Otomar Hájek

Singularity diferenciální rovnice

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 1 (1956), No. 5-6, 551--559

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/137360

17. Na závěr podáme stručný přehled definic nejdůležitějších podgrup afinní grupy.

Grupa translací G_t obsahuje identitu a translace. Translace jsou homothetické afinity bez samodružného bodu.

Grupa stejnolehlostí G_s obsahuje všechny homothetické afinity. Mimo afinity z grupy G_t jsou to ještě stejnolehlosti, t. j. homothetické afinity s jedním samodružným bodem.

Základní grupa eliptických afinit Γ neboli transformovaná grupa přímých podobností je množina všech (homothetických a eliptických) afinit, které jsou směrově komutativní s danou eliptickou afinitou.

Transformovaná grupa všech podobností Γ' se dostane z grupy Γ rozšířením o množinu afinit $\Gamma \mathfrak{K}$, kde $\mathfrak{K}$ je kosá souměrnost splňující vztah $\mathfrak{K} \Gamma \mathfrak{K} = \Gamma$.

Transformovaná grupa všech shodností je množina všech afinit z transformované grupy všech podobností Γ', které lze složit z konečného počtu involutorních afinit.

Transformovaná grupa přímých shodností je množina všech afinit, které náležejí transformované grupě přímých podobností a transformované grupě všech shodností, neboli je to množina všech přímých afinit z transformované grupy všech shodností.

Zvláštním případem posledních čtyř podgrup jsou: grupa přímých podobností G_p, grupa všech podobností G'_p, grupa všech shodností G'_k a grupa přímých shodností G_k. Dostaneme je tak, že mezi transformovanými grupami $\mathfrak{A}^{-1} G'_p \mathfrak{A}$ vybereme jednu určitou grupu. Tento výběr se opírá o pojem shodnosti úseček, resp. vzdáleností dvou bodů, a je vyjádřen podmínkou $X'Y' = k \cdot XY$, která je uvedena v definici podobného zobrazení.

Na konec je třeba připomenout, že v této stati jsou afinity málo studovány po konstruktivní stránce, která je pro jejich použití velmi důležitá a která by vyžadovala soustavného a podrobného zpracování.

OTOMAR HÁJEK

SINGULARITY DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE

Tato práce je v podstatě použitím nejjednodušších method moderních partií matematiky na obecnou theorii diferenciálních rovnic (přesněji, obyčejnou explicitní diferenciální rovnici 1. řádu se spojitou pravou stranou). Prakticky se to projevuje trivialisací důkazů — viz zejména větu o unicitě (věta 19), nebo o závislosti řešení na počátečních podmínkách (věty 9, 10).

Aparát § 1—2 aplikuje na klasické thema v § 4, a na § 3, který je vlastním cílem práce. Tento § považuji za nejdůležitější (a nejméně úplný); zůstávají zde otevřeny některé velmi jednoduché a zároveň fundamentální problémy.

Podobně jako v jiných partiích matematiky (z klasických oborů na př. „calcul des limites“, parciální rovnice 2. řádu eliptické, Perronův integrál) i zde je jedním z důležitých prostředků methoda majorant. Základní je pak jedna věta z Perronovy práce [1], vydané r. 1915; Perron ji tam dokazuje způsobem tak jednoduchým, že, za prvé, vůbec ji neformuluje jako větu, a za druhé, ihned připouští zobecnění (věta 6). O správnosti téhož výsledku byl přesvědčen i Čaplygin; v pracech [2] z let 1919—1920 podává několik důkazů, více méně neúspěšných; v pracech sovětských autorů je pak nazývána Čaplyginovou větou, a stala se základem důležitého aproximativního řešení diferenciálních rovnic (Čaplyginova methoda).

Tento článek vznikl za stálých podnětů a rad doc. dr. A. Srovnala a pomocí dr. M. Neubauera; oběma děkuji.

*

Stále předpokládáme, že je dána pevná spojitá funkce F v rovině E^2, která je omezená: $|F(x, y)| < M$ (to je celkem nepodstatné: funkci spojitou v kompaktním okolí počátku lze spojitě a omezeně rozšířit do celé roviny). Řešením rovnice

$$y' = F(x, y)$$

(v dalším: „řešením") rozumím derivovatelnou funkci f na reálné přímce E^1, pro kterou platí všude $f'(x) = F(x, f(x))$. Funkcí f soustavně rozumím množinu bodů $[x, y]$, splňujících $y = f(x)$; mluvím tedy na př. o řešení f bodem $P = [x_0, y_0]$. Identickou funkci někdy značím x. Maximum a minimum značím $a \vee b$, $a \wedge b$ — podobně supremum a infimum. Bod znamená bod v E^2; místo bod na E^1 mluvím raději o čísle (i když to není obvyklé). Pro funkce $\{f_n\}_0^\infty$ definované na A značí $f_n \rightrightarrows f_0$ stejnoměrnou konvergenci na každé kompaktní části A (t. zv. konvergence *téměř stejnoměrná*).

