Václav Havel
O větě Pohlkeově

*Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*, Vol. 1 (1956), No. 5-6, 694--696

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/137345

**Věta 3.** Nechť ${}^iV$ je bodový útvar, ležící v průmětně ${}^i\alpha$ $(i = 1, 2, \ldots, n - m + 1)$. Pak jsou ekvivalentní tyto dvě podmínky:

(a) Existuje bodový útvar $U \subset E_n$ tak, že $U_i = {}^iV$ pro $i = 1, 2, \ldots, n - m + 1$.

(b) Každá nadrovina $\omega \perp \xi$ buď protíná současně všecka ${}^iV$ anebo neprotíná žádné ${}^iV$ $(i = 1, 2, \ldots, n - m + 1)$.

**Důkaz.** Každý bod $B$ leží spolu se svými průměty $B_i$ v téže nadrovině kolmé ke $\xi$. Existuje-li tedy taková nadrovina $\omega \perp \xi$, která alespoň jedno ${}^iV$ protíná a alespoň jedno ${}^iV$ neprotíná, pak hledaný originál $U$ s vlastností $U_i = {}^iV$ neexistuje.

Nechť platí podmínka (b) a nechť útvary ${}^iV$ jsou neprázdné. Každému bodu $X \in {}^1V$ přiřaďme neprázdný útvar ${}^ju(X) \subset \omega \cap {}^jV$ $(j = 2, 3, \ldots, n - m + 1)$, kde $\omega$ je nadrovina, jdoucí bodem $X$ kolmo ke $\xi$. Z každého ${}^ju(X)$ vybereme bod ${}^jX$ a stanovme průsečík $O(X, {}^2X, {}^3X, \ldots, {}^{n-m+1}X)$ promítacích prostorů ${}^j\pi$, ${}^jX \in {}^j\pi \perp {}^j\alpha$. Bodový útvar, vyplněný body $O(X, {}^2X, {}^3X, \ldots, {}^{n-m+1}X)$, je žádaným útvarem $U$ s vlastností $U_i = {}^iV$. Všecka možná přiřazení $X \to {}^2u(X), {}^3u(X), \ldots, {}^{n-m+1}u(X)$ poskytují všecky možné originály $U$ s vlastností $U_i = {}^iV$. Sjednocení všech těchto originálů $U$ nazveme maximálním originálem vzhledem k útvarům ${}^iV$; maximální originál je ovšem určen jednoznačně. Důkaz věty 3 tím ukončujeme.

Nejdůležitější specialisace vzniká pro $m = 2$, resp. pro $m = n - 1$. Pro $n = 3$ dostáváme se ke klasickému promítání Mongeovu, takže větu 3 lze užít při budování Mongeovy projekce. Věta 3 chce zpřesnit běžné tvrzení, uváděné v učebnicích deskriptivní geometrie, že totiž svými průměty nemusí být originál jednoznačně určen. Na větě 3 lze založit theorii jednoznačného určení některých bodových útvarů užitím jejich průmětů. Zobecnění věty 3 pro mnohostředové promítání je nasnadě a nebudeme je zde provádět.

### Literatura


[1] J. A. Glazunov, N. F. Četveruchin, *Axonometrija*, Moskva, 1953.

[2] V. Havel, *O základních větách vícerozměrné centrální axonometrie*, Čas. pro pěstování mat., sv. 81, 1956, v tisku.



VÁCLAV HAVEL


# O VĚTĚ POHLKEOVĚ

Obsahem příspěvku je několik úvah, týkajících se zobecnění věty Pohlkeovy-Schwarzovy pro vícerozměrné promítání.

Budeme pracovat v $n$-rozměrném rozšířeném prostoru euklidovském $(n \geq 3)$. Posloupnost vlastních bodů $B_0, B_1, B_2, \ldots, B_n$, ležících v témže $m$-rozměrném podprostoru $(3 \leq m \leq n - 1)$, lineárně vytvořeném body $B_0, B_1, \ldots, B_m$, nazveme $(n, m)$ konfigurací.

