Václav Havel

Několik poznámek k theorii promítání

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 1 (1956), No. 5-6, 692--694

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/137348

VÁCLAV HAVEL

NĚKOLIK POZNÁMEK K THEORII PROMÍTÁNÍ

Tento příspěvek se skládá ze dvou samostatných částí. V první části se podává elementární důkaz zobecněné věty Kruppovy, zvané též někdy základní větou centrální axonometrie, a vícerozměrné zobecnění věty Glagolevovy o perspektivní poloze dvou simplexů s vlastními vrcholy. V druhé části se vyšetřuje v zobecněném promítání Mongeově určení bodového útvaru prostřednictvím jeho orthogonálních průmětů.

1. O větě Kruppově a Glagolevově

Budeme vyšetřovat reálný rozšířený prostor E_n $(n = 3)$ a zavedeme nejprve několik potřebných pojmů.

Souřadnicovou konfigurací nazveme posloupnost vzájemně různých bodů O', A'_1, $A'_2, \ldots, A'_n, B'_1, B'_2, \ldots, B'_n$, přičemž úsečky $O'A'_i$ jsou vzájemně kolmé a stejně dlouhé, a každý bod B' je nevlastním bodem přímky $O'A'_i$.

Za d_1-konfiguraci prohlásíme posloupnost bodů $O, A_1, A_2, \ldots, A_n, B_1, B_2, \ldots, B_n$, ležících v téže vlastní nadrovině ϱ, při čemž každá trojice O, A_i, B_i obsahuje různé kolineární body $B_1, B_2, \ldots, B_n$ lineárně vytvářející nadrovinu ϱ. Přidruženou kvadriku definujeme takto: Vytvářejí-li body $A_1, A_2, \ldots, A_n$ lineárně nadrovinu ϱ, pak existuje podle Desarguesovy věty k simplexům $A_1A_2 \ldots A_n, B_1B_2 \ldots B_n$, perspektivním podle O, osa perspektivity; je jí $(n - 2)$ rozměrný podprostor p. Jestliže body $A_1, A_2, \ldots, A_n$ jsou lineárně závislé, pak vytvářejí lineárně $(n - 2)$ rozměrný podprostor, který označíme rovněž p. Harmonický pól prostoru p vzhledem k simplexu $B_1B_2 \ldots B_n$ označme P. Potom $(n - 1)$ rozměrnou kvadriku, pro niž $B_1B_2 \ldots B_n$ je polární simplex a p, P polárně sdruženou dvojicí, nazveme přidruženou k dané d_1-konfiguraci. (Tato přidružená kvadrika je vždy imaginární, jak lze snadno dokázat.)

Dokážeme elementárním způsobem větu, která je vícerozměrným zobecněním jedné věty Kruppovy, a která bývá též označována jako první základní věta centrální axonometrie (viz [2]).

Věta 1. *Daná d_1-konfigurace je průmětem některé souřadnicové konfigurace, právě když přidružená kvadrika je imaginární sférou.*

Důkaz. a) Nechť d_1-konfigurace $\vartheta = \{O, A_1, A_2, \ldots, A_n, B_1, B_2, \ldots, B_n\}$, ležící v nadrovině ϱ, je průmětem souřadnicové konfigurace $\gamma = \{O', A'_1, A'_2, \ldots, A'_n, B'_1, B'_2, \ldots, B'_n\}$ z centra S. Bod S je vlastní; kdyby byl nevlastní, pak průměty B_i bodů B'_i byly by nevlastní, a tedy body B_i byly by lineárně závislé, což odporuje definici d_1-konfigurace. Poněvadž přímka $O'A'_{i_1}$ je kolmá k nadrovině $O'A'_{i_2}A'_{i_3} \ldots A'_{i_n}$ $(i_1, i_2, \ldots, i_n$ je libovolné pořadí indexů $1, 2, \ldots, n)$, je též přímka SB_{i_1} kolmá k nadrovině $SB_{i_2} \ldots \ldots B_{i_n}$. Dokážeme, že též přímka SP je kolmá k nadrovině $S\mathsf{p}$ (P, p byly definovány při výkladu pojmu přidružené kvadriky). Vskutku, sestrojme nadrovinu α_{i_1, i_2}, která prochází body O', $A'_{i_3}, A'_{i_4}, \ldots, A'_{i_n}$ a je kolmá k přímce $A'_{i_1}A'_{i_2}$; α_{i_1, i_2} prochází středem M_{i_1, i_2} úsečky $A'_{i_1}A'_{i_2}$, a tedy přímka SP je rovnoběžná s α_{i_1, i_2}. Podrobně: Nevlastní body přímek $O'A'_{i_1}$, $O'A'_{i_2}$, $O'M_{i_1, i_2}$, $A'_{i_1}A'_{i_2}$ tvoří harmonickou čtveřinu, a tedy též průměty těchto nevlastních bodů z S do ϱ tvoří harmonickou čtveřinu. Avšak tyto průměty jsou body $B_{i_1}B_{i_2} \cap \mathrm{p}$, $B_{i_1}B_{i_2} \cap PB_{i_2} \dots B_{i_n}$, $B_{i_1}B_{i_2}$. Tedy bod P je průmětem nevlastního bodu nadroviny α_{i_1, i_2}.