§ 1. Základní věty

Je známa tato věta:[1])

Věta 1. *Každým bodem roviny prochází některé řešení.*

Věta 2. *Nechť f_α mají spojité derivace v E^1, $\{f_\alpha(0)\}$ omezená, $f'_\alpha - F(x, f_\alpha) \rightrightarrows 0$ pro $\alpha \to 0$. Pak existuje posloupnost $\alpha_n \to 0$ a řešení f takové, že*

$$f_{\alpha_n} \rightrightarrows f, \quad f'_{\alpha_n} \rightrightarrows f'.$$

Důkaz. Pracujeme v kompaktním intervalu J, $0 \in J \subset E^1$. Jest $|f'_\alpha| \leq |F| + |f'_\alpha - F|$, takže f_α splňují Lipschitzovu podmínku s touž konstantou; zejména jsou stejně spojité. Lze tedy z nich vybrat stejnoměrně konvergentní $f_{\alpha_n} \rightrightarrows f$ (Ascoliova věta). Pak také $F(x, f_{\alpha_n})$ konvergují stejnoměrně (spojitost), takže $f'_{\alpha_n} = F(x, f_{\alpha_n}) + [f'_{\alpha_n} - F(x, f_{\alpha_n})]$ konvergují stejnoměrně, nutně k f'. Zřejmě f je řešením v J.

Poznámka 1. Předpokládejme ještě, že $f_\alpha(0) \to 0$ a že je jen jediné řešení f počátkem. Z věty plyne, že z každé podposloupnosti ze $\{f_\alpha\}$ lze vybrat posloupnost téměř stejnoměrně konvergující k f. To pak znamená, že dokonce celá $f_\alpha \rightrightarrows f$. Větu často užíváme podobným způsobem.

Poznámka 2. Věty 1, 2 charakterisují dif. rovnice se spojitou pravou stranou: Nechť pro dif. rovnici $y' = G(x, y)$ s konečnou pravou stranou platí tvrzení vět 1, 2. Pak G je spojitá. (Důkaz.) Nechť $[x_n, y_n] \to [x_0, y_0]$, $G(x_n, y_n) \to a$ (případně nevlastní). Existují řešení f_n: $f_n(x_n) = y_n$, $f_n \rightrightarrows f_0$, $f'_n \rightrightarrows f'_0$ (případně se vybírají podposloupnosti). Jest

$$G(x_0 y_0) = f'_0(x_0) \leftarrow f'_n(x_n) = G(x_n, y_n) \to a.$$

Tedy G je spojitá v $[x_0 y_0]$.

Poznámka 3. Může se stát, že pro diferenciální rovnici $y' = G(x, y)$ platí tvrzení věty 1 a věty 2 až na $f'_{\alpha_n} \rightrightarrows f'$. G je pak nespojitá, ale může být omezená (příklad 5).

---

[1]) [3]; na př. [4], str. 60. Za našich předpokladů lze řešení prodloužit na celou E^2, takže existuje řešení ve smyslu naší definice.

Větu 2 lze chápat jako větu o konvergenci přibližných řešení, ale také jako velmi obecnou větu o závislosti pravé strany na parametru.

Věta 3. *Množina všech řešení s konvergencí téměř stejnoměrnou je lokálně kompaktní metrický prostor.*

Důkaz. Nechť $|f|_n = \bigvee_{|x| \leq n} |f(x)|$. Pak za metriku lze volit

$$\varrho(f, g) = \Sigma_1^\infty \frac{1}{2^n} \cdot \frac{|f|_n}{1 + |f|_n}.$$

Lokální kompaktnost podle věty 2.

Poznámka. Řešení tvoří tedy část lineárního prostoru C všech spojitých funkcí. Z příkladů v § 3 je zřejmé, že prostor řešení může mít každou dimensi $\geqslant 1$, dokonce i ∞. Přitom se jedná dokonce o topologické zobrazení na I^n nebo $I^{\aleph_0}$ (I — otevřený interval). Že „řešení závisí na jediné konstantě" lze tvrdit právě když neexistují singulární body.

Lemma. *Infima neprázdných podsystémů soustavy Φ stejně spojitých funkcí tvoří stejně spojitou soustavu.*

Důkaz. K $3^{-1} \cdot \varepsilon > 0$ určeme $\delta > 0$ tak, aby $f \in \Phi$, $|x - y| < \delta$ implikovalo $|f(x) - f(y)| < 3^{-1} \cdot \varepsilon$. Nechť h je infimem neprázdné $\Psi \in \Phi$. Nechť $|x_1 - x_2| < \delta$; určeme $f_i \in \Phi$ tak, aby $0 \leqslant f_i(x_i) - h(x_i) < 3^{-1} \cdot \varepsilon$ $(i = 1, 2)$; položme $f_3 - f_1 \wedge f_2$. Pak

$$|h(x_1) - h(x_2)| \leqslant f_1(x_1) - h(x_1) + f_2(x_2) - h(x_2) + |f_3(x_1) - f_3(x_2)| < \varepsilon$$

(uvažme, že pro $f_1 \wedge f_2$ platí stejný „$\varepsilon - \delta$ režim" jako pro f_i).

