Jan Vyšín

Afinní zobrazení v rovině

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 1 (1956), No. 5-6, 520--551

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/137343

JAN VYŠÍN (Praha)

AFINNÍ ZOBRAZENÍ V ROVINĚ

1. Úvod. K hlubšímu pochopení euklidovské geometrie vedou v podstatě tři cesty: první jde přes projektivní geometrii, druhá přes absolutní geometrii a třetí přes afinní geometrii. První cesta, která ukazuje euklidovský prostor jako část modelu projektivního prostoru, je nejnáročnější, neboť předpokládá znalosti další matematické disciplíny — projektivní geometrie. Druhá cesta vede přes společný základ geometrie euklidovské a Lobačevského — přes geometrii absolutní. Tato cesta nám ukazuje geometrii euklidovskou jako rovnocenného partnera geometrií neeuklidovských a uplatňuje se u nás v poslední době stále více vlivem sovětské matematiky.

Třetí cesta — přes afinní geometrii — je dnes poněkud opomíjená, ač je celkem nenáročná a ačkoli poskytuje dobrý přehled o t. zv. vlastnostech polohy a vlastnostech metrických. Afinní geometrie sama jedná jen o vlastnostech incidence, uspořádání, rovnoběžnosti a spojitosti; jedním z jejích nejdůležitějších pojmů je beze sporu pojem afinního zobrazení čili afinity.

Obsahem této stati je podrobný výklad o afinních zobrazeních v rovině, která jsou podkladem afinní geometrie v rovině, zejména pokud jde o jejich třídění. Než však přikročíme k vlastnímu výkladu, musíme něco říci o aparátu, kterého budeme užívat.

Prostředky jsou úmyslně redukovány na nejmenší míru. Nebudeme užívat ani projektivní geometrie, ani imaginárních elementů, ani vektorové algebry. Methoda bude převážně analytická, místy však použijeme i úvah synthetických. Protože půjde z větší části o vlastnosti nemetrické, mohli — a měli — bychom pracovat s rovnoběžkovými souřadnicemi v rovině, omezenými na obor reálných čísel (viz výše poznámku o vyloučení imaginárních elementů). Abychom však výpočty formálně zjednodušili, použijeme komplexních souřadnic v rovině; tím dosáhneme větší přehlednosti početního vyjádření afinit (místo dvou rovnic budeme mít rovnici jedinou); zároveň tak ukážeme využití základů aritmetiky komplexních čísel v geometrii, t. j. méně obvyklou formu analytické geometrie v rovině, opírající se o jedinou komplexní souřadnici. I zde jsme omezili aparát na nejmenší míru; tak na př. nevyužíváme vůbec transformace komplexní souřadnice. Při našem postupu nebude na závadu, že nemůžeme vyjádřit imaginární elementy komplexními souřadnicemi, neboť imaginární elementy jsme ze svých úvah předem vyloučili.

S hlediska logické výstavby geometrie je třeba připomenout, že vlastnosti afinních zobrazení, obsažené v této stati, lze odvodit syntheticky; výsledky, které se netýkají shodnosti a podobnosti, t. j. vlastnosti obecného afinního zobrazení, lze odvodit jen z axiomů incidence, uspořádání, rovnoběžnosti a spojitosti.

2. Přistoupíme k vlastnímu výkladu. Nejprve odvodíme dvě pomocné věty.

Pomocná věta 1. *Budiž $f(z)$ komplexní funkce jedné komplexní proměnné, která má tyto vlastnosti:*

a) *Je definována na množině M všech komplexních čísel, jejichž reálná i imaginární část jsou racionální čísla.*

b) *Funkční hodnota, příslušná k aritmetickému průměru dvou hodnot nezávisle proměnné, je rovna aritmetickému průměru obou funkčních hodnot.*

Pak platí:

$$f(z) = az + b\bar{z} + c,$$

kde a, b, c jsou pevná komplexní čísla, $\bar{z}$ je komplexní číslo konjugované k číslu z.

Důkaz: Vlastnost b) lze zapsat formulí

$$f\left(\frac{z_1 + z_2}{2}\right) = \frac{1}{2} f(z_1) + \frac{1}{2} f(z_2), \tag{1}$$

která platí pro všecka z_1, z_2 z M. Označme $f(0) = c$; ze vzorce (1) dostaneme pro $z_1 = z$, $z_2 = 0$ vztah

$$f\left(\frac{z}{2}\right) = \frac{1}{2} f(z) + \frac{1}{2} c, \tag{2}$$

který platí pro všechna z z množiny M. Zaveďme nyní funkci

$$g(z) = f(z) - c.$$

Funkce $g(z)$ má tyto vlastnosti:

a') Je definována na množině M.

b') Platí pro ni součtový vzorec:

$$g(z_1 + z_2) = g(z_1) + g(z_2), \tag{3}$$

kde z_1, z_2 jsou libovolná dvě komplexní čísla z množiny M. Vzorec (3) odůvodníme snadno pomocí vztahů (1), (2).

$$g(z_1 + z_2) = f(z_1 + z_2) - c = f\left(\frac{2z_1 + 2z_2}{2}\right) - c =$$
$$= \frac{1}{2} f(2z_1) + \frac{1}{2} f(2z_2) - c = f(z_1) - \frac{1}{2} c +$$
$$+ f(z_2) - \frac{1}{2} c - c = f(z_1) - c + f(z_2) - c = g(z_1) + g(z_2).$$

Vzorec (3) rozšíříme indukcí na n sčítanců; dostaneme vztah

$$g(z_1 + z_2 + \ldots + z_n) = g(z_1) + g(z_2) + \ldots + g(z_n), \tag{4}$$

který platí pro všechna $z_1, z_2, \ldots, z_n$ z množiny M. Položme v (4)

$$z_1 = z_2 = \ldots = z_n = z;$$

dostaneme vztah

$$g(nz) = n \cdot g(z),$$

který platí pro všechna z z množiny M. To znamená, že rovnost

$$g(rz) = r \cdot g(z), \tag{5}$$

kde z je číslo z M, platí pro každé přirozené r. Dosadíme-li do vztahu (4)

$$z_1 = z_2 = \ldots = z_n = \frac{z}{n},$$

dostaneme

$$g(z) = n \cdot g\left(\frac{z}{n}\right),$$

neboli

$$g\left(\frac{1}{n}\cdot z\right)=\frac{1}{n}\cdot g(z).$$

To znamená, že vztah (5) platí pro všechna r tvaru $\frac{1}{n}$ (n přirozené). Budiž $r=\frac{p}{q}$ libovolné kladné racionální číslo (p, q přirozená). Pak pro libovolné z z množiny M platí vzhledem k případům, kdy platí rovnost (5):

$$g\left(\frac{p}{q}\cdot z\right)=g\left(p\cdot\frac{z}{q}\right)=\frac{p}{q}\cdot g(z).$$

To znamená, že rovnost (5) platí pro všechna kladná racionální r. Ale ze vztahu (3) vyplývá pro $z_1=z_2=0$

$$g(0)=0,$$

t. j. rovnost (5) platí i pro $r=0$. Dosaďme dále do (3) $z_1=rz$ (r kladné racionální), $z_2=-rz$; pak je

$$0=g(rz-rz)=g(rz)+g(-rz).$$

Odtud

$$g(-rz)=-g(rz)=-r\cdot g(z);$$

to znamená, že rovnost (5) platí pro všechna racionální r a pro každé z z množiny M.

Budiž nyní $z=r_1+r_2\mathrm{i}$ libovolné číslo z M. Podle (3) a (5) je

$$g(z)=g(r_1+r_2\mathrm{i})=g(r_1)+g(r_2\mathrm{i})=r_1g(1)+r_2g(\mathrm{i}) \tag{6}$$

Dosadíme-li do (6)

$$r_1=\frac{1}{2}(\bar{z}+z),\quad r_2=\frac{\mathrm{i}}{2}(\bar{z}-z),$$

vyjde

$$g(z)=\frac{g(1)-\mathrm{i}g(\mathrm{i})}{2}\cdot z+\frac{g(1)+\mathrm{i}g(\mathrm{i})}{2}\cdot\bar{z}.$$

Označíme-li

$$a=\frac{g(1)-\mathrm{i}g(\mathrm{i})}{2},\quad b=\frac{g(1)+\mathrm{i}g(\mathrm{i})}{2}$$

(což nejsou vždy čísla konjugovaná, neboť $g(1)$ a $g(\mathrm{i})$ nemusí být čísla reálná), dostaneme $g(z)=az+b\bar{z}$ a dále

$$f(z)=az+b\bar{z}+c,$$

jak jsme měli dokázat.

Pomocná věta 2. *Budiž $\varphi(t)$ reálná funkce jedné reálné proměnné, která má tyto vlastnosti:*

c) *Je definována na množině všech reálných čísel.*

d) *Funkční hodnota příslušná k aritmetickému průměru dvou hodnot nezávisle proměnné je rovna aritmetickému průměru obou funkčních hodnot.*

e) *Je rostoucí.*

Pak platí:

$$\varphi(t)=\alpha t+\beta,$$

kde α, β jsou reálné konstanty, $\alpha>0$.