Avšak p je průmětem nevlastního útvaru nadroviny $A'_1 A'_2 \dots A'_n$ takže společná přímka nadrovin α_{i_1, i_2}, která je kolmá k $A'_1 A'_2 \dots A'_n$, je rovnoběžná s přímkou SP, a tedy SP je kolmé k S p.

Kvadrika přidružená je základní kvadrikou polarity $\mathfrak{P}$ v nadrovině ϱ; polarita $\mathfrak{P}$ promítá se z S polaritou $\mathfrak{P}$. Vzhledem k tomu, že každá přímka SB_{i_1} je kolmá k nadrovině $SB_{i_2} \dots B_{i_n}$ a k tomu, že přímka SP je kolmá k nadrovině S p, je polarita $\mathfrak{P}$ pravoúhlá. Z projektivní geometrie je známo, že pak základní kvadrika polarity $\mathfrak{P}'$ je imaginární sférou. Avšak tato základní kvadrika je kvadrikou přidruženou, takže přidružená kvadrika je vskutku imaginární sférou.

b) Nechť d_1-konfigurace $\vartheta = \{O, A_1, A_2, \dots, A_n, B_1, B_2, \dots B_n\}$, ležící v nadrovině ϱ, má za přidruženou kvadriku k imaginární sféru. Za střed promítání prohlásíme bod S, který je stejně vzdálen od nadroviny ϱ jako od středu kvadriky k. Na přímce SO zvolme libovolně bod O' (vlastní a různý od S), veďme jím přímky $a_i \parallel SB_i$ a určeme na nich body $A'_i = a_i \cap SA_i$ $(i = 1, 2, \dots, n)$. Body A'_i jsou vlastní. Každá přímka a_i je zajisté kolmá k nadrovině, lineární vytvořené ostatními a_i. Tedy úsečky $O'A'_i$ jsou navzájem kolmé. Dokažme, že jsou též stejně dlouhé.

Simplexem $O'A_{i_2} \dots A_{i_n}$ proložme nadrovinu α_{i_1, i_2} kolmou k přímce $A_{i_1}A_{i_2}$ (i_1, $i_2, \dots i_n$ je libovolné pořadí indexů $1, 2, \dots, n$). Nadrovina α_{i_1, i_n} obsahuje nevlastní bod přímky SP. Podrobně: Kvadrika k je imaginární sférou, a tedy, jak je známo z projektivní geometrie, protože P, p jsou polárně sdruženy vzhledem ke k, tedy přímka SP je kolmá k S p. Avšak p je průmětem nevlastního útvaru nadroviny $A'_1 A'_2 \dots A'_n$, takže α_{i_1, i_2} obsahuje nevlastní bod přímky SP.