Věta 4. *Množina všech řešení s přirozeným částečným uspořádáním tvoří podmínečně úplný distributivní svaz.*

Důkaz. Nechť f, g jsou řešení, $h = f \wedge g$. Zřejmě $h' = f'$ tam, kde $f < g$. Když $f(x_0) = g(x_0)$, má $[h(x) - h(x_0)]/(x - x_0)$ s $x \neq x_0$ jenom tyto hromadné body:

$$f'(x_0) = F(x_0, f(x)),\ g'(x_0) = F(x_0, g(x))$$

tedy stejné. Celkem: h má v každém bodě derivaci a je řešením.

Nechť f_α jsou řešení, $h = \wedge f_\alpha$. Pak h je spojitá (f_α jsou stejně spojité — důkaz 2.; lemma). V každém čísle x lze h aproximovat některou f_α, která pak aproximuje h stejnoměrně v některém okolí x (spojitost). V každém kompaktním intervalu J lze tedy h po částech stejnoměrně aproximovat konečným počtem f_α (Heine-Borelova věta); jejich minimum je řešením, které stejnoměrně aproximuje h v J. Užijeme věty 2.

Poznámka. Topologické pojmy jsou většinou definovány v učebnicích [5], [6], pojmy theorie svazů v [7].

§ 2. Maximální řešení, monotonie

Věta 5. (*Druhá věta o existenci*).[2]) *Každým bodem $P = [x_0, y_0]$ procházejí řešení v_P, w_P takové, že*

$$v_P \leqslant f \leqslant w_P$$

pro každé řešení f bodem P. Je-li $Q = [x_1, y_1]$, $v_P(x_1) \leqslant y_1 \leqslant w_P(x_1)$, pak existuje řešení g procházející body P, Q.

Důkaz. Množina řešení procházející bodem P je omezena lineárními funkcemi o směrnicích $\pm M$. Tvoří tedy úplný podsvaz; jeho nejmenší a největší prvek označíme v_P, w_P.

Nechť Q má popsané vlastnosti, nechť na př. $x_0 < x_1$; nechť f je řešení bodem Q;

---

[2]) [8]; v. též [4], str. 78: *Minimal- und Maximalintegrale.*

nechť x_2 je první číslo vlevo od x_1, kde $f(x_2) = v_P(x_2)$ nebo $f(x_2) = w_P(x_2)$; tedy $x_0 < x_2 \leqslant x_1$. Položme

$$g = v_P \text{ (resp. } = w_P) \qquad v\,(-\infty, x_2\rangle,$$
$$g = f \qquad v\,\langle x_2, +\infty).$$

Věta 5 nás přivádí k této klasifikaci:

Definice. Bod $P = [x_0, y_0]$ nazveme *singulárním zprava* a označíme $P \in S^+$, když existuje posloupnost $x_n \to x+$ tak, že

$$v_P(x_n) < w_P(x_n).$$

Jinak nazveme P *obyčejným zprava*.[3]) Je-li P singulární zprava, a existuje-li ještě posloupnost $z_n \to x+$ tak, že

$$v_P(z_n) = w_P(z_n),$$

nazveme P *2. druhu*; je-li však $v_P < w_P$ v některém $(x_0, x_0 + \delta)$, $\delta > 0$ nazveme P *1. druhu*. A analogicky zleva (S^-, atd.).

Řešení f nazveme *singulárním* když existuje nedegenerovaný interval $\mathcal{J}$ takový, že každý $[x, f(x)]$, $x \in \mathcal{J}$, je singulární. Řešení nazveme *regulárním*, když každý jeho bod je obyčejný zprava i zleva. Množinu bodů $[x, y] : x_0 \leqslant x, v_P(x) \leqslant y \leqslant w_P(x)$ označíme T_P^+[4]). Analogicky T_P^- $(x \leqslant x_0)$.

Zřejmé jsou tyto důsledky.

Když $P = [x_0, y_0]$, $Q = [x_1, y_1]$, $y_1 = w_P(x_1)$, $x_1 \geqslant x_0$, pak $w_P = w_Q$ v $\langle x_1, +\infty)$.

Vždy

$Q \in T_P^+ \Longleftrightarrow P \in T_Q^- \Longleftrightarrow T_P^+ \supset T_Q^+ \Longleftrightarrow T_P^- \subset T_Q^- \Longrightarrow$ existuje řešení body P, Q. Tedy vztah $Q \in T_P^+$ je částečným uspořádáním; v této částečně uspořádané množině saturované řetězce odpovídají řešením.

Věta 6. (*Prvá věta o monotonii*).[5]) *Nechť f je spojitá*, $f(0) = 0$, $\underline{D}f(x) > F[x, f(x)]$ *pro* $x \geqslant 0$.[6]) *Nechť g je řešení počátkem. Pak $f > g$ v* $(0, +\infty)$.