Důkaz: Vlastnosti d) lze zapsat vzorcem

$$\varphi\left(\frac{t_1 + t_2}{2}\right) = \frac{1}{2}\,\varphi(t_1) + \frac{1}{2}\,\varphi(t_2),$$

který platí pro všecka reálná čísla t_1, t_2. Obdobným postupem jako v důkazu pomocné věty 1 zjistíme, že pro všechna racionální čísla t platí

$$\varphi(t) = \alpha\, t + \beta, \tag{7}$$

kde α, β jsou pevná reálná čísla.

Je-li nyní t_0 libovolné iracionální číslo, sestrojíme dvě posloupnosti racionálních čísel

$$t_1, t_2, \ldots; \quad t'_1, t'_2, \ldots,$$

z nichž první je neklesající ($t_1 \leq t_2 \leq \ldots$) a druhá nerostoucí ($t'_1 \geq t'_2 \geq \ldots$) a taková, že platí $\lim\limits_{n \to \infty} t_n = \lim\limits_{n \to \infty} t'_n = t_0$,

$$t_n \leq t_0 \leq t'_n \tag{8}$$

pro všechna přirozená čísla n. Na podkladě vlastností e) usoudíme ze vztahu (8), že platí

$$\varphi(t_n) \leq \varphi(t_0) \leq \varphi(t'_n), \tag{9}$$

pro všechna přirozená čísla n. Podle (7) je však

$$\varphi(t_n) = \alpha\, t_n + \beta, \quad \varphi(t'_n) = \alpha\, t'_n + \beta.$$

Ze vztahu (9) vyplývá tedy, že

$$\alpha\, t_n + \beta \leq \varphi(t_0) \leq \alpha\, t'_n + \beta.$$

Pro $\lim n = \infty$ je $\lim(\alpha\, t_n + \beta) = \lim(\alpha\, t' + \beta) = \alpha\, t_0 + \beta$; proto (podle známé věty o limitách) je $\varphi(t_0) = \alpha\, t_0 + \beta$. To znamená, že vztah (7) platí pro všechna reálná t, jak jsme měli dokázat.

3. Nyní odvodíme početní vyjádření afinity v komplexní souřadnici.

Afinita v rovině (afinní zobrazení v rovině) je vzájemně jednoznačné přiřazení bodů roviny, které převádí přímku v přímku (t. j. obrazem přímky je přímka) a které zachovává uspořádání bodů v přímce (t. j. leží-li bod B mezi body A, C, leží jeho obraz B' mezi obrazy A', C').[1]

Hlavní výsledek, ke kterému směřujeme v tomto článku, vyjadřuje tato věta:

Věta 1. *Afinní zobrazení v rovině je dáno vztahem*

$$z' = az + b\bar{z} + c,$$

kde a, b, c jsou pevná komplexní čísla, pro něž platí

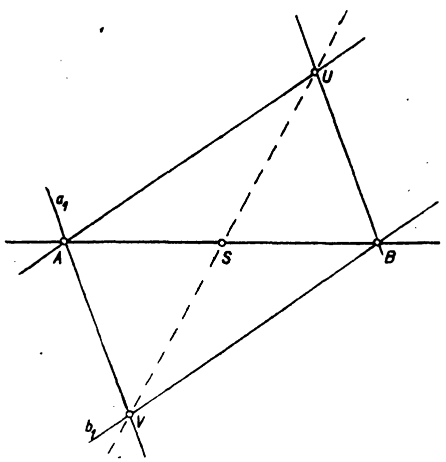
$$|a| \neq |b|,$$

a kde z, z' jsou komplexní souřadnice vzoru a obrazu v dané afinitě.

Důkaz: a) Afinita v rovině převádí dvě rovnoběžky p, q ve dvě rovnoběžky p', q'. Je-li $p \equiv q$, je toto tvrzení triviální. Jsou-li přímky p, q bez společného bodu, mají touž vlastnost i přímky p', q', neboť jinak by byl společný bod $Q' \equiv p' \cdot q'$ obrazem bodu Q společného přímkám p, q.

Důsledkem předchozí vlastnosti je, že afinita v rovině převádí střed úsečky ve střed úsečky. K odůvodnění tohoto tvrzení stačí, abychom si uvědomili tuto konstrukci středu úsečky AB (*obr. 1*): Zvolíme bod U mimo přímku AB; bodem A vedeme

[1]) Druhou vlastnost, vyslovenou v definici afinity, je možno odvodit jako důsledek vlastnosti první; toto odvození však nebudeme uvádět.



Obr. 1

rovnoběžku a_1 s přímkou BU, bodem B veďme rovnoběžku b_1 s přímkou AU; přímky a_1, b_1 se protnou v bodě V; obrazec $AUBV$ je rovnoběžník; jeho úhlopříčky AB, UV se protínají ve středu S úsečky AB. Tato konstrukce se opírá jen o spojování bodů, protínání přímek a vedení rovnoběžek. Proto ji afinita převádí v konstrukci téhož druhu, t. j. afinita převádí střed úsečky AB ve střed úsečky $A'B'$.

b) Nechť je afinní zobrazení v rovině vyjádřeno početně komplexní funkcí jedné komplexní proměnné

$$z' = f(z).$$

Funkce $f(z)$ má tyto vlastnosti:

(a″) Je definována na množině všech komplexních čísel.

(b″) Pro každá dvě komplexní čísla z_1, z_2 platí vztah

$$f\left(\frac{z_1 + z_2}{2}\right) = \frac{1}{2} f(z_1) + \frac{1}{2} f(z_2).$$

Vlastnost (b″) je zřejmá, je-li $z_1 = z_2$. Je-li $z_1 \neq z_2$, vyplývá tato vlastnost ze známé skutečnosti, že střed úsečky, jejíž krajní body mají komplexní souřadnice z_1, z_2, má komplexní souřadnici $\frac{z_1 + z_2}{2}$.

Omezíme se při funkci $f(z)$ nejprve na všecka z z množiny M komplexních čísel, jejichž reálná i imaginární část jsou čísla racionální. Funkce $f(z)$ pak splňuje zřejmě předpoklady pomocné věty 1, proto platí pro všecka z z množiny M

$$f(z) = az + b\bar{z} + c. \tag{10}$$

Dokážeme nyní, že vztah (10) vyjadřuje danou afinitu pro souřadnice všech bodů osy x reálných čísel a pro souřadnice všech bodů osy y imaginárních čísel. Parametrické vyjádření osy x reálných čísel je

$$z = (1 - t) \cdot 0 + t \cdot 1 = t, \tag{11}$$

kde parametr t probíhá všecka reálná čísla. Obrazem osy x v dané afinitě je jistá přímka x', jejíž parametrické vyjádření je

$$z' = (1 - t') \cdot c + t' (a + b + c), \tag{12}$$

neboť podle (10) jsou obrazy bodů [0], [1] body $[c]$, $[a + b + c]$.[2]) Je-li t' parametr obrazu bodu o parametru t, je $t' = \varphi(t)$. Funkce $\varphi(t)$ splňuje všecky předpoklady pomocné věty 2, neboť zobrazení mezi přímkami x, x' zachovává uspořádání bodů a převádí střed úsečky ve střed úsečky. Podle pomocné věty 2 je tedy

$$\varphi(t) = \alpha t + \beta.$$

[2]) Bod o komplexní souřadnici z_0 značíme $[z_0]$.

Poněvadž však dostáváme pro $t = 0$, resp. 1 hodnoty $t' = 0$, resp. 1, je $\alpha = 1$, $\beta = 0$. Dosadíme-li do vztahu (12) $t' = t$ a použijeme-li vztahu (11), dostaneme

$$z' = (1 - z)\,c + z\,(a + b + c) = (a + b)\,z + c = az + bz + c,$$

neboť z je reálné číslo. To znamená, že vztah (10) vyjadřuje danou afinitu pro všecka reálná z.

Zcela obdobně dokážeme, že vztah (10) vyjadřuje danou afinitu i pro všecka ryze imaginární z.

Budiž nyní $z = z_1 + z_2 \mathrm{i}$ (z_1, z_2 reálná) libovolné komplexní číslo. Pak je podle vlastnosti (b''):

$$f(z) = f(z_1 + z_2\,\mathrm{i}) = f\left(\frac{2\,z_1 + 2\,z_2\,\mathrm{i}}{2}\right) = \frac{1}{2} f(2\,z_1) + \frac{1}{2} f(2\,z_2\,\mathrm{i}) =$$

$$= \frac{1}{2}(a \cdot 2\,z_1 + b \cdot 2\,z_1 + c) + \frac{1}{2}(a \cdot 2\,z_2\,\mathrm{i} - b \cdot 2\,z_2\,\mathrm{i} + c) =$$

$$= a\,(z_1 + z_2\,\mathrm{i}) + b\,(z_1 - z_2\,\mathrm{i}) + c = az + b\bar{z} + c.$$

c) Zbývá dokázat, že ve vztahu (10) je $|a| \neq |b|$. Přejdeme v (10) k číslům konjugovaným; dostaneme

$$\bar{z}' = \bar{a}\bar{z} + \bar{b}z + \bar{c}. \tag{10'}$$

Vztahy (10) a (10') upravíme na tvar

$$\begin{aligned} az + b\bar{z} &= z' - c, \\ \bar{b}z + \bar{a}\bar{z} &= \bar{z}' - \bar{c}. \end{aligned} \tag{13}$$

Poněvadž afinita je zobrazení vzájemně jednoznačné, musí být možno vypočítat z rovnic (13) pro každé z' jediné z ($\bar{z}$). K tomu je nutné a stačí, aby determinant soustavy (13) byl různý od nuly. Tento determinant je

$$a\bar{a} - b\bar{b} = |a|^2 - |b|^2.$$

Je-li $|a|^2 - |b|^2 \neq 0$, je $|a| \neq |b|$. Tím je věta 1 úplně dokázána.