Harmonické čtveřině bodů $B_{i_1}B_{i_2} \cap \mathrm{p}$, $B_{i_1} B_{i_2} \cap PB_{i_2} \dots B_{i_n}$, $B_{i_1} B_{i_2}$ odpovídá harmonická čtveřina přímek, jdoucích bodem O', a to: přímky b_{i_1, i_2} rovnoběžné s $B_{i_1}B_{i_2}$, přímky $b^*_{i_1, i_2}$ půlící úsečku $A_{i_1} A_{i_2}$ a přímek a_{i_1}, a_{i_2}. Protože přímka SP je rovnoběžná s α_{i_1, i_2}, leží $b^*_{i_1, i_2}$ v α_{i_1, i_2}, a tedy α_{i_1, i_2} prochází středem úsečky $A'_{i_1}A'_{i_2}$. Z toho dále plyne, že úsečky $O'A'_{i_1}$, $O'A'_{i_2}$ jsou stejně dlouhé, jak bylo dokázat.

V dalším dokážeme vícerozměrné zobecnění věty Glagolevovy (viz [1], str. 46).

Věta 2. Nechť jsou dány n-rozměrné simplexy γ_1, γ_2 s vlastními vrcholy. Pak existuje nevlastní bod S tak, že γ_1 je perspektivně položeno vzhledem k středu perspektivity S se simplexem γ'_2 podobným s γ_2.

Důkaz. Existuje afinita $\mathfrak{A}$ daného prostoru, která převádí vrcholy simplexu γ_2 ve vrcholy simplexu γ_1. Nechť $\varkappa$ je libovolná n-rozměrná sféra; pak $\mathfrak{A}^{-1} \varkappa$ je n-rozměrná kvadrika, na níž lze najít $(n - 1)$ rozměrnou sféru λ. Též $\mathfrak{A}\,\lambda$ je sférou. Proveďme nyní podobnostní transformaci P daného prostoru tak, aby $\mathfrak{P}\,\lambda$ bylo shodné s $\mathfrak{A}\,\lambda$. Konečně proveďme orthogonální transformaci $\mathfrak{O}$ daného prostoru tak, aby $\mathfrak{O}\mathfrak{P}\,\lambda$, $\mathfrak{A}\,\lambda$ splynuly. Pak transformace $\mathfrak{O}\mathfrak{P}\mathfrak{A}^{-1}$ je perspektivní afinitou daného prostoru; nadrovina samodružných bodů obsahuje sféru $\mathfrak{A}\,\lambda$. Simplex $\mathfrak{O}\mathfrak{P}\,\gamma_2$ je tedy podobný se simplexem γ_2. Věta je dokázána.

Nahradíme-li ve větě 2 konfiguraci γ_1 obecnou konfigurací $(n - 1)$ dimensionální, pak věta ztrácí svou platnost (viz [2], poznámka o zobecnění věty Pohlkeovy).

2. Věta o maximálním originálu

V prostoru E_n $(n \geqq 3)$ vybereme $n - m + 1$ podprostorů ${}^i\alpha$ dimense m $(2 \leq m \leq n-1)$ které jsou navzájem kolmé a které procházejí týmž podprostorem ξ dimense $2m - n$. Kolmý průmět útvaru U do průmětny ${}^i\alpha$ označme U_i $(i = 1, 2, \dots, (n - m + 1)$.

Věta 3. Nechť ${}^i\mathsf{V}$ je bodový útvar, ležící v průmětně ${}^i\alpha$ ($i = 1, 2, \ldots, n - m + 1$). Pak jsou ekvivalentní tyto dvě podmínky:

(a) Existuje bodový útvar $\mathsf{U} \subset \mathsf{E}_n$ tak, že $\mathsf{U}_i = {}^i\mathsf{V}$ pro $i = 1, 2, \ldots, n - m + 1$.

(b) Každá nadrovina $\omega \perp \xi$ buď protíná současně všecka ${}^i\mathsf{V}$ anebo neprotíná žádné ${}^i\mathsf{V}$ ($i = 1, 2, \ldots, n - m + 1$).

Důkaz. Každý bod B leží spolu se svými průměty B_i v téže nadrovině kolmé ke ξ. Existuje-li tedy taková nadrovina $\omega \perp \xi$, která alespoň jedno ${}^i\mathsf{V}$ protíná a alespoň jedno ${}^i\mathsf{V}$ neprotíná, pak hledaný originál U s vlastností $\mathsf{U}_i = {}^i\mathsf{V}$ neexistuje.