Důkaz. Je $\underline{D}f(0) > F(0,0) = g'(0)$, takže $f(x) > g(x)$ pro $x > 0$ blízká k 0. Je-li x_0 první číslo >0 takové, že $f(x_0) = g(x_0)$, platí

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}.$$

Odtud $\underline{D}f(x_0) \leqslant g'(x_0) = F(x_0, g(x)) < \underline{D}f(x_0)$, spor; x_0 neexistuje.[7])

Věta 7. (*Druhá věta o monotonii*). *Nechť* $P = [x_0, y_0]$, $Q = [x_1, y_1]$, $y_1 \geqslant w_P(x_1)$. *Pak* $w_Q \geqq w_P$. *Nastává-li rovnost v bodě $x_2 \geqslant x_0$ (resp. $x_2 \leqslant x_0$) nastává všude v* $\langle x_2, +\infty)$ (*resp.* $(-\infty, x_2\rangle$).

Důkaz. $w_P \vee w_Q$ je řešením bodem Q; tedy $w_Q \geqslant w_P \vee w_Q \geqslant w_P$.

Poznámka. Věty 6,7 lze kombinovat. Na př. je-li f majorantou a g řešením, $f(0) \geqslant g(0)$, pak $f > g$ v $(0, +\infty)$ (neboť $f > w_P \geqslant w_Q \geqslant g$ pro $P = [0, f(0)]$, $Q = [0, g(0)]$).

Uvedeme několik vět o závislosti maximálních řešení na pravých stranách a počátečních podmínkách.

---

[3]) Zhruba: P je obyčejný zprava, když blízko k P vpravo je jen jediné řešení bodem P.

[4]) T_P^+ bychom mohli nazvat *pravým trsem* bode P.

[5]) [1], str. 473. Naše zobecnění je bezprostřední.

[6]) Dolní derivace.

[7]) Funkci f splňující podmínky věty nazveme *majorantou* bodem 0; analogicky *minoranta*: $\overline{D}f < F(x, f)$.

Věta 8.[8]) *Nechť* $F < F_\varepsilon \rightrightarrows F$ *pro* $\varepsilon \to 0+$[9]); *nechť* f_ε *je některým řešením rovnice* $y' = F_\varepsilon(x, y)$ *počátkem. Pak* $f_\varepsilon \rightrightarrows w_0$.

Důkaz. $f'_\varepsilon = F_\varepsilon > F$, takže $f_\varepsilon > w_0$ (věta 6); $f_\varepsilon \rightrightarrows w_0$ užitím věty 2. Zejména $w_\varepsilon \rightrightarrows w_0 \leftleftarrows v_\varepsilon$.

Věta 9. *Nechť* w_α *je maximálním řešením bodem* $P_\alpha = [x_\alpha, x_\alpha]$, $P_\alpha \to 0$ *pro* $\alpha \to 0$. *Když stále* $y_\alpha \geqslant w_0(x_\alpha)$, *pak* $w_\alpha \rightrightarrows w_0$. (věty 7 a 2: $w_0 \leqslant w_\alpha \rightrightarrows w_0$).

Věta 10. *Za předpokladů věty 9, když stále* $x_\alpha \leqslant 0$, $v_0(x_\alpha) \leqslant y_\alpha \leqslant w_0(x_\alpha)$, *pak* $w_\alpha \rightrightarrows w_0$, $v_\alpha \rightrightarrows v_0$.

($w_\alpha \geqslant w_0 \geqslant v_0 \geqslant v_\alpha$; konvergence podle 2.)

Věty 9, 10 se týkají, nepřesně řečeno, konvergence maximálních řešení shora a zleva. Zprava a zdola maximální řešení nemusí konvergovat k w_0, nemusí ani konvergovat.

§ 3. Struktura singulárních bodů

Tento odstavec obsahuje jen jednoduché důsledky definice singulárních bodů. Jedná se postupně o topologii v E^2, topologii na řešení a vyšetření jednoho speciálního předpokladu. Používáme stále označení z § 2, a také částečného uspořádání $P \leqslant Q \iff Q \in T_P^+$ ("Q je vpravo od P").

Věta 11. *Množina singulárních bodů je typu* $F_{\sigma\delta}$.

Důkaz. Pro přirozená n, m a racionální p, q nechť A_{nmpq} je množina bodů $P = [x, y]$ takových, že

$$0 < q - p < n^{-1},\ p < x \leqslant q,\ w_P(q) - v_P(q) \geqslant m^{-1}.$$

A_{nmpq} je uzavřená: když do ní patří $P_i \to P$, pak P leží v daném pásu; a existuje vybraná posloupnost z P_i taková, že $w_{P_i} \rightrightarrows f$, $v_{P_i} \rightrightarrows g$, kde f, g jsou řešení bodem P. Nutně

$$m^{-1} \leqslant f(q) - g(q) \leqslant w_P(q) - v_P(q),$$

tedy $P \in A_{nmpq}$.

Zřejmě $S^+ = \bigcap\limits_n \bigcup\limits_{mpq} A_{nmpq}$ a je typu $F_{\sigma\delta}$; stejně pro S^-.