4. V tomto článku odvodíme na základě početního vyjádření afinity některé její vlastnosti. Protože jsou si v afinitě vzájemně jednoznačně přiřazeny vzory a obrazy, existuje ke každému afinnímu zobrazení v rovině zobrazení inversní, které vznikne z daného tak, že vyměníme obrazy a vzory.

Věta 2. *Inversní zobrazení k afinitě dané rovnicí*

$$z' = az + b\bar{z} + c, \quad |a| \neq |b|,$$

je afinita vyjádřená rovnicí

$$D \cdot z = \bar{a}z' - b\bar{z}' + (b\bar{c} - \bar{a}c),$$

kde $D = |a|^2 - |b|^2$.

Důkaz: Analytické vyjádření inversní afinity dostaneme rozřešením soustavy (13).

Věta 3. *Každá rovnice tvaru*

$$z' = az + b\bar{z} + c,$$

kde a, b, c jsou pevná komplexní čísla, pro něž platí $|a| \neq |b|$[3]), *vyjadřuje jistou afinitu v rovině.*

D ů k a z: Stačí dokázat, že zobrazení vyjádřené danou rovnicí, je vzájemně jednoznačné přiřazení bodů $[z]$ a $[z']$, že toto zobrazení převádí přímku v přímku a že zachovává uspořádání bodů.

Vzájemně jednoznačné přiřazení bodů $[z]$ a $[z']$ vyplývá ze skutečnosti, že determinant soustavy (13), t. j. číslo $a\bar{a} - b\bar{b} = |a|^2 - |b|^2$ je různé od nuly.

Budiž

$$z = z_0 + t\,\zeta \tag{14}$$

parametrické vyjádření přímky p v komplexní souřadnici. Přitom z_0 je souřadnice pevného bodu, komplexní číslo $\zeta \neq 0$ je komplexní souřadnice koncového bodu radiusvektoru, který udává směr přímky, reálná proměnná t je parametr. Obraz p' přímky p je přímka s parametrickým vyjádřením

$$z' = (a z_0 + b\bar{z}_0 + c) + t\,(a\,\zeta + a\,\bar{\zeta}), \tag{15}$$

neboť je $a\,\zeta + b\,\bar{\zeta} \neq 0$. Kdyby totiž bylo $a\,\zeta + b\,\bar{\zeta} = 0$, platilo by také $\bar{b}\,\zeta + \bar{a}\,\bar{\zeta} = 0$, a z těchto dvou rovnic bychom dostali $a\bar{a} - b\bar{b} = 0$, což je ve sporu s předpokladem. Rovnice (14) a (15) zároveň ukazují, že dané zobrazení zachovává uspořádání bodů na přímce.

V ě t a 4. (V ě t a o u r č e n o s t i a f i n n í h o z o b r a z e n í.) *Budte Z_1, Z_2, Z_3 tři body, které neleží v přímce, Z_1', Z_2', Z_3' tři body roviny $Z_1Z_2Z_3$, které také neleží v přímce. Pak existuje jediné afinní zobrazení v této rovině, které převádí body Z_1, Z_2, Z_3 po řadě v body Z_1', Z_2', Z_3'.*

D ů k a z: Nechť má bod Z_j komplexní souřadnici z_j, bod Z_j' komplexní souřadnici z_j' ($j = 1, 2, 3$). Je třeba si uvědomit, že nutná a postačující podmínka pro to, aby body Z_1, Z_2, Z_3 neležely v přímce, je

$$\begin{vmatrix} z_1, & \bar{z}_1, & 1 \\ z_2, & \bar{z}_2, & 1 \\ z_3, & \bar{z}_3, & 1 \end{vmatrix} \neq 0. \tag{16}$$

Jestliže afinita s početním vyjádřením

$$z' = az + b\bar{z} + c$$

má vyhovovat daným podmínkám, musí platit

$$z_j' = a z_j + b\bar{z}_j + c, \quad j = 1, 2, 3. \tag{17}$$

Soustava (17) tří rovnic pro [a] a, b, c má jediné řešení, neboť determinant soustavy, t. j. determinant (16) je podle předpokladu různý od nuly. Podle předpokladu je však také

$$\begin{vmatrix} z_1', & \bar{z}_1', & 1 \\ z_2', & \bar{z}_2', & 1 \\ z_3', & \bar{z}_3', & 1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Dosadíme-li do tohoto determinantu z rovnic (17) a z dalších tří vztahů, které vzniknou z rovnic (17) přechodem ke konjugovaným číslům, dostaneme

$$\begin{vmatrix} a z_1 + b\bar{z}_1 + c, & \bar{b} z_1 + \bar{a}\bar{z}_1 + \bar{c}, & 1 \\ a z_2 + b\bar{z}_2 + c, & \bar{b} z_2 + \bar{a}\bar{z}_2 + \bar{c}, & 1 \\ a z_3 + b\bar{z}_3 + c, & \bar{b} z_3 + \bar{a}\bar{z}_3 + \bar{c}, & 1 \end{vmatrix} \neq 0. \tag{18}$$

---

[a]) Z této podmínky vyplývá, že není zároveň $a = b = 0$.

Tento determinant lze rozvést v devět determinantů, z nichž je sedm rovných nule (mají vždy dva sloupce úměrné); zbývající dva determinanty lze upravit tak, že vztah (18) nabude tvaru

$$(a\bar{a} - b\bar{b}) \begin{vmatrix} z_1, & \bar{z}_1, & 1 \\ z_2, & \bar{z}_2, & 1 \\ z_3, & z_3, & 1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Odtud vyplývá $a\bar{a} - b\bar{b} \neq 0$. Tím je věta 4 dokázána.

5. Pro další postup má zásadní důležitost zkoumání samodružných bodů a směrů afinity.

Dříve než se počneme zabývat studiem samodružných bodů, připomeňme si, jak řešíme v oboru komplexních čísel rovnici

$$\alpha z + \beta\bar{z} + \gamma = 0, \tag{19}$$

kde z je neznámá, α, β, γ jsou daná komplexní čísla. K rovnici (19) sestrojíme rovnici

$$\bar{\alpha}\bar{z} + \bar{\beta}z + \bar{\gamma} = 0 \tag{19'}$$

a obě rovnice (19), (19') řešíme jako soustavu dvou lineárních rovnic pro dvě neznámé. Pro neznámou z dostaneme

$$(\alpha\bar{\alpha} - \beta\bar{\beta})\, z = \beta\bar{\gamma} - \bar{\alpha}\gamma. \tag{20}$$

Nyní jsou tři možnosti:

I. Je-li $\alpha\bar{\alpha} - \beta\bar{\beta} \neq 0$, má rovnice (20) jediné řešení, které je též řešením rovnice (19), t. j. rovnice (19) má jediné řešení.

II. Je-li $\alpha\bar{\alpha} - \beta\beta = 0$, a $\beta\bar{\gamma} - \bar{\alpha}\gamma \neq 0$, nemá rovnice (20) řešení, t. j. ani rovnice (19) není řešitelná.

III. Je-li konečně $\alpha\bar{\alpha} - \beta\bar{\beta} = 0$ a $\beta\bar{\gamma} - \bar{\alpha}\gamma = 0$, je buď $\alpha = \beta = 0$, $\gamma \neq 0$ a rovnice (19) je neřešitelná. Nebo je $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Řešením rovnice (19) je pak každé komplexní číslo z. Není-li současně $\alpha = 0$, $\beta = 0$, je $|\alpha| = |\beta| \neq 0$ a lze klást $\beta = \varepsilon\alpha$, kde ε je komplexní jednotka. Rozlišíme nyní dva případy: $\varepsilon \neq 1$, $\varepsilon = 1$.

Je-li $\varepsilon \neq 1$, je $\beta - \alpha \neq 0$ a pro každé řešení z rovnice (19) platí

$$z - \frac{\gamma}{\beta - \alpha} = z + \frac{\alpha z + \varepsilon\alpha\bar{z}}{\varepsilon\alpha - \alpha} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1}(z + z) = \frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1} \cdot t,$$

kde t je reálné číslo. Obráceně každé komplexní číslo

$$z = \frac{\gamma}{\beta - \alpha} + \frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1} \cdot t,$$

kde t je libovolné reálné číslo, je řešením rovnice (19), jak se přesvědčíme dosazením a přihlédnutím ke vztahům

$$\beta = \varepsilon\alpha, \quad \beta\gamma - \bar{\alpha}\gamma = 0.$$

Rovnice (21) udává tedy v tomto případě všecka řešení rovnice (19).

