Bohdan Klimeš

Odvození Steinerovy věty pro moment setrvačnosti ze zákona o zachování energie

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 1 (1956), No. 5-6, 721--724

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/137349

tedy

$$\varphi(p_i) \leqq p_{i+1} < \varphi(p_i + 1). \tag{39}$$

Podle (34) a (36) je $N \leqq p_0$, plyne tedy z (39) a z předpokladu $\varphi(n) > n$ pro všechna $n \geqq N$

$$N \leqq p_0 < p_1 < p_2 < \ldots < p_r. \tag{40}$$

Podle (30) je $\sigma'(m) > \sigma'(n)$, a dále podle (39) platí

$$\sigma'(p_0) < \sigma'(p_1),\ \sigma'(p_1) < \sigma'(p_2), \ldots, \sigma'(p_{r-1}) < \sigma'(p_r),$$

tedy

$$\sigma'(p_r) \geqq \sigma'(p_0).$$

Je však podle (35)

$$p_r = \psi(k).$$

Dále platí podle (34) $N \leqq p < \varphi(N)$, podle (32) $\sigma'(p) \geqq \sigma$ a podle (36) $p_0 = p$, tedy

$$\sigma'[\psi(k)] > \sigma'(p_r) = \sigma'(p) \geqq \sigma,$$

tedy

$$\sigma'\ [\psi(k)] > \sigma. \tag{41}$$

Podle (33) je však

$$\sigma'[\psi(k)] < \sigma. \tag{42}$$

Z (29), (32), (40) plyne $\sigma'[\psi(k)] \neq \sigma$, jsou tedy nerovnosti (41) a (42) ve sporu.

Vede tedy předpoklad $\varphi(n) > n$, $\psi(n) > n$ pro všechna $n \geqq N$ ke sporu. Úplně stejně lze dokázat, že nemůže současně platit $\varphi(n) < n$, $\psi(n) < n$ pro všechna dosti velká n, musí tedy být stále (od určitého n) buď $\varphi(n) < n$, $\psi(n) > n$, nebo $\varphi(n) > n$, $\psi(n) < n$, tedy platí pro všechna n od určitého počínaje

$$\operatorname{sign}\ [\varphi(n) - n]\ [\psi(n) - n] = \operatorname{sign}\ {}^1\alpha'\ {}^2\alpha'.$$

Stejně však musí platit

$$\operatorname{sign}\ [\varphi(n) - n]\ [\psi(n) - n] = \operatorname{sign}\ {}^1\alpha''\ {}^2\alpha''$$

pro všechna n od určitého počínaje. Je však ${}^1\alpha'\ {}^2\alpha' < 0$, ${}^1\alpha''\ {}^2\alpha'' > 0$, tedy

$$\operatorname{sign} {}^1\alpha'\ {}^2\alpha' \neq \operatorname{sign} {}^1\alpha''\ {}^2\alpha'',$$

což je spor. Tím je věta 4 dokázána.

Z vět 1 až 4 pak plyne věta hlavní.

BOHDAN KLIMEŠ

ODVOZENÍ STEINEROVY VĚTY PRO MOMENT SETRVAČNOSTI ZE ZÁKONA ZACHOVÁNÍ ENERGIE

Moment setrvačnosti tělesa je fysikální veličina, která charakterisuje setrvačné vlastnosti tělesa při otáčivém pohybu. Na rozdíl od hmoty tělesa, která je fysikální veličinou, charakterisující setrvačné vlastnosti tělesa při postupném pohybu a která je pro dané těleso konstantní (nepřihlížíme-li k relativistickému zvětšení hmoty při velkých rychlostech), je moment setrvačnosti závislý na poloze osy rotace vůči tělesu. Známe-li však moment setrvačnosti tělesa k některé ose, můžeme pomocí Steinerovy věty (4) stanovit moment setrvačnosti téhož tělesa ke každé ose, která je s danou osou rovnoběžná. Steinerova věta se uplatňuje v praxi zejména při experimentálním stanovení momentu setrvačnosti tělesa k ose procházející těžištěm z doby kyvu tělesa, nebo při určování vzdálenosti těžiště od osy rotace, na př. u nevyvážených setrvačníků.

Moment setrvačnosti můžeme definovat na př. při výpočtu kinetické energie otáčivého pohybu. Těleso si představíme složené z malých elementů o hmotě dm, jejichž kolmá vzdálenost od osy rotace je r. Kinetická energie jednoho elementu má při rotaci úhlovou rychlostí ω hodnotu

$$dW_k = \frac{1}{2} v^2 \, dm = \frac{1}{2} \omega^2 r^2 dm$$

a celková kinetická energie otáčivého pohybu tělesa je

$$W_k = \int_V \frac{1}{2} \omega^2 r^2 dm = \frac{1}{2} \omega^2 \int_V r^2 \, dm, \tag{1}$$