Věta 12. *Nechť množina oboustranně singulárních bodů je hustá v otevřené G. Pak každým singulárním bodem v G prochází singulární řešení.*

Důkaz. Nechť $S = S^+ \cap S^-$. Nechť $P_0 \in G$ je singulární, na př. pravý. Volme $P_1 \in S \cap T_{P_0}^+$ a řešení f_1 body P_0, P_1. Volme $P_2 \in S \cap T_{P_0}^+ \cap P_{P_1}^-$ tak, aby $\varrho(P_0, P_2) < \left(\frac{3}{4}\right) \varrho(P_0, P_1) > \varrho(P_2, P_1)$ a řešení f_2 body P_0, P_2, P_1 (můžeme totiž od začátku předpokládat $|F| \leqslant 1$). Totéž provedeme s dvojicemi $P_0 P_2$, $P_2 P_1$; dostaneme řešení f_3 body $P_0 P_3 P_2 P_4 P_1$ $\left[\text{vzdálenost dvou po sobě následujících je} < \left(\frac{3}{4}\right)^2 \varrho(P_0, P_1)\right]$; atd. Z $\{f_n\}$ vybereme stejnoměrně konvergující, k f. Pak f je řešením procházejícím všemi P_i, a P_i jsou husté na f. Užijme důsledku věty 14.

Důsledek. *V množině G každé řešení je buď singulární nebo regulární.*

Věta 13. (a) *Nechť* $P \in S^+$ *2. druhu. Pak existují posloupnosti* P_n, Q_n *1. druhu tak, že* $P_n \in S^+$, $Q_n \in S^-$, $P \leqslant P_n \to P$, $P \leqslant Q_n \to P$.

(b) *Nechť* P_n *jsou singulární 2. druhu,* $P_n \to P$, *buď* $P_n \leqslant P$ *nebo* $P \leqslant P_n$. *Pak* P *je singulární.*

(c) *Nechť* $P_n \in S^+$, $P \leqslant P_n \to P$. *Pak* $P \in S_+$.

Důkaz. (a) Nechť $P = [x, y]$; existují čísla x_n, z_n tak, že $x_n \to x^+$, $z_n \to x^+$, $w_P(x_n) - v_P(x_n) > 0 = w_P(z_n) - v_P(z_n)$.

[8]) [9], str. 53.

[9]) F_ε spojité omezené v E^2.

Lze předpokládat $x_{n+1} < z_{n+1} < x_n < z_n$. Pro každé n existuje nejmenší číslo $u_n \leqslant z_n$ takové, že $w_P = v_P$ v intervalu $\langle u_n, z_n \rangle$. Pak ovšem $x_n < u_n \leqslant z_n$, $x < u_n \to x$, $[u_n, w_P(u_n)] \in S^-$ 1. druhu a konvergují k P. Podobně pro S^+.

(b) Lze předpokládat, že všechny $P_n \in S^+$. Když stále $P \leqslant P_n$, zřejmě $w_P - v_P \geqslant w_{P_n} - v_{P_n}$, což je >0 vpravo od P_n blízko k P_n, t. j. blízko k P. Když $P_n < P$, lze volit $Q_n \in S^-$, $P_n \leqslant Q_n$ blízko k P_n podle (a), a dokonce tak, aby $P_n \leqslant Q_n < P$. Pak opakujeme dřívější úvahu „zleva".

(c) Bylo dokázáno v první části (b).

Poznámka. Vzhledem k (a) body 1. druhu vytvářejí body 2. druhu. Singulární 1. druhu mohou konvergovat k obyčejnému bodu (příklad 7.).

Věta 14. *Nechť f je řešení. Množina singulárních bodů na f je rozdílem množiny uzavřené na f a spočetné.*

Důkaz. Řešení je homeomorfní s $\boldsymbol{E}^1$ (i pořádkově isomorfní); můžeme tedy mluvit o intervalech na řešení.

Bod $P \in f$ je obyčejný zprava právě když $w_P = v_P$ na intervalu s P jako levým koncem; všechny jeho vnitřní body jsou obyčejné zprava. Komponenty množiny A bodů obyčejných zprava jsou disjunktní nedegenerované intervaly; je jich tedy jen spočetně mnoho; A je pak otevřená plus spočetná (konce intervalů), takže $S^+ \cap f = f - A$ je uzavřená minus spočetná. Stejně pro S^-.

Důsledek. *Nechť na f je S^+ hustá. Pak každý bod $P \in f$ je $\in S^+$* (viz důkaz).