Je-li $\varepsilon = 1$, t. j. $\beta = \alpha$, je rovnice (19) ekvivalentní s rovnicí

$$z + \bar{z} = -\frac{\gamma}{\alpha}. \tag{22}$$

Z podmínky $\beta\bar{\gamma} - \bar{\alpha}\gamma = 0$ vyplývá v tomto případě $\frac{\bar{\gamma}}{\bar{\alpha}} = \frac{\gamma}{\alpha}$; to znamená, že číslo $\frac{\gamma}{\alpha}$

je reálné. Řešení rovnice (22) a tudíž i (19) jsou všecka komplexní čísla

$$z = -\frac{\gamma}{2\alpha} + it, \tag{23}$$

kde t probíhá všecka reálná čísla. Výsledek diskuse shrnuje:

Pomocná věta 3. *Rovnice* (19) *je buď neřešitelná nebo má jediné řešení nebo má nekonečně mnoho řešení; v tomto posledním případě jsou jejím řešením buď všecka komplexní čísla nebo všecka čísla, vyjádřená vztahy* (21), *resp.* (23). *Případ, že rovnice* (19) *má nekonečně mnoho řešení, ale není identitou, nastane tehdy a jen tehdy, platí-li* $|\alpha| = |\beta| \neq 0$ a $\beta\bar{\gamma} - \bar{\alpha}\gamma = 0$.[4])

Nyní můžeme vyslovit a dokázat větu o samodružných bodech afinního zobrazení.

Věta 5. *Afinita v rovině, která není identitou,*[5]) *má buď přímku samodružných bodů nebo jediný samodružný bod nebo je bez samodružných bodů.*

Důkaz: Daná ifinita nechť má početní vyjádření

$$z' = az + b\bar{z} + c, \quad |a| \neq |b|.$$

Samodružné body dostaneme řešením rovnice

$$(a - 1)\, z + b\bar{z} + c = 0. \tag{24}$$

Vyloučíme případ $a - 1 = 0$, $b = c = 0$ (t. j. identitu); pak rovnice (24) má podle pomocné věty 3 buď jediné řešení, nebo je neřešitelná nebo jsou její řešení dána jednou z rovnic

$$z = \frac{c}{b - a + 1} + \frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1} \cdot t, \quad |\varepsilon| = 1, \tag{21'}$$

$$z = -\frac{c}{2(a - 1)} + it, \tag{23'}$$

kde t probíhá všecka reálná čísla. Rovnice (21′), (23′) jsou však parametrickým vyjádřením přímky.

Afinitu, jejíž samodružné body vyplňují přímku, nazýváme osovou afinitou. Přímku samodružných bodů nazýváme osou afinity.

Z pomocné věty 3 vyplývá dále přímo tato věta:

Věta 6. *Nutná a postačující podmínka pro to, aby afinita vyjádřená rovnicí*

$$z' = az + b\bar{z} + c, \quad |a| \neq |b|,$$

byla osová, je, aby platily vztahy

$$|b| = |a - 1|, \quad b\bar{c} - (\bar{a} - 1)\, c = 0.$$

Z definice afinity lze dokázat jednoduchou úvahou, že obrazem poloroviny v afinitě je opět polorovina. To znamená, že osová afinita převádí každou z polorovin, vyťatou její osou, buď v tutéž polorovinu, nebo v polorovinu opačnou. Vyslovíme definici:

Osová afinita, která vyměňuje obě poloroviny vyťaté její osou, se nazývá základní afinita.

Věta 7. *Osová afinita, jejíž osou je osa imaginárních čísel, má početní vyjádření*

$$z' = az + (a - 1)\, \bar{z}, \tag{25}$$

[4]) Z pomocné věty 3 lze snadno odvodit rovnici přímky v komplexní proměnné.

[5]) Identita je zobrazení, které každému bodu X roviny přiřazuje týž bod X.

kde a je pevné komplexní číslo, pro něž $a + \bar{a} \neq 1$, $a \neq 1$. Obráceně rovnice (25), *kde $a + \bar{a} \neq 1$, $a \neq 1$ vyjadřuje osovou afinitu, jejíž osou je osa imaginárních čísel.*

Osová afinita, vyjádřená rovnicí (25), *je základní tehdy a jen tehdy, platí-li vztah $a + a - 1 < 0$.*

Důkaz: a) Osová afinita, jejíž osou je osa imaginárních čísel, má podle věty 1 početní vyjádření

$$z' = az + b\bar{z} + c, \quad |a| \neq |b|.$$

Protože každý bod, pro nějž platí $\bar{z} = -z$, je samodružný, je rovnice

$$(a - b - 1)\,z + c = 0$$

splněna pro nekonečně mnoho z. Odtud plyne $b = a - 1$, $c = 0$. Z podmínky $a\bar{a} - b\bar{b} \neq 0$ pak dostaneme

$$a\bar{a} - (a - 1)(\bar{a} - 1) = a + \bar{a} - 1 \neq 0.$$

Obrácením postupu dostaneme druhou část věty 7.

b) Afinita vyjádřená rovnicí (25) je základní tehdy a jen tehdy, převede-li na př. bod [1] v bod ležící uvnitř opačné poloroviny vyťaté osou afinity, t. j. v bod, jehož komplexní souřadnice má zápornou reálnou část. Obrazem bodu [1] v afinitě (25) je bod $[2a - 1]$. Reálná část jeho souřadnice je číslo

$$\frac{1}{2}(2a - 1 + \overline{2a - 1}) = \frac{1}{2}(2a - 1 + 2\bar{a} - 1) = a + \bar{a} - 1.$$

6. Nyní si všimneme skládání afinních zobrazení. Složíme-li afinity $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ (v tomto pořádku) tak, jak skládáme zobrazení v rovině, bude výsledné zobrazení $\mathfrak{A}_3$ opět afinita v rovině; to vyplývá přímo z definice afinního zobrazení. Tuto skutečnost zapíšeme vztahem

$$\mathfrak{A}_3 = \mathfrak{A}_1\,\mathfrak{A}_2$$

nebo

$$\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2 = \mathfrak{A}_3.$$

Skládání afinit je operace, pro kterou platí zákon asociativní, t. j.

$$(\mathfrak{A}_1\,\mathfrak{A}_2)\,\mathfrak{A}_3 = \mathfrak{A}_1\,(\mathfrak{A}_2\,\mathfrak{A}_3).$$

Obecně však při skládání afinit neplatí zákon komutativní, t. j. není vždy $\mathfrak{A}_1\,\mathfrak{A}_2 = \mathfrak{A}_2\,\mathfrak{A}_1$. Označíme-li $\mathfrak{J}$ identické zobrazení a $\mathfrak{A}^{-1}$ afinitu inversní k afinitě $\mathfrak{A}$ (viz větu 2), platí pro každou afinitu vztahy

$$\mathfrak{A}\,\mathfrak{J} = \mathfrak{J}\,\mathfrak{A} = \mathfrak{A}, \quad \mathfrak{A}\,\mathfrak{A}^{-1} = \mathfrak{A}^{-1}\,\mathfrak{A} = \mathfrak{J}.$$

Již v odstavcích 3, 4 jsme poznali, že pro afinitu vyjádřenou rovnicí

$$z' = az + b\bar{z} + c \tag{26}$$

má jakýsi význam číslo $D = a\bar{a} - b\bar{b} = |a|^2 - |b|^2$, které je reálné a různé od nuly. Číslo D budeme nazývat modulem početního vyjádření (26) nebo stručně modulem afinity (26).

O modulu platí věta

Věta 8. *Modul afinity, která vznikla složením dvou afinit, je roven součinu modulů obou těchto afinit.*

Důkaz: Početní vyjádření afinit $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ buďte:

$$\mathfrak{A}_1 \ldots z' = a_1 z + b_1 \bar{z} + c_1,$$
$$\mathfrak{A}_2 \ldots z'' = a_2 z' + b_2 \bar{z'} + c_2.$$

Početní vyjádření afinity $\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2$ dostaneme, dosadíme-li do rovnice pro z'' za z'. Dostaneme

$$z'' = a_2 (a_1 z + b_1 \bar{z} + c_1) + b_2 (\bar{a}_1 \bar{z} + \bar{b}_1 z + \bar{c}_1) + c_2,$$

a po úpravě

$$z'' = (a_1 a_2 + \bar{b}_1 b_2)\, z + (a_2 b_1 + b_2 \bar{a}_1)\, \bar{z} + c_3.$$

Modul D_3 výsledné afinity je

$$D_3 = (a_1 a_2 + \bar{b}_1 b_2)(\bar{a}_1 \bar{a}_2 + b_1 \bar{b}_2) - (a_2 b_1 + b_2 \bar{a}_1)(\bar{a}_2 \bar{b}_1 + \bar{b}_2 a_1) =$$
$$= a_1 \bar{a}_1 a_2 \bar{a}_2 + b_1 \bar{b}_1 b_2 \bar{b}_2 - a_2 \bar{a}_2 b_1 \bar{b}_1 - a_1 \bar{a}_1 b_2 \bar{b}_2 = D_1 D_2,$$

kde D_1, D_2 jsou moduly afinit $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$. Tím je věta dokázána.