**Věta 1.** Nechť $\gamma$ je posloupnost lineárně nezávislých vlastních bodů $\{A_0, A_1, \ldots A_n\}$ a nechť $\boldsymbol{R}$ je $(n, m)$ konfigurace $\{B_0, B_1, \ldots, B_n\}$, ležící v podprostoru $\beta$ dimense $m$. Pak existuje právě jeden nevlastní podprostor $\boldsymbol{S}$ o dimensi $(n - m - 1)$ a afinita $\mathbf{A}_\pi$ mezi podprostorem $\beta$ a libovolným s $\boldsymbol{S}$ disjunktním vlastním podprostorem $\pi$ dimense $m$ tak, že $\mathbf{A}\ \boldsymbol{R}$ je průmětem konfigurace $\gamma$ z centra $\boldsymbol{S}$. (Podrobně: $i$-tý bod konfigurace $\mathbf{A}_\pi \boldsymbol{R}$ je průmětem $i$-tého bodu konfigurace $\gamma$ pro $i = 1, 2, \ldots, n + 1$.)

**Důkaz.** Označme $\alpha$ podprostor, lineárně vytvořený body $A_0, A_1, \ldots, A_m$. Existuje právě jedna afinita $\mathbf{A}$ mezi $\beta$, $\alpha$, pro niž $\mathbf{A} B_i = A_i$ $(i = 0, 1, \ldots, m)$. Nevlastní body přímek, jdoucích body $\mathbf{A} B_j$, $A_j$ $(j = m + 1, \ldots, n)$ vytvořují lineárně podprostor

$\boldsymbol{S}$ dimense $n-m-1$. Prostor S jakožto centrum projekce zprostředkuje mezi $\alpha$ a mezi libovolným vlastním s $\boldsymbol{S}$ disjunktním podprostorem $\pi$ dimense $m$ afinitu $\mathbf{A}_{\alpha,\pi}$ tak, že $(n, m)$ konfigurace $\mathbf{A}_{\alpha,\pi}\mathbf{A}\boldsymbol{R}$ je průmětem konfigurace $\gamma$ z centra $\boldsymbol{S}$. Položíme-li $\mathbf{A} = \mathbf{A}_{\alpha,\pi}\mathbf{A}$, je centrum $\boldsymbol{S}$ určeno jednoznačně ve smyslu znění věty 1. Věta je dokázána.

Nyní budeme charakterisovat ty podprostory $\pi$, pro něž afinita $\mathbf{A}_\pi$ z věty 1 je podobností.

V případě $n = m + 1 = 3$ existují dvě (případně splývající) osnovy $\Omega_1, \Omega_2$ navzájem rovnoběžných rovin $\pi$, pro něž $\mathbf{A}_\pi$ je podobnost (viz [6], str. 302). Dostáváme důkaz klasické věty Pohlkeovy-Schwarzovy. Tento důkaz zjednodušuje postup, uvedený v knize [5], str. 173/4 (důkaz věty 2 a věty 3) a liší se od původního důkazu Schwarzova hlavně ve snadném překonání obtíží, které při Schwarzově důkazu vznikají v případě, že tři z bodů konfigurace $\boldsymbol{R}$ leží na téže přímce. Konstrukci centra $\boldsymbol{S}$ lze snadno provést užitím afinity $\mathbf{A}$; konstrukci obou osnov $\Omega_1, \Omega_2$ možno provést různými způsoby (viz [1], věta 3 na str. 31, [6], str. 30/1, resp. [9], str. 300/2).

Věnujme se nyní případu obecnému. Afinita $\mathbf{A}_\pi$ z věty 1 je podobností právě tehdy, převádí-li $(m-1)$ rozměrnou absolutní sféru $\varkappa_\beta \subset \beta$ v absolutní sféru $\varkappa_\pi \subset \pi$. Imaginární kvadrika $\varkappa_\alpha = \mathbf{A}\varkappa_\beta \subset \alpha$ promítá se z centra $\boldsymbol{S}$ do $\pi$ do kvadriky $\varkappa'_\alpha$. Kvadrika $\varkappa'_\alpha$ splývá se $\varkappa_\pi$, právě když platí tato podmínka:

(I) Průnik $(n-1)$ rozměrné absolutní sféry s promítací nadplochou kvadriky $\varkappa_\alpha$ obsahuje $(m-1)$ rozměrnou absolutní sféru, ležící v prostoru $\pi$.