Řekneme, že množina $A \subset \boldsymbol{E}^2$ *protíná trajektorie*, když

$$P, Q \in A, P \neq Q \Longrightarrow \text{neexistuje řešení body } P, Q.$$

Lemma. *Nechť A protíná trajektorie. Pak množina $A \cap S^+$ je tvaru spočetná plus podmnožina $S^{+d} \cap S^{-d}$.*[10])

Důkaz. Máme dokázat, že $B = A \cap S^+ - (S^{+d} \cap S^{-d})$ je spočetná. Pro každý $P \in B$ nechť G_P je otevřené okolí P, v němž buď nejsou $Q \in S^+ - P$, nebo nejsou $Q \in S^- - P$. Nechť $H_P = G_P \cap T_P^{+0}$.[10]) Množiny H_P jsou otevřené a neprázdné (neboť $P \in S^+$). Snadnou úvahou máme: protnou-li se dvě různé T_P^{+0}, T_Q^{+0}, je buď jedna částí druhé (nemůže nastat — A protíná trajektorie) nebo na hranicích T_P^+, T_Q^+ jsou body z S^+ i z S^-. Z naší konstrukce plyne, že množiny H_P jsou tedy disjunktní. Pak jich je jen spočetně mnoho.

Vyslovme jeden značně omezující předpoklad:

$$(S) \quad S \cap S^{+d} \cap S^{-d} \text{ je spočetná.}$$

Je celkem samozřejmé, že je-li splněn (S) jen v části roviny $\boldsymbol{E}^2$, musíme následující výsledky relativisovat.

Věta 15. *Za předpokladu (S) množina singulárních bodů má míru* 0.

Důkaz. Každá rovnoběžka s osou y protíná trajektorie; množina singulárních bodů na ní je tedy spočetná. Užijeme věty 11 a Fubiniovy.

Věta 16. *Za předpokladu (S), když hladká regulární křivka C sestává ze singulárních bodů, pak je částí singulárního řešení.*

Důkaz. C je popsána rovnicemi

$$\left.\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \end{aligned}\right\} \quad t \in \mathcal{J},\ \dot{x}^2 + \dot{y}^2 \neq 0.$$

Kdyby pro některé t bylo $\dot{y}(t) \neq F(x(t), (t)) \cdot \dot{x}(t)$, pak v okolí $[x(t); y(t)]$ by C

[10]) X^d je derivace, X^0 vnitřek množiny X.

protínalo trajektorie; tedy by C byla spočetná (lemma), spor. Tedy všude $\dot{y} = F(x, y) \cdot \dot{x}$, takže $\dot{x} \neq 0$, C je řešením.

§ 4. Unicita

Věta 17. *Maximální řešení w_0 je infimem majorant počátkem. Dokonce je $f_n \rightrightarrows w_0$ pro vhodné hladké majoranty počátkem.*[11])

Důkaz. Pro každou majorantu f počátkem je $f > w_0$ v $(0, +\infty)$ (věta 6). Řešení f_n rovnice $y' = F(x, y) + n^{-1}$ počátkem jsou hladké majoranty, $f_n \rightrightarrows w_0$ (věta 8).

Příklady 1, 2 nám napovídají následující velmi primitivní kriterium singularity.

Věta 18. *Nechť $F(x, y) = |y|^\alpha G(x, y)$, kde $0 < \alpha < 1$, G je konečná a buď $G(x, y) > > A > O$ nebo $G(x, -y) < -A < 0$ pro $y > 0$. Pak počátek je zprava singulární 1. druhu.*

Důkaz. Lze předpokládat, že podmínky na G platí i pro $y = 0$. Uvažme, že 0 je řešení počátkem. Nechť nastává prvý případ; nechť f je hladká majoranta počátkem. Pak $f > 0$ (věta 6), takže $f' > f^\alpha \cdot A$; f je tedy majorantou rovnice $y' = A \cdot |y|^\alpha$; odtud $f > B \cdot x^\beta$, takže i $w_0 \geq B \cdot x^\beta > 0$ (věty 6, 17).

Dále, je-li g řešení $y' = F(x, y)$, je $-g$ řešení rovnice $y' = -F(x, y)$. Tím je druhý případ převeden na prvý.

Poznámka. Nepřesně řečeno, podmínka věty je asi toho rázu jako Lipchitzova podmínka (t. j. případ $\alpha \geq 1$, G omezená).

Předcházející věta trochu připomíná kriterium divergence integrálu srovnáním s mocninou. Vzniká tedy otázka po obecnější podmínce unicity, která srovnává dvě diferenciální rovnice.

Věta 19. *Nechť také G je spojitá omezená v E^2, $G(x, 0) = 0$. Nechť platí jedna z těchto podmínek*

$$F(x, y_1) - F(x, y_2) \leq G(x, y_1 - y_2) \quad \text{všude, nebo}$$
$$F(x, y_1) - F(x, y_2) \geq G(x, y_1 - y_2) \quad \text{všude.}$$

Nechť $[x_0, 0]$ je zprava obyčejným bodem rovnice $y' = G(x, y)$. Pak každý $P = [x_0, y_0]$ je zprava obyčejným bodem rovnice $y' = F(x, y)$.