Poněvadž modul identity je zřejmě roven jedné, vyplývá z věty 8, že moduly inversních afinit jsou převrácená čísla.

Pomocí modulu lze charakterisovat základní afinitu.

Věta 9. *Osová afinita je základní tehdy a jen tehdy, je-li její modul záporné číslo.*

Důkaz: a) Budiž $\mathfrak{O}$ libovolná osová afinita s osou o. Zvolme afinitu $\mathfrak{A}$ tak, aby přímku o převedla v osu imaginárních čísel; to je možné podle věty 4. Paz afinita

$$\mathfrak{O}' = \mathfrak{A}^{-1} \mathfrak{O} \mathfrak{A}$$

je osová afinita, jejíž osou je osa imaginárních čísel. Skutečně, je-li X libovolný samodružný bod afinity $\mathfrak{O}'$, X_1 obraz bodu X v afinitě $\mathfrak{A}^{-1}$, vyplývá ze vztahu $\mathfrak{O} = \mathfrak{A} \mathfrak{O}' \mathfrak{A}^{-1}$, že X_1 je samodružný bod afinity $\mathfrak{O}$. Všecky samodružné body afinity $\mathfrak{O}'$ tedy dostaneme, když najdeme ke všem samodružným bodům afinity $\mathfrak{O}$ jejich obrazy v afinitě $\mathfrak{A}$. Tím však dostaneme osu y.

Zjistili jsme tedy prozatím: *každou osovou afinitu $\mathfrak{O}$ můžeme vyjádřit ve tvaru $\mathfrak{A} \mathfrak{O}' \mathfrak{A}^{-1}$, kde $\mathfrak{O}'$ je afinita, jejíž osou je osa imaginárních čísel, a $\mathfrak{A}$ je vhodná afinita.*

b) Označme D modul afinity $\mathfrak{O}$, D' modul afinity $\mathfrak{O}'$, D_1 modul afinity $\mathfrak{A}$. Podle věty 8 a poznámky za ní následující je

$$D = D_1 \cdot D' \cdot \frac{1}{D_1} = D'.$$

Osová afinita $\mathfrak{O}'$ má podle věty 7 početní vyjádření (25). Její modul je číslo $D' = a\bar{a} - (a - 1)(\bar{a} - 1) = a + \bar{a} - 1$. Z věty 7 tedy vyplývá, že afinita $\mathfrak{O}'$ je základní tehdy a jen tehdy, je-li $D' < 0$. Poněvadž afinity $\mathfrak{O}$, $\mathfrak{O}'$ jsou buď obě základní nebo není žádná z nich základní, je vztah $D' < 0$ neboli $D < 0$ nutná a postačující podmínka pro to, aby afinita $\mathfrak{O}$ byla základní.

7. Věta 9 je podkladem rozdělení afinit do dvou základních skupin; toto rozdělení souvisí velmi úzce s názornou představou smyslu obíhání, jak dále ukážeme.

Věta 10. *Každou afinitu v rovině lze rozložit v konečný počet základních afinit. Počty základních afinit v kterýchkoli dvou rozkladech dané afinity mají tutéž paritu.*[6])

Důkaz: a) Je-li daná afinita $\mathfrak{A}$ identita a je-li $\mathfrak{O}_1$ libovolná základní afinita, je $\mathfrak{A} = \mathfrak{O}_1 \mathfrak{O}_1^{-1}$, t. j. věta 10 je v tomto případě správná. Je-li daná afinita osová (a nikoli základní) s osou o, zvolíme bod A ležící mimo osu o a bod B, který neleží v polorovině

---

[6]) Za rozklad o jednom členu pokládáme i jedinou základní afinitu.

oA (*obr. 2*); bod A' bude ovšem ležet podle předpokladu v polorovině oA. Podle věty 4 lze sestrojit základní afinitu $\mathfrak{O}_1$ s osou o, která převede bod A v bod B, a základní afinitu $\mathfrak{O}_2$ s osou o, která převede bod B v bod A'. Afinita $\mathfrak{O}_1 \mathfrak{O}_2$ má osu o a převádí bod A v bod A'; podle věty 4 je tedy totožná s danou osovou afinitou $\mathfrak{A}$. Tím jsme dokázali, že lze každou osovou afinitu — pokud není sama základní — rozložit ve dvě základní afinity.

b) Budiž nyní $\mathfrak{A}$ afinita, která není identitou ani osovou afinitou. Zvolme bod A, který nesplyne se svým obrazem A', a zvolme přímku o_1, která odděluje body A, A'. Sestrojme podle věty 4 osovou (základní) afinitu $\mathfrak{O}_1$ s osou o_1, která převede bod A' v bod A. Afinita $\mathfrak{A} \mathfrak{O}_1$ má samodružný bod A; má-li ještě další samodružný bod, je to buď identita nebo osová afinita (viz větu 5). Ze vztahů $\mathfrak{A} \mathfrak{O}_1 = \mathfrak{J}$, resp. $\mathfrak{A} \mathfrak{O}_1 = \mathfrak{O}_2$ vyplývá vztah $\mathfrak{A} = \mathfrak{O}_1{}^{1}$, resp. $\mathfrak{A} = \mathfrak{O}_2 O_1^{-1}$ a v obou těchto případech je podle výsledku odst. a) první část věty 10 dokázána.

Nechť tedy afinita $\mathfrak{A} \mathfrak{O}_1$ má jediný samodružný bod A. Zvolme bod $B \mathrel{\#} A$ a budiž $B_1 \mathrel{\#} B$ jeho obraz v afinitě $\mathfrak{A} \mathfrak{O}_1$. Bodem A vedeme přímku o_2 tak, aby neobsahovala žádný z bodů B, B_1 a podle věty 4 sestrojíme osovou afinitu $\mathfrak{O}_2$ s osou o_2 tak, aby převáděla bod B_1 v bod B. Afinita $\mathfrak{A} \mathfrak{O}_1 \mathfrak{O}_2$ má dva samodružné body $A \mathrel{\#} B$. Podle věty 5 je to tedy buď identita nebo osová afinita $\mathfrak{O}_3$. Ze vztahu $\mathfrak{A} \mathfrak{O}_1 \mathfrak{O}_2 = \mathfrak{J}$, resp. $\mathfrak{A} \mathfrak{O}_1 \mathfrak{O}_2 = \mathfrak{O}_3$ vyplývá vztah $\mathfrak{A} = \mathfrak{O}_2^{-1} \mathfrak{O}_1{}^{1}$, resp. $\mathfrak{A} = \mathfrak{O}_3 \mathfrak{O}_2^{-1} \mathfrak{O}_1^{-1}$ a podle výsledku odst. a) je v těchto případech první část věty 10, t. j. možnost rozkladu dokázána.

c) Podle věty 9 je modul základní afinity záporné číslo. Složením sudého (lichého) počtu základních afinit dostaneme tedy afinitu s kladným (záporným) modulem. Odtud vyplývá druhá část věty 10.

Na základě věty 10 můžeme vyslovit tuto definici:

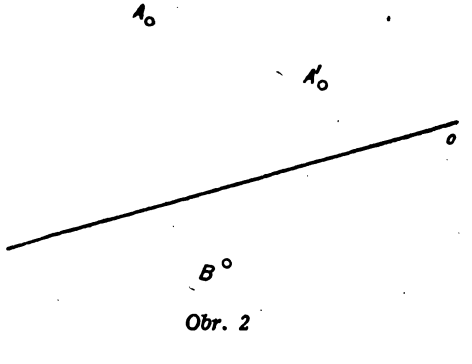
Afinita, kterou lze rozložit v sudý počet základních afinit, se nazývá přímá, afinita, kterou lze rozložit v lichý počet základních afinit, se nazývá nepřímá.

Přímým důsledkem vět 8, 9, 10 je věta:

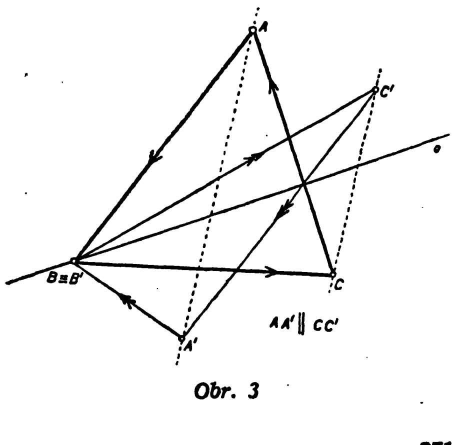
Věta 11. *Přímá afinita v rovině má kladný modul, nepřímá afinita má záporný modul. Obráceně: má-li afinita v rovině kladný modul, je přímá, má-li záporný modul, je nepřímá.*

Poznámka.

