovnicí

$$a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2b_1x = 0\,, \tag{81}$$

je-li to kvadrika nestředová. Přitom žádný z koeficientů v rovnicích (80), (81), *tedy žádné z čísel* a_{11}, a_{22}, a_{33}, b_1, c *není rovno nule.*

Důkaz: Zvolíme-li v případě regulární středové kvadriky soustavu souřadnic tak, aby roviny

$$x = 0,\ y = 0\,,\ z = 0 \tag{82}$$

tvořily trojici sdružených průměrových rovin, tedy osy x, y a z trojici sdružených průměrů, je podle rovnice (74) v rovnici kvadriky (45) $a_{12} = a_{13} = a_{23} = b_1 = b_2 = b_3 = 0$. Žádný další koeficient nemůže již být nulový, neboť daná kvadrika je regulární.

V případě regulární kvadriky nestředové zvolme soustavu souřadnic, tak aby rovina

$$x = 0 \tag{83}$$

byla tečnou rovinou kvadriky, osa x jejím průměrem sdruženým se zaměřením roviny (83) a zbývající souřadnicové roviny

$$y = 0\,,\ z = 0 \tag{84}$$

její sdružené průměrové roviny. Potom podle rovnic (65), (74) a (78) je v rovnici kvadriky (45) $a_{12} = a_{13} = a_{23} = b_2 = b_3 = c = 0$, a protože jde o regulární kvadriku nestředovou, je i $a_{11} = 0$, kdežto všechny ostatní koeficienty jsou vesměs nenulové.

Věta 57. *Regulární kvadrika* (80) *je elipsoid, mají-li* a_{11}, a_{22}, a_{33} *stejná znaménka, a to imaginární, má-li totéž znaménko i c, a reálný, má-li c opačné znaménko. Jinak je kvadrika* (80) *hyperboloid, který je vždy reálný. Kvadrika* (81) *je paraboloid, který je rovněž vždy reálný.*

Důkaz: Kvadrika (80) nemá žádný reálný bod právě tehdy, když a_{11}, a_{22}, a_{33}, c mají totéž znaménko. Potom i a_{11}, a_{22}, a_{33} mají totéž znaménko a rovnice plochy tečen vedených ke kvadrice (80) z počátku jejího středu, zní podle rovnice (68)

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 = 0\,, \tag{85}$$

kde a_{11}, a_{22}, a_{33} mají totéž znaménko, takže tato plocha tečen je imaginární; totéž však nastane také v případě reálného elipsoidu. V každém jiném případě je plocha tečen (85) reálná, takže kvadrika (80) je pak hyperboloid.

Definice 47. *Hyperboloid, v jehož rovnici* (80) *jsou z koeficientů* a_{11}, a_{22}, a_{33}, c *dva kladné a dva záporné, se nazývá jednodílný; každý jiný hyperboloid se nazývá dvojdílný.*

Poznámka: Všechny reálné body dvojdílného hyperboloidu lze rozdělit — podobně jako u hyperboly — do dvou oddělených množin. Je-li v rovnici dvojdílného hyperboloidu (80) na příklad $a_{11} > 0$, $a_{22} < 0$, $a_{33} < 0$, $c < 0$, potom k reálnému x existuje reálné y a z právě tehdy, když je $a_{11}x^2 + c \geqq 0$, tedy když je buď $x \leqq -\sqrt{-\frac{c}{a_{11}}}$ nebo $x \geqq \sqrt{-\frac{c}{a_{11}}}$. To však znamená, že mezi rovnoběžnými rovinami $x = -\sqrt{-\frac{c}{a_{11}}}$ a $x = \sqrt{-\frac{c}{a_{11}}}$ neleží žádný reálný bod hyperboloidu. Odtud plyne pojmenování dvojdílného hyperboloidu a rozdělení hyperboloidů na jednodílné a dvojdílné.

Definice 48. *Paraboloid* (81) *se nazývá eliptický, mají-li a_{22}, a_{33} totéž znaménko; mají-li a_{22}, a_{33} opačná znaménka, nazývá se paraboloid hyperbolický.*

Poznámka: Soustavou rovin

$$x - d = 0 \tag{86}$$

je paraboloid (81) protínat v elipsách, je-li eliptický, a v hyperbolách, je-li hyperbolický; odtud plyne jeho označení.

Věta 58. *Každým bodem regulární kvadriky procházejí dvě přímky, které leží celé na příslušné kvadrice. Tyto přímky jsou reálné, je-li kvadrika jednodílný hyperboloid nebo hyperbolický paraboloid; jinak jsou imaginární.*

Důkaz: Podle věty 36 a poznámky k této větě existuje v každém bodě regulární kvadriky tečná rovina, která podle věty 37 kvadriku protíná v singulární kuželosečce složené ze dvou přímek, jež se protínají v dotykovém bodě této tečné roviny. Jak plyne z rovnic (80) a (81), jsou tyto přímky reálné jen v případě jednodílného hyperboloidu a hyperbolického paraboloidu.