Důkaz. Uvažme především, že $y' = G(x, y)$ má jediné řešení 0 (v okolí počátku). Nechť g_α je řešením rovnice $y' = G(x, y) + \alpha$ (i pro $\alpha < 0$). Podle vět 6,8 je v prvém případě

$$0 \leq w_P - v_P \leq g_\alpha \rightrightarrows 0 \quad \text{pro } \alpha \to 0^+;$$

v druhém případě je

$$0 \geq v_P - w_P \geq g_\alpha \rightrightarrows 0 \quad \text{pro } \alpha \to 0^-.$$

Poznámka. V [4] je podmínka $|F(x, y_1) - F(x, y_2)| \leq G(x_1 |y_1 - y_2|)$.[12]) Ježto $|w_P - v_P| = w_P - v_P, F(x, y_1) - F(x_1, y_2) \leq |F(x_1, y_1) - F(x, y_2)$, jedná se o speciální případ prvé varianty ve větě 19. Odtud pak plynou[12]) klasické podmínky: Nagumo, Osgood, Lipschitz.

Někdy je postaven trochu jednodušší problém: je dáno řešení bodem P, určiti, zda je jediné (podmínkou tohoto druhu je i věta 18). V tom případě máme i kriterium singularity:

Věta 20. *Nechť také G je spojitá omezená v E^2, $G(x, 0) = 0$; nechť f je řešení $y' = = F(x, y)$ bodem $P = [x_0, y_0]$. Nechť*

$$G(x, y) \leq F(x, f(x) + y) - F(x, f(x))$$

---

[11]) Viz pozn. [7]). Perronova věta, [1]. Ovšem Perron podal přímý důkaz, jako variantu existenční věty.

[12]) [4], str. 139—142. Kamke formuluje dokonce pro soustavy rovnic.

všude. Nechť $[x_0, 0]$ *je singulární zprava (nebo dokonce 1. druhu) pro rovnici* $y' = G(x, y)$. *Pak P je singulární zprava (resp. 1. druhu) pro rovnici* $y' = F(x, y)$.

Důkaz. Položme $H(x, y) = F(x, f(x) + y) - F(x, f[x])$. Uvažme, že g je řešením $y' = H(x, y)$ bodem $[x_0, 0]$ právě když $f + g$ je řešením $y' = F(x, y)$ bodem P. Označme w_G, v_G max. a min. řešení $y' = G(x, y)$ bodem $[x_0, 0]$.

Je-li $w_G > 0$ v pravém okolí x_0, je-li h_α řešení rovnice $y' = H(x, y) + \alpha$ $(\alpha > 0)$, máme $0 < w_G < h_\alpha \rightrightarrows h$, kde $f + h$ je řešení $y' = F(x, y)$ bodem P. Je-li však $v_G < 0$ v pravém okolí x_0, máme $-G(x, -y) > -H(x, -y) - \alpha$ a postupujeme podobně.

§ 5. Příklady a problémy

Příklady 1, 2 obsahují „nenásilné" diferenciální rovnice se singularitami. Příklad 4 naznačuje konstrukci singularity 2. druhu — viz též příklad 8. Ostatní ilustrují různé situace. Je patrný způsob „skládání singularit".

1. $y' = \sqrt{|y|}$ [13]. Osa x sestává z oboustranně singulárních bodů 1. druhu.

2. $y' = \sqrt{1 - y^2}$ pro $|y| < 1$, jinde $= 0$. Singulární řešení jsou přímky $y = -1$, $y = 1$, sestávající ze singulárních bodů resp. zprava a zleva.

3. $y' = 1 - \exp\sqrt{|x - 1| \cdot |y|}$. Osa x je singulární (věta 18, pro $x = 1$ ještě věta 14, důsledek).

4. $$\begin{aligned} y' &= y \cdot \frac{\sin x}{1 - \cos x} && \text{pro } 0 \leqq x \leqq 2\pi, |y| \leqq 1 - \cos x \text{ (řešení } c(1 - \cos x)) \\ &= \sin x \cdot \operatorname{sgn} y && \text{pro } 0 \leqq x \leqq 2\pi, |y| > 1 - \cos x \text{ (řešení } 1 - \cos x) \\ &= 0 && \text{jinde.} \end{aligned}$$

Jsou právě dva singulární body: $[0,0]$ zprava, $[2\pi, 0]$ zleva.

5. $$\begin{aligned} y' &= \frac{x}{y} \operatorname{sgn} x && \text{pro } y > |x| \text{ (řešení } y^2 \mp x^2 = a^2 \text{ pro } x \gtrless 0) \\ &= 1 && \text{jinde.} \end{aligned}$$

Pravá strana je omezená a není spojitá.

6. $$\begin{aligned} y' &= y \frac{\sin x}{1 - \cos x} && \text{pro } |y| \leqq 1 - \cos x \text{ (řešení } c[1 - \cos x] \text{ v } \langle 0, 2\pi \rangle) \\ &= (\pm 1 - y) \operatorname{tg} x && \text{pro } 1 - \cos x \leqq \pm y \leqq 2, ([1 - c \cdot \cos x] \operatorname{sgn} y \text{ v } \langle -\pi, \pi \rangle) \\ &= 0 && \text{jinde.} \end{aligned}$$

Spočetná uzavřená množina isolovaných singulárních bodů. Řešení v pásu $-1 < y < 1$ lze zobrazit do $I^{\aleph_0}$: řešení f přiřadíme $\{f(k\pi)\}_{-\infty}^{\infty}$.