Sestrojíme-li libovolný trojúhelník ABC a jeho obraz $A'B'C'$ v základní afinitě $\mathfrak{O}$ (*obr. 3*), pak smysly obíhání (po obvodě trojúhelníků ABC a $A'B'C'$ jsou opačné. Z toho plyne podle věty 10, že stejnou vlastnost mají všecky nepřímé afinity. Naopak při přímé afinitě je smysl obíhání ABC a $A'B'C'$ souhlasný. To znamená: jestliže pro jeden trojúhelník ABC a jeho obraz $A'B'C'$ jsou smysly obíhání ABC, $A'B'C'$ opačné (souhlasné), je příslušná afinita nepřímá (přímá).



Obr. 2



Obr. 3

8. Nyní se obrátíme ke studiu samodružných směrů, které jsou pro třídění afinit mnohem důležitější než samodružné body.

Směrem rozumíme množinu přímek navzájem rovnoběžných. Směr budeme určovat tak, že udáme některý bod různý od počátku a ležící na přímce daného směru, která prochází počátkem. Tak na př. [1] je směr osy reálných čísel, [—i] nebo [i] je směr osy imaginárních čísel. Aby udávání směrů bylo výraznější, budeme — pokud možno — užívat řeckých písmen a oblých závorek místo lomených. Tak směr (ζ) je směr, do něhož náleží přímka spojující body [0] a $[\zeta]$. V označení (ζ) je samozřejmě obsažen předpoklad, že $\zeta \neq 0$.

Věta 12. *Směry (ζ_1), (ζ_2) jsou totožné tehdy a jen tehdy, je-li*

$$\begin{vmatrix} \zeta_1, & \bar{\zeta}_1 \\ \zeta_2, & \bar{\zeta}_2 \end{vmatrix} = 0. \tag{27}$$

Důkaz: Jsou-li oba směry totožné, je $\zeta_2 = \varkappa\,\zeta_1$, kde $\varkappa$ je reálné číslo různé od nuly. Pak je $\bar{\zeta}_2 = \varkappa\,\bar{\zeta}_1$ a platí vztah (27). Obráceně, platí-li vztah (27), je $\zeta_1\bar{\zeta}_2 - \zeta_1\bar{\zeta}_2 = 0$ neboli $\dfrac{\bar{\zeta}_2}{\bar{\zeta}_1} = \dfrac{\zeta_2}{\zeta_1}$, $(\zeta_1 \neq 0)$, t. j. $\dfrac{\zeta_2}{\zeta_1} = \varkappa$ je reálné číslo a přímky [0] $[\zeta_1]$, [0] $[\xi_2]$ splynou.

Věta 13. *Budiž dána afinita $\mathfrak{A}$ rovnicí*

$$z' = az + b\bar{z} + c, \quad |a| \neq |b|.$$

Směr (ζ) je samodružným směrem této afinity[7]) *tehdy a jen tehdy, je-li číslo ζ netriviálním řešením rovnice*

$$\bar{b}\,\zeta^2 + (\bar{a} - a)\,\zeta\bar{\zeta} - b\,\bar{\zeta}^2 = 0. \tag{28}$$

Tuto rovnici nazveme charakteristickou rovnicí směrů dané afinity.

Důkaz: Obraz bodu [0] v dané afinitě je bod $[c]$, obraz bodu $[\zeta]$ je bod $[a\,\zeta + b\,\bar{\zeta} + c]$. Označíme-li $\zeta' = (a\,\zeta + b\,\bar{\zeta} + c) - c = a\,\zeta + b\,\bar{\zeta}$, je směr (ζ) samodružný tehdy a jen tehdy, je-li totožný se směrem (ζ'). Podle věty 12 je příslušná podmínka

$$\begin{vmatrix} \zeta', & \bar{\zeta}' \\ \zeta, & \bar{\zeta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\,\zeta + b\,\bar{\zeta}, & \bar{a}\,\bar{\zeta} + \bar{b}\,\zeta \\ \zeta, & \bar{\zeta} \end{vmatrix} = 0.$$

Odtud dostaneme rovnici (28).

Věta 14. *Afinita má všecky směry za samodružné tehdy a jen tehdy, lze-li ji vyjádřit rovnicí*

$$z' = az + c, \tag{29}$$

kde a je číslo reálné, různé od nuly.

Důkaz: a) Má-li afinita o rovnici

$$z' = az + b\bar{z} + c$$

všecky směry za samodružné, vyhovují rovnici (28) na př. čísla $\zeta = 1$, i, $1 + \mathrm{i}$. Tak dostaneme podmínky

$$\bar{b} + (\bar{a} - a) - b = 0,$$
$$-\bar{b} + (\bar{a} - a) + b = 0,$$
$$2\,\bar{b}\,\mathrm{i} + 2\,(\bar{a} - a) + 2\,b\,\mathrm{i} = 0.$$

[7]) Obrazem směru je v afinitě zřejmě opět směr. Směr je tedy samodružný, splyne-li se svým obrazem.

Sečtením prvních dvou vztahů dostaneme $2(\bar{a} - a) = 0$, t. j. $\bar{a} = a$; a je tedy číslo reálné. Odečtením prvních dvou vztahů a připojením třetího dostaneme po úpravě $b - \bar{b} = 0$, $b + \bar{b} = 0$, t. j. $b = 0$. Poněvadž je $|a|^2 - |b|^2 = |a|^2 \neq 0$, je $a \neq 0$.

b) Vztah (29) zřejmě vyjadřuje afinitu, která má všecky směry za samodružné, neboť všecky koeficienty v rovnici (28) jsou rovny nule.

Složením libovolných dvou afinit, jejichž početní vyjádření má tvar (29), vznikne zřejmě afinita téhož druhu. To je patrné buď z výpočtu nebo z okolnosti, že všecky tyto afinity mají jako charakteristickou vlastnost, že každý směr je pro ně samodružný; a tato vlastnost se při skládání zachová.

Množina všech afinit, pro něž je každý směr samodružný, obsahuje zřejmě i identitu a obsahuje-li určitou afinitu, obsahuje i afinitu k ní inversní. Takovouto množinu nazýváme v matematice grupou. Vyslovíme definici:

Neprázdná množina G zobrazení se nazývá grupou, má-li tyto vlastnosti:

I. Složením dvou libovolných zobrazení z množiny G vznikne opět zobrazení z množiny G.

II. Obsahuje-li množina G určité zobrazení, obsahuje i zobrazení k němu inversní.

Důsledkem vlastností I a II je, že každá grupa zobrazení obsahuje i identitu. Jsou-li G_1, G dvě grupy zobrazení a je-li množina G_1 částí množiny G, říkáme, že G_1 je podgrupou grupy G.

Na základě předchozích úvah můžeme tedy vyslovit tuto větu:

Věta 15. *Množina G_a všech afinních zobrazení v rovině je grupa, t. zv. grupa afinní. Množina všech afinit, pro něž je každý směr samodružný, tvoří pravou podgrupu G_s afinní grupy, zvanou grupa stejnolehkostí.*

Grupa G_s se skládá ze všech afinit, jejichž vyjádření je

$$z' = az + c, \tag{29}$$

kde a je číslo reálné, různé od nuly. Všecky afinity z grupy G_s jsou přímé.

Poslední tvrzení věty 15 vyplývá z věty 11, neboť modul afinity (29) je $|a|^2 > 0$.

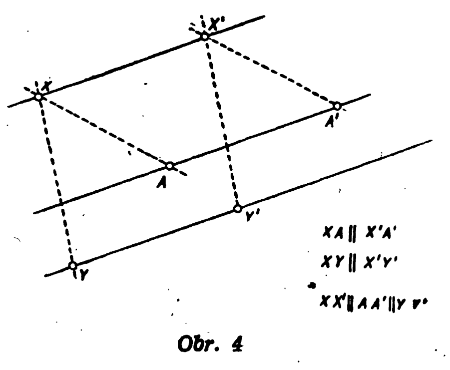
Věta 16. *Grupa stejnolehkostí obsahuje identitu, všecky translace a všecky stejnolehkosti. Identita a translace tvoří podgrupu G_t grupy G_s zvanou grupa translací.*

Důkaz: Zkoumejme samodružné body afinity z grupy G_s. Má-li afinita vyjádření (29), jsou komplexní souřadnice samodružných bodů řešením rovnice

$$(a - 1)z + c = 0.$$

Pro $a = 1$, $c = 0$ jsou všecky body samodružné (afinita je identita), pro $a = 1$, $c \neq 0$ nemá afinita žádný samodružný bod, pro $a \neq 1$ má jediný samodružný bod.