při čemž se integrace vztahuje na celé těleso. Kinetická energie otáčivého pohybu je úměrná polovině čtverce úhlové rychlosti, při čemž je konstanta úměrnosti určena integrálem na pravé straně rovnice (1)

$$I = \int_V r^2 \, dm. \tag{2}$$

Tuto konstantu, jejíž velikost závisí na hmotě tělesa, na jeho tvaru a na poloze osy rotace, avšak nikoli na úhlové rychlosti, nazýváme moment setrvačnosti I tělesa k dané ose. Kinetická energie rotace kolem dané osy je potom

$$W_k = \frac{1}{2} I \omega^2. \tag{3}$$

Moment setrvačnosti I definujeme z rovnice (3) jako dvojnásobek konstanty úměrnosti mezi kinetickou energií W_k a čtvercem úhlové rychlosti ω.

Rovnici (2) nemůžeme pokládat za definici momentu setrvačnosti tělesa, nýbrž pouze za výraz, ze kterého je možno moment setrvačnosti k dané ose vypočíst. Běžné odvození Steinerovy věty, které stručně uvedeme, se opírá právě o tento výraz.

Nechť je osa rotace kolmá k nákresně (viz obraz) a nechť prochází bodem A. Souřadnicové osy umístíme tak, aby počátek O ležel v těžišti tělesa a osa x procházela bodem A a byla kolmá k ose rotace. Pro čtverec vzdálenosti r elementu dm od osy rotace pak platí

$$r^2 = (a + x)^2 + y^2 = a^2 + 2\,ax + x^2 + y^2 = a^2 + 2\,ax + r_0^2,$$

kde r_0 je vzdálenost elementu dm od rovnoběžné osy, procházející těžištěm. Dosazením do rovnice (3) dostaneme

$$I = \int_V a^2 \, dm + \int_V 2\,ax dm + \int_V r_0^2 \, dm = a^2 \int_V dm + 2\,a \int_V x dm + \int_V r_0^2 \, dm =$$
$$= ma^2 + O + I_0.$$

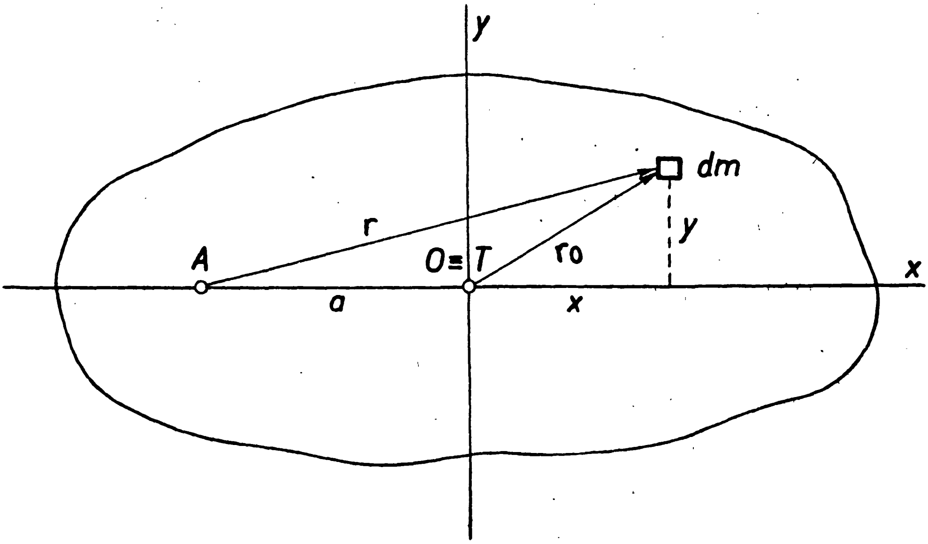
Prvý integrál jde přímo provést, m značí úhrnnou hmotu tělesa a a kolmou vzdálenost osy rotace od těžiště; druhý integrál má význam statického momentu všech elementů tělesa k těžišti a je roven nule, třetí integrál značí moment setrvačnosti I_0 tělesa k rovnoběžné ose procházející těžištěm. Tím dostaneme jednoduchý vztah mezi momentem setrvačnosti k dané ose a momentem setrvačnosti k rovnoběžné ose jdoucí těžištěm:

$$I = I_0 + ma^2 \tag{4}$$

(*Steinerova věta*). Známe-li polohu těžiště tělesa a jeden z obou momentů setrvačnosti, můžeme vypočíst moment setrvačnosti ke každé rovnoběžné ose.

Uvedené odvození Steinerovy věty má dvě nevýhody. Jednak nevychází z definice momentu setrvačnosti, nýbrž z výrazu pro jeho výpočet, a není proto dosti názorné, jednak vyžaduje znalost integrálního počtu. Odvození pomocí zákona zachování energie nemá těchto nevýhod a opírá se pouze o dynamické úvahy.