7. Snadno se ukáže, že existuje diferenciální rovnice se spojitou pravou stranou, která má řešení

$$\begin{array}{lll} \alpha(1 - \cos(x + \alpha)) & \text{s } 0 < \alpha \leqq \pi & \text{pro } -\alpha \leqq x \leqq \pi - \alpha \\ 1 - \cos(x + \alpha) & \text{s } \alpha > \pi & \text{pro } x \leqq -\alpha \\ \text{konstanta} & \text{jinde.} & \end{array}$$

(Lze použít pozn. 2 k větě 2). Každý bod na záporné ose x je zprava singulární; počátek je obyčejný bod.

8. V každém pásu $a \leqq x \leqq b$, kde (a, b) je styčný interval Cantorova diskontinua $(b - a = 3^{-n})$ nechť pole řešení je takové jako v př. 4 s tím rozdílem, že „výška" (t. j. oscilace řešení) je $\leqq 3^{-2n}$. V každém jiném bodě nechť $y' = 0$. Příslušná diferenciální rovnice má spojitou pravou stranu. Každý bod Cantorova diskontinua je singulární 2. druhu.

---

[13]) [4'], str. 353.

Problémy

1. Dokázat nebo zamítnout tvrzení, že když v pravé polorovině nejsou sing. body, množina singulárních bodů na ose y je řídká.

Poznámka. Když je splněn předpoklad, pak maximální a minimální řešení bodů na ose y vytínají na $x = 1$ disjunktní uzavřené intervaly. Přiřaďme každému styčnému intervalu diskontinua na $x = 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$ příslušný „diadický" bod na $x = 0$, $0 \leqslant y \leqslant 1$. Lze sestrojit diferenciální rovnici? (M. Neubauer).

2. Dokázat, že množina singulárních bodů v E^2 je F_σ. Dokázat, že nemusí být G_δ.

3. Je množina singulárních bodů řídká v E^2? Může protnout osu v intervalu?

4. Úplně popsat strukturu singulárních bodů když je jen „konečný počet singulárních řešení" (jak přesně formulovat?).

5. Jak rozšířit theorii na dynamické systémy v rovině? na soustavy rovnic?

Poznámka. Pokud se týká soustav, fundamentální větu 6 nelze rozšířit v plném znění — [2], a nové práce sovětských autorů. Na druhé straně v. také [9].

Literatura

[1] O. Perron, *Ein neuer Existenzbeweis für die Integrale der Differentialgleichung* $y' = F(x, y)$, Math. Ann., 76, 1915, str. 471.

[2] S. A. Čaplygin, *Sobranije sočiněnij I*, Gostechizdat, 1948, str. 347.

[3] G. Peano, *Démonstration de l'intégrabilité des équations différentielles ordinaires*, Math. Ann., 37, 1890, str. 182.

[4] E. Kamke, *Differentialgleichungen reeler Funktionen*, Leipzig, 1930.

[4'] E. Kamke, *Differentialgleichungen, Lösungsmethoden u. Lösungen*, Leipzig, 1951.

[5] P. S. Alexandrov, *Úvod do obecné teorie množin a funkcí* (překlad z ruštiny), Praha, 1954.

[6] K. Kuratowski, *Wstep do teorii mnogości i topologii*, Warszawa, 1955.

[7] G. Birkhoff, *Těorija struktur* (překlad z angličtiny), IIL, 1952.

[8] G. Mie, *Beweis der Integrierbarkeit gewöhnlicher Differentialgleichungssysteme nach Peano*, Math. Ann., 43, 1893.

[9] Fukuhara, Proc. Imp. Acad. Jap., 4, 1928, str. 447.

F. FABIAN

K THEORII REGRESE A VYROVNÁNÍ ROZDĚLENÍ STATISTICKÝCH SOUBORŮ

1

Věda má poskytnout člověku poznání zákonitostí reálného světa, které jej vyzbrojují k tomu, aby prakticky měnil skutečnost. Pouze znalost objektivních zákonů umožňuje předvídat vývoj událostí a tudíž účelně jednat. Vynikající ruský chemik Mendělejev řekl o přírodovědě: „Vědecké zkoumání věci má dva základní, nebo konečné cíle: předvídání a užitek." Předvídání podle Mendělejevových slov „... má ten nejvyšší význam, že ukazuje lidem možnost proniknout v samu podstatu věci. Na druhé straně splnění vědeckých předpovědí by mělo pro lidi velmi malý význam, kdyby nakonec nevedlo k přímému všeobecnému užitku. Tento užitek vyplývá z toho, že vědecké předvídání, které spočívá na studiu, poskytuje lidem takovou jistotu, že mohou usměrňovat podstatu věcí žádaným směrem a dosahovat toho, aby žádané a chtěné se přiblížilo ke skutečnému a neviditelné k viditelnému."

Úkol vědy spočívá v tom, aby za zdánlivým chaosem nesčetných jevů vystupujících na povrch, našla vnitřní zákony, kterým je vývoj jevů podřízen, a aby pronikla do jejich podstaty.