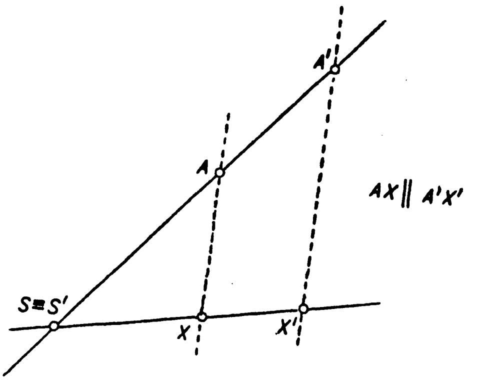
Snadno zjistíme, že afinita $\mathfrak{A}_1$ bez samodružných bodů je translace. Je-li X libovolný bod, X' jeho obraz (*obr. 4*), je přímka XX' zřejmě samodružná. Libovolné dvě různé takové přímky XX', YY' jsou rovnoběžné, neboť, kdyby se protínaly, byl by jejich průsečík samodružným bodem. Budiž A, A' pevná dvojice vzor-obraz, X bod ležící mimo přímku AA', X' jeho obraz;



Obr. 4

pak je jednak $AA' \| XX'$, jednak $AX \| AX'$, t. j. X' sestrojíme jako čtvrtý vrchol rovnoběžníka $XAA'X'$; to je známá konstrukce translace.

Obdobně zjistíme, že afinita $\mathfrak{A}_2$ s jediným samodružným bodem je stejnolehkost. Je-li S samodružný bod, $A \neq S$ další bod, A' jeho obraz, X bod ležící mimo přímku AS, X' jeho obraz (*obr. 5*), pak přímka AS je zřejmě samodružná a obsahuje bod A'. Také přímka SX je samodružná a obsahuje bod X'; mimo to je $AX \| A'X'$. Bod X' tedy sestrojím známou konstrukcí stejnolehkosti.



Obr. 5

9. Nyní se budeme zabývat studiem charakteristické rovnice směrů. Odvodíme nejprve podmínku, aby afinita měla aspoň jeden samodružný směr, t. j. aby rovnice (28) měla aspoň jedno řešení $\zeta \neq 0$ (t. zv. netriviální).

Věta 17. *Afinita daná rovnicí*

$$z' = az + b\bar z + c, \quad |a|^2 - |b|^2 = 0,$$

má aspoň jeden samodružný směr tehdy a jen tehdy, platí-li pro koeficienty a, b vztah

$$(a - \bar a)^2 + 4b\bar b \geq 0.\text{[8])} \qquad (30)$$

Důkaz: a) Má-li daná afinita aspoň jeden samodružný směr, t. j. rovnice (28) aspoň jedno řešení $\zeta \neq 0$, lze dělit rovnici (28) číslem $\bar\zeta^2$ a dostaneme

$$\bar b \left(\frac{\zeta}{\bar\zeta}\right)^2 + (\bar a - a)\frac{\zeta}{\bar\zeta} - b = 0,$$

při čemž $\left|\dfrac{\zeta}{\bar\zeta}\right| = 1$. To znamená, že rovnice

$$\bar b\,\varepsilon^2 + (\bar a - a)\,\varepsilon - b = 0 \qquad (31)$$

má aspoň jeden kořen, který je komplexní jednotkou. Nyní musíme rozeznávat dva případy: buď je $b \neq 0$ nebo je $b = 0$.

1. Je-li $b \neq 0$ a má-li rovnice (31) aspoň jeden kořen ε_1, pro nějž platí $|\varepsilon_1| = 1$, je druhý kořen této rovnice $\varepsilon_2 = -\dfrac{b}{\bar b} : \varepsilon_1$, a proto je také $|\varepsilon_2| = 1$. Ze známé vlastnosti kořenů kvadratické rovnice vyplývá

$$\left|\frac{a - \bar a}{\bar b}\right| = |\varepsilon_1 + \varepsilon_2| \leq |\varepsilon_1| + |\varepsilon| = 2.$$

Odtud dostaneme $|a - \bar a|^2 \leq 4|\bar b|^2$, neboli $(a - \bar a)\cdot(\bar a - a) \leq 4b\bar b$, neboli $(a - \bar a)^2 + 4b\bar b \geq 0$, což jsme měli dokázat.

2. Je-li $b = 0$ a má-li rovnice (31) aspoň jeden kořen ε_1, pro nějž platí $|\varepsilon_1| = 1$, je $\bar a - a = 0$, t. j.

$$(a - \bar a)^2 + 4b\bar b \geq 0.$$

b) Dokážeme, že podmínka (30) je postačující. Také při tom rozlišíme případy $b \neq 0$, $b = 0$.

1. Je-li $b \neq 0$, vyjádříme podle vzorce jeden kořen rovnice (31)

$$\varepsilon_1 = \frac{a - \bar{a} + d}{2\bar{b}},$$

kde $d = \sqrt{(a - \bar{a})^2 + 4 b\bar{b}}$. Dále vyjádříme číslo $\bar{\varepsilon}_1$:

$$\bar{\varepsilon}_1 = \frac{\bar{a} - a + d}{2 b}.$$

Pak je

$$\varepsilon_1\bar{\varepsilon}_1 = \frac{-(a - \bar{a})^2 + d^2}{4 b\bar{b}} = \frac{-(a - \bar{a})^2 + (a - \bar{a})^2 + 4 b\bar{b}}{4 b\bar{b}} = 1.$$

Číslo ε_1 je tedy kořenem rovnice (31), který je komplexní jednotkou.

2. Je-li $b = 0$ a platí-li podmínka (30), je $(a - \bar{a})^2 \geq 0$. Číslo $a - \bar{a}$ je buď číslo ryze imaginární nebo nula. Číslo $(a - \bar{a})^2$ je tedy číslo nekladné. Spojením tohoto vztahu se vztahem $(a - \bar{a})^2 \geq 0$ vyplývá $a - \bar{a} = 0$. Pak je ovšem kořenem rovnice (31) libovolná komplexní jednotka.

Dokázali jsme tedy: platí-li vztah (30), má rovnice (31) aspoň jeden kořen ε_1, který je komplexní jednotkou. Určeme komplexní jednotku η tak, aby platilo $\eta^2 = \varepsilon_1$. Pak číslo $\eta \neq 0$ je kořenem rovnice (28). Skutečně, platí $\bar{b}\,\eta^4 + (\bar{a} - a)\,\eta^2 - b = 0$, neboli $\bar{b}\,\eta^2 + (\bar{a} - a) - b \cdot \frac{1}{\eta^2} = 0$. Protože $\bar{\eta} = \frac{1}{\eta}$ je poslední rovnice totožná s rovnicí (28) pro $\zeta = \eta$. Tím je postačitelnost podmínky (30) dokázána.

Stojí ještě za povšimnutí, že výraz $(a - \bar{a})^2 + 4 b\bar{b}$ je diskriminant rovnice (28).

Podle věty 17 a podle známých vlastností kvadratické rovnice může být tedy afinita o rovnici

$$z' = az + bz + c$$

vzhledem ke svým samodružným směrům čtverého druhu:

1. Afinita, pro niž je každý směr samodružný; je to afinita z grupy G, a nazveme ji **homothetickou**; podmínka (nutná a postačující) pro koeficienty je $\bar{a} = a$, $b = 0$.

2. Afinita, která má dva různé samodružné směry; nazveme ji **afinitou hyperbolickou**; podmínka pro koeficienty je

$$(a - \bar{a})^2 + 4 b\bar{b} > 0.$$

Příkladem hyperbolické afinity je afinita základní, jak se můžeme přesvědčit podle věty 7. Je totiž $(a - \bar{a})^2 + 4 b\bar{b} = (a + \bar{a}) - 4 (a\bar{a} - b\bar{b})$; první člen je kvadrát čísla reálného, t. j. číslo nezáporné, druhý člen je číslo kladné.

3. Afinita, která má jediný samodružný směr; nazveme ji **afinitou parabolickou**; podmínka pro koeficienty je

$$(a - \bar{a})^2 + 4 b\bar{b} = 0, \quad b \neq 0.$$

Příkladem parabolické afinity je **elace**[9]); také se o tom přesvědčíme na základě věty 7.

4. Afinita, která nemá žádný samodružný směr; nazveme ji **afinitou eliptickou** Podmínka pro koeficienty je

$$(a - \bar{a})^2 + 4 b\bar{b} < 0.$$

[9]) Číslo $a - \bar{a}$ je ryze imaginární nebo nula; číslo $(a - \bar{a})^2$ je tedy reálné. Číslo $4 b\bar{b}$ je nezáporné; je tedy $(a - \bar{a})^2 + 4 b\bar{b}$ vždy číslo reálné.

Příklady eliptických afinit poznáme v dalším.

10. Zvolme hyperbolickou afinitu $\mathfrak{A}_0$, která má samodružné směry (ζ_1), (ζ_2). Množina Γ všech afinit, které mají samodružné směry $(\zeta_1), (\zeta_2)$, tvoří patrně podgrupu afinní grupy, do níž náležejí všecky homothetické afinity a všecky hyperbolické afinity se samodružnými směry (ζ_1) (ζ_2).

Grupu Γ lze však charakterisovat ještě jinak. Budiž

$$\bar{b}_0 \zeta^2 + (\bar{a}_0 - a_0) \zeta\bar{\zeta} - b_0 \bar{\zeta}^2 = 0 \tag{32a}$$

charakteristická rovnice směrů afinity $\mathfrak{A}_0$ a

$$\bar{b} \zeta^2 + (\bar{a} - a) \zeta\bar{\zeta} - b \bar{\zeta}^2 = 0 \tag{32b}$$

charakteristická rovnice směrů libovolné afinity $\mathfrak{A}$ z Γ. Podle předpokladu o afinitě $\mathfrak{A}$ má rovnice (32b) buď všecky koeficienty rovné nule nebo úměrné koeficientům rovnice (32a), t. j. v každém případě platí $b = \varkappa b_0$, $\bar{b} = \varkappa \bar{b}_0$, $\bar{a} - a = \varkappa (\bar{a}_0 - a)$. O čísle $\varkappa$ lze snadno dokázat, že je reálné[10].