Sformulujeme výsledek.

Věta 2. Afinita $\mathbf{A}_\pi$ z věty 1 je podobností, právě když pro prostor $\pi$ platí podmínka (I).

Tento výsledek souvisí s výsledkem F. Schura (viz [5], str. 175), který dostaneme v našem případě pro $n = m + 1 = 3$. Pak je totiž střed $\boldsymbol{S}$ bodem, $\varkappa_\alpha$ je dvojicí komplexně sdružených nevlastních bodů, promítací útvar kvadriky $\varkappa_\alpha$ je dvojicí komplexně sdružených přímek, takže průnik těchto přímek s absolutní kružnicí se rozpadá ve dvě dvojice komplexně sdružených bodů, a tedy podmínka (I) je splněna pro rovinu $\pi$, obsahující jeden z obou párů předchozích bodů.

Pro $n = m + 1 \geq 3$ a pro případ, že úsečky $A_0A_i$ jsou vzájemně kolmé a stejně dlouhé, je podmínka (I) ekvivalentní s podmínkou Stiefelovou (viz [8]):

(II) Jsou-li $c_1 \geq c_2 \geq \ldots \geq c_n$ charakteristická čísla Grammova determinantu vektorů $\overrightarrow{B_0B_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, pak $c_1 > c_2 = c_3 = \ldots = c_{n-1} > c_n = 0$.

Uvedeme ještě konstrukci, pocházející od N. F. Četveruchina (viz [1], str. 76). Navážeme opět na předpoklady věty 1. Označme $K$ částečnou konfiguraci $\{B_0, B_1, B_2, B_3\}$. Je-li $K$ čtyřroh, pak stanovme dle věty Pohlkeovy-Schwarzovy nevlastní střed $S$, z něhož se čtyřstěn $\{A_0, A_1, A_2, A_3\}$ promítá do konfigurace $K^*$ podobné s $K$. Je-li $K$ čtyřstěn, pak stanovme podle věty Glagolevovy (viz [1], str. 46) nevlastní bod $S_0$ tak, že existuje čtyřstěn $K^*$ podobný s $K$ a perspektivní se čtyřstěnem $\{A_0, A_1, A_2, A_3\}$ dle středu $S_0$. V obou případech doplňme $K^*$ na konfiguraci $\boldsymbol{R}^* = \{B_0^*, B_1^*, \ldots, B_n^*\}$ podobnou s $\boldsymbol{R}$ a stanovme pro každé $i = 4, 5, \ldots, n$ nevlastní bod $S_i$ přímky jdoucí body $A_i$, $B_i^*$. Body $S_0, S_4, S_5, \ldots, S_n$ lineárně vytvářejí nevlastní podprostor $\sigma$ dimense nejvýše $n-3$. Daná konfigurace $\gamma$ je s $\boldsymbol{R}^*$ perspektivní dle středu $\sigma$. Zřejmě $\boldsymbol{R}^*$ je průmětem konfigurace $\gamma$ z centra $\sigma$, když platí tato podmínka:

(III) Podprostor $\sigma$ má dimensi $n-m-1$.