Nechť platí podmínka (b) a nechť útvary ${}^i\mathsf{V}$ jsou neprázdné. Každému bodu $X \in {}^1\mathsf{V}$ přiřaďme neprázdný útvar ${}^j u(X) \subset \omega \cap {}^j\mathsf{V}$ ($j = 2, 3, \ldots, n - m + 1$), kde ω je nadrovina, jdoucí bodem X kolmo ke ξ. Z každého ${}^j u(X)$ vybereme bod ${}^jX$ a stanovme průsečík O (X, ${}^2X$, ${}^3X$, $\ldots$, ${}^{n-m+1}X$) promítacích prostorů ${}^j\pi$, ${}^jX \in {}^j\pi \perp {}^j\alpha$. Bodový útvar, vyplněný body O ($X, {}^2X, {}^3X, \ldots, {}^{n-m+1}X$), je žádaným útvarem U s vlastností $\mathsf{U}_i = {}^i\mathsf{V}$. Všecka možná přiřazení $X \to {}^2u\ (X), {}^3u\ (X), \ldots, {}^{n-m+1}u\ (X)$ poskytují všecky možné originály U s vlastností $\mathsf{U}_i = {}^i\mathsf{V}$. Sjednocení všech těchto originálů U nazveme maximálním originálem vzhledem k útvarům ${}^i\mathsf{V}$; maximální originál je ovšem určen jednoznačně. Důkaz věty 3 tím ukončujeme.

Nejdůležitější specialisace vzniká pro $m = 2$, resp. pro $m = n - 1$. Pro $n = 3$ dostáváme se ke klasickému promítání Mongeovu, takže větu 3 lze užít při budování Mongeovy projekce. Věta 3 chce zpřesnit běžné tvrzení, uváděné v učebnicích deskriptivní geometrie, že totiž svými průměty nemusí být originál jednoznačně určen. Na větě 3 lze založit theorii jednoznačného určení některých bodových útvarů užitím jejich průmětů. Zobecnění věty 3 pro mnohostředové promítání je nasnadě a nebudeme je zde provádět.

Literatura

[1] J. A. Glazunov, N. F. Četveruchin, *Axonometrija*, Moskva, 1953.

[2] V. Havel, *O základních větách vícerozměrné centrální axonometrie*, Čas. pro pěstování mat., sv. 81, 1956, v tisku.

VÁCLAV HAVEL

O VĚTĚ POHLKEOVĚ

Obsahem příspěvku je několik úvah, týkajících se zobecnění věty Pohlkeovy-Schwarzovy pro vícerozměrné promítání.

Budeme pracovat v n-rozměrném rozšířeném prostoru euklidovském ($n \geq 3$). Posloupnost vlastních bodů $B_0, B_1, B_2, \ldots, B_n$, ležících v témže m-rozměrném podprostoru ($3 \leq m \leq n - 1$), lineárně vytvořeném body $B_0, B_1, \ldots, B_m$, nazveme (n, m) konfigurací.

Věta 1. Nechť γ je posloupnost lineárně nezávislých vlastních bodů $\{A_0, A_1, \ldots A_n\}$ a nechť $\boldsymbol{R}$ je (n, m) konfigurace $\{B_0, B_1, \ldots, B_n\}$, ležící v podprostoru β dimense m. Pak existuje právě jeden nevlastní podprostor $\boldsymbol{S}$ o dimensi (n—m—1) a afinita $\mathbf{A}_\pi$ mezi podprostorem β a libovolným s $\boldsymbol{S}$ disjunktním vlastním podprostorem π dimense m tak, že $\mathbf{A}\ \boldsymbol{R}$ je průmětem konfigurace γ z centra $\boldsymbol{S}$. (Podrobně: i-tý bod konfigurace $\mathbf{A}_\pi \boldsymbol{R}$ je průmětem i-tého bodu konfigurace γ pro $i = 1, 2, \ldots, n + 1$.)

Důkaz. Označme α podprostor, lineárně vytvořený body $A_0, A_1, \ldots, A_m$. Existuje právě jedna afinita $\mathbf{A}$ mezi β, α, pro niž $\mathbf{A}\,B_i = A_i$ ($i = 0, 1, \ldots, m$). Nevlastní body přímek, jdoucích body $\mathbf{A}\,B_j$, A_j ($j = m + 1, \ldots, n$) vytvořují lineárně podprostor