Při úvahách o postupném pohybu můžeme nahradit kterékoli těleso hmotným bodem a počítat tak, jakoby hmota celého tělesa byla soustředěna v jediném bodě, jehož poloha je určena polohou těžiště (hmotného středu) tělesa. Není-li těžiště v klidu, koná těleso postupný pohyb. Rotuje-li těleso úhlovou rychlostí ω kolem osy, neprocházející těžištěm, můžeme rozložit pohyb tělesa do dvou složek. Jednak koná těleso postupný



Obr. 1

pohyb (translaci), při kterém se jeho těžiště pohybuje po kružnici s poloměrem a (viz obraz) rychlostí

$$v = a\,\omega,$$

druhou složkou pohybu pak je otáčivý pohyb s úhlovou rychlostí ω kolem rovnoběžné osy, procházející těžištěm. Každému z těchto pohybů přísluší určitá kinetická energie, postupnému energie W_{k1}, otáčivému W_{k2}:

$$W_{k1} = \frac{1}{2}\,mv^2 = \frac{1}{2}\,ma^2\,\omega^2, \quad W_{k2} = \frac{1}{2}\,I_0\,\omega^2,$$

kde I_0 značí moment setrvačnosti tělesa k ose procházející těžištěm. Součet těchto dvou energií se podle zákona zachování energie musí rovnat úhrnné kinetické energii W_k rotace kolem prvné osy, neprocházející těžištěm, která je určena rovnicí (3). Porovnáním dostaneme

$$W_k = W_{k1} + W_{k2},$$

$$\frac{1}{2}\,I\,\omega^2 = \frac{1}{2}\,ma^2\,\omega^2 + \frac{1}{2}\,I_0\,\omega^2.$$

Po zkrácení činitelem $\frac{1}{2}w^2$ nám vyjde přímo Steinerova věta:

$$I = ma^2 + I_0. \tag{4}$$

S hlediska tohoto odvození je Steinerova věta přímým důsledkem skládání elementárních pohybů, z nichž vzniká otáčení kolem pevné osy a je vlastně vyjádřením zákona o zachování energie pro tento případ. Oba dva členy na pravé straně dostávají názorný význam: Prvý z nich je příspěvek postupného pohybu těžiště, druhý je způsoben rotací kolem těžiště. Z postupu odvození je ihned patrno, že je zvětšení momentu setrvačnosti k ose, která neprochází těžištěm, způsobeno právě postupným pohybem tělesa, který je součástí rotace okolo pevné osy a na který se neprávem často zapomíná.

KAREL ŠOBRA

(Ústav technické fysiky ČSAV — Praha)

SLEDOVÁNÍ POSTUPNÉHO EXPLOSIVNÍHO PŘEPALOVÁNÍ TENKÝCH DRÁTKŮ POMOCÍ VYSOKOFREKVENČNÍ FOTOKOMORY

V článku je na snímcích přepalování měděných a wolframových drátků ukázáno použití vysokofrekvenční fotokomory velmi jednoduché konstrukce. Uvedené obrázky rovněž doplňují dosavadní oscilografická měření a fotografická pozorování přepálení, prováděná jinými výzkumníky.

Necháme-li vybít kondensátor přes slabý drátek, nastane prudké ohřívání drátku, případně podle experimentálních podmínek, explosivní odpaření. Při tomto procesu je možno dosáhnout ve velmi krátkém čase vysokých teplot — až několik desítek tisíc stupňů, což dává možnost na příklad vysokointensivních světelných spektrálních zdrojů. Lze také sledovat chování různých materiálů při průchodu vysokointensitního proudu, řádově i 10^6 A/cm^2, se současným pozorováním platnosti Ohmova zákona za těchto podmínek. Kromě okolnosti, že drátové pojistky byly dříve jedinou možností ochrany elektrické sítě před přetížením, je v procesu přepálení drátku několik problémů, které byly velmi intensivně sledovány za účelem praktického užití přepálení drátku.

Jako hlavní měřicí methoda se jeví sledování elektrických veličin při přepálení a následujícím samostatném výboji pomocí oscilografu. Touto methodou se zabýval Ing. Wrana [1] a jeho výsledky byly v poslední době znovu několika autory potvrzeny [2, 3]. Pomocí této methody bylo zjištěno, že drátky z některých materiálů, na př. z mědi, jeví v průběhu vybíjecího proudu kondensátoru přetržku podle počátečního napětí různě dlouhou, zatím co u jiných kovů (wolfram a pod.), se tato pausa neprojeví. Tento jev byl vysvětlen takto:

U měděného drátku nastává v prvém stadiu průchodu proudu ohřívání vlivem vnitřního ohmického odporu, což má za následek roztavení, případně až explosivní odpaření drátku. Tím nastává přerušení vybíjecího okruhu a proud klesne na nulu a na takto vzniklém jiskřišti se objeví celé zbytkové napětí kondensátoru. Při dostatečném počátečním napětí je i toto zbytkové napětí dostatečně vysoké a vzniká v excitovaných parách mědi z drátku normální jiskrový výboj, provázený