Speciálně pro $n = m + 1$ má podmínka (III) tvar $S_0 = S_4 = S_5 = \ldots = S_n$. Poznamenejme, že v důkazu t. zv. hlavního theorému v knize [1], str. 76, vyšetřované centrum perspektivity může mít dimensi menší než $n-3$. Dále poznamenejme, že Četveruchinova konstrukce vyšetří pouze takové centrum $\sigma$, pro něž čtyřstěn $\{A_0, A_1,$

$A_2, A_3\}$ a částečná konfigurace $K^*$ leží v témže trojrozměrném podprostoru. Lze však najít nevlastní podprostor $\sigma$, konfiguraci $\gamma$ a konfiguraci $\boldsymbol{R}^*$ podobnou s $\boldsymbol{R}$ a perspektivní s $\gamma$ dle středu $\sigma$ tak, že pro každou čtveřici různých indexů $i, j, k, l$ body $A_i$, $B_i^*$, $A_j$, $B_j^*$, $A_k$, $B_k^*$, $A_l$, $B_l^*$ neleží v témže trojrozměrném podprostoru. Četveruchinovou konstrukcí se k předchozímu případu nedostaneme; nelze tedy podmínku (III) pokládat za nutnou i postačující. Tento nedostatek je možno obejít užitím vícerozměrného zobecnění věty Glagolevovy (viz [1], str. 46).

Poznamenejme ještě, že A. O. Volberg naznačil důkaz klasické věty Pohlkeovy, užívaje bicentrální projekce (viz [6], str. 329/30). Zdá se, že jeho úvahu bude možno zobecnit i pro vícerozměrné promítání.

## Závěr

Klasickou větu Pohlkeovu-Schwarzovu lze formulovat takto: K danému čtyřstěnu $\{A_0, A_1, A_2, A_3\}$ a k dané (3, 2) konfiguraci $\boldsymbol{R} = \{B_0, B_1, B_2, B_3\}$ existuje právě jeden nevlastní bod $S$ a dvě (případně splývající) osnovy $\Omega_1$, $\Omega_2$ navzájem rovnoběžných rovin tak, že průmět čtyřstěnu $\{A_0, A_1, A_2, A_3\}$ z centra $S$ do roviny $\pi \in \Omega_i$ $(i = 1, 2)$ je podobný s $\boldsymbol{R}$.

Přejdeme-li k vícerozměrnému promítání, lze sice větu Pohlkeovu-Schwarzovu zobecnit, avšak její „řešení" může i nemusí existovat. Ve vícerozměrném případě existuje totiž k daným konfiguracím $\gamma$, $\boldsymbol{R}$ (viz větu 1) centrum $\boldsymbol{S}$ a průmětna $\pi$, do níž se $\gamma$ promítá do konfigurace podobné s $\boldsymbol{R}$, tehdy a jen tehdy, platí-li podmínka (I).

Jak již poznamenal Ed. Stiefel, není tedy vhodné budovat vícerozměrnou rovnoběžnou axonometrii na zobecněné větě Pohlkeově-Schwarzově; k vybudování vícerozměrné rovnoběžné axonometrie (a dokonce i vícerozměrné centrální axonometrie) hodí se lépe t. zv. první a druhá základní věta (viz [2]). Těmito základními větami zabývá se obšírně citovaná práce [2].

## Literatura


[1] E. A. Glazunov, N. F. Četveruchin, *Axonometrija*, Moskva 1953.

[2] V. Havel, *O základních větách vícerozměrné centrální axonometrie*, Čas. pro pěst. mat. 82 (1957) — v tisku.

[3] F. Kadeřávek, J. Klíma, J. Kounovský, *Deskriptivní geometrie*, I. díl, Praha 1954 (viz str. 297).

[4] *Matěmatika v SSSR za tridcať let*, sborník, Moskva—Leningrad 1948 (viz str. 944/5).

[5] E. Müller, *Vorlesungen über darstellende Geometrie, I. Band: Die linearen Abbildungen (bearbeitet von E. Kruppa)*, Leipzig—Wien 1923.

[6] B. Procházka, *Vybrané stati z deskriptivní geometrie*, I. díl, Praha 1912.

[7] Ed. Stiefel, *Lehrbuch der darstellenden Geometrie*, Basel 1947.

[8] Ed. Stiefel, *Zum Satz von Pohlke*, Comm. Math. Helv. 10 (1938), str. 208/23.

[9] A. O. Volberg, *Deskriptivní geometrie*, překlad z ruštiny, Praha 1953.