Afinita $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_0$ převádí směr (ζ) ve směr (ζ'), daný rovností

$$\zeta' = a_0 (a \zeta + b \bar{\zeta}) + b_0 (\bar{a} \bar{\zeta} + \bar{b} \zeta) = (a_0 a + b_0 \bar{b}) \zeta + (a_0 b + \bar{a} b_0) \bar{\zeta}. \tag{33a}$$

Afinita $\mathfrak{A}_0 \mathfrak{A}$ převádí směr (ζ) ve směr (ζ''), daný rovností

$$\zeta'' = a (a_0 \zeta + b_0 \bar{\zeta}) + b (\bar{a}_0 \bar{\zeta} + \bar{b}_0 \zeta) = (a_0 a + b \bar{b}_0) \zeta + (a b_0 + a_0 b) \bar{\zeta}. \tag{33b}$$

Použijeme-li ve vztazích (33a), (33b) rovností $b = \varkappa b_0$, $\bar{a} = a + \varkappa (\bar{a}_0 - a_0)$, zjistíme, že platí

$$\zeta'' = \zeta' = (a_0 a + \varkappa b_0 \bar{b}_0) \zeta + (a b_0 + \varkappa \bar{a}_0 b_0) \bar{\zeta},$$

t. j., že obě afinity $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_0$, $\mathfrak{A}_0\mathfrak{A}$ převádějí každý směr (ζ) v týž směr (ζ'). Abychom se mohli stručně vyjadřovat, zavedeme nový název.

Nechť afinity $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$ mají tu vlastnost, že obě afinity $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2$ i $\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_1$ převádějí každý bod roviny v týž bod (t. j. jsou totožné); pak nazýváme **afinity** $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$ **komutativní**.

Nechť afinity $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$ mají tu vlastnost, že obě afinity $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2$ i $\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_1$ převádějí každý směr v týž směr; pak nazýváme **afinity** $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$ **směrově komutativní**.

Podle předcházejícího výkladu je tedy každá afinita z grupy Γ směrově komutativní s danou afinitou $\mathfrak{A}_0$. Lze dokázat,[11] že obráceně každá afinita směrově komutativní s $\mathfrak{A}_0$ náleží do Γ. Grupa Γ je tedy množina všech afinit směrově komutativních s danou afinitou $\mathfrak{A}_0$. O množině afinit směrově komutativních s danou afinitou je však možno uvažovat i v přírodě, že afinita $\mathfrak{A}_0$ **není** hyperbolická.

Věta 18. *Množina všech afinit směrově komutativních s danou afinitou je podgrupa afinní grupy.*

Důkaz: Budiž $\mathfrak{A}_0$ daná afinita, $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$ dvě afinity směrově komutativní s $\mathfrak{A}_0$. Nechť afinita $\mathfrak{A}_0 \mathfrak{A}_1$ převede směr (ζ) ve směr (ζ'), afinita $\mathfrak{A}_1$ nechť převede směr (ζ) ve směr (ζ_1), afinita $\mathfrak{A}_2$ směr (ζ') ve směr (ζ''). Pak převede afinita $\mathfrak{A}_0\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2$ směr (ζ) ve směr (ζ''), afinita $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_0$ směr (ζ) ve směr (ζ'), afinita $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_0\mathfrak{A}_2$ směr (ζ) ve směr (ζ''). Odtud plyne,

---

[9]) Elace je osová afinita, jejíž směr je směr osy.

[10]) Ze vztahu $b = \varkappa b_0$ plyne $\bar{b} = \bar{\varkappa} \bar{b}_0$ a spojením tohoto vztahu s rovností $\bar{b} = \varkappa \bar{b}_0$ dostaneme $\bar{\varkappa} \bar{b}_0 = \varkappa \bar{b}_0$. Je-li $b_0 \neq 0$, vyplývá odtud $\bar{\varkappa} = \varkappa$ (t. j. $\varkappa$ je číslo reálné). Je-li $b_0 = 0$, je $\bar{a}_0 - a_0 \neq 0$ (neboť afinita $\mathfrak{A}_0$ není z $\mathfrak{E}_s$). Pak ze vztahu $\bar{a} - a = \varkappa (\bar{a}_0 - a_0)$ dostaneme $a - \bar{a} = \bar{\varkappa} (a_0 - a_0)$ a spojením obou vztahů $\varkappa (\bar{a}_0 - a_0) = \bar{\varkappa} (\bar{a}_0 - a_0)$, t. j. opět $\varkappa = \bar{\varkappa}$.

[11]) Odůvodnění tohoto tvrzení vyplyne z věty 19.

že afinita $\mathfrak{A}_0\mathfrak{A}_2$ převede směr (ζ_1) ve směr (ζ''); totéž ovšem platí i o afinitě $\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_0$. Převede tedy afinita $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_0$ směr (ζ) ve směr (ζ'') právě tak jako $\mathfrak{A}_0\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2$. Tím je dokázáno: Je-li Γ množina všech afinit směrově komutativních s $\mathfrak{A}_0$ a jsou-li $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ libovolné dvě afinity z Γ, náleží afinita $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2$ také do množiny Γ.

Dokážeme dále: Je-li $\mathfrak{A}$ afinita z Γ, je také $\mathfrak{A}^{-1}$ afinita z Γ. Nechť afinita $\mathfrak{A}$ převádí směr (ζ) ve směr (ζ'), afinita $\mathfrak{A}_0$ směr (ζ) ve směr (ζ_1) a směr (ζ') ve směr (ζ''). Pak $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_0$ i $\mathfrak{A}_0\mathfrak{A}$ převádí směr (ζ) ve směr (ζ''); odtud plyne, že afinita $\mathfrak{A}$ převádí směr (ζ_1) ve směr (ζ''), t. j., že afinita $\mathfrak{A}^{-1}$ převádí směr (ζ'') ve směr (ζ_1). Převádí tedy afinita $\mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{A}_0$ směr (ζ') ve směr (ζ_1) a totéž platí i o afinitě $\mathfrak{A}_0\mathfrak{A}^{-1}$. Protože směr (ζ) byl libovolný, je také směr (ζ') libovolný; tím je dokázáno naše tvrzení i věta 18.

Věta 19. *Budiž $z' = a_0 z + b_0 \bar{z} + c_0$ rovnice afinity $\mathfrak{A}_0$, která není homothetická. Pak afinita $\mathfrak{A}$ o rovnici $z' = az + b\bar{z} + c$ náleží do grupy Γ afinit směrově komutativních s afinitou $\mathfrak{A}_0$ tehdy a jen tehdy, jsou-li koeficienty charakteristické rovnice směrů afinity $\mathfrak{A}$ úměrné koeficientům charakteristické rovnice směrů afinity $\mathfrak{A}_0$, t. j. platí-li*

$$b = \varkappa\, b_0,\ \bar{b} = \varkappa\, \bar{b}_0,\ \bar{a} - a = \varkappa\, (\bar{a}_0 - a_0).$$[12]

Důkaz. a) Je-li $\mathfrak{A}$ afinita směrově komutativní s afinitou $\mathfrak{A}_0$, jsou rovnice (33a), (33b) ze str. 24 navzájem totožné. Odtud plyne

$$\begin{aligned} a_0 a + b_0 \bar{b} &= a_0 a + b \bar{b}_0, \\ a_0 b + \bar{a} b_0 &= a b_0 + \bar{a}_0 b. \end{aligned} \tag{34}$$

Platí tedy $b_0 \bar{b} = b \bar{b}_0$. Nyní musíme rozlišit dva případy: $b_0 \neq 0$, $b_0 = 0$. Je-li $b_0 \neq 0$, dostaneme z první rovnice (34)

$$\frac{b}{b_0} \neq \frac{\bar{b}}{\bar{b}_0};$$

$\dfrac{b}{b_0}$ je tedy reálné číslo $\varkappa$ a platí $b = \varkappa\, b_0$, $\bar{b} = \varkappa\, \bar{b}_0$. Z druhé z rovnic (34) plyne v tomto případě $\bar{a} - a = \varkappa\, (a_0 - a_0)$; koeficienty charakteristické rovnice směrů afinity $\mathfrak{A}$ jsou $\varkappa$-násobky příslušných koeficientů charakteristické rovnice směrů afinity $\mathfrak{A}_0$.

Je-li $b_0 = 0$, vyplývá z druhé z rovnic (34) vztah $b \cdot (\bar{a}_0 - a_0) = 0$. Protože afinita $\mathfrak{A}_0$ není homotetická, je $\bar{a}_0 - a_0 \neq 0$, t. j. $b = 0$. Číslo $\bar{a} - a$ je nula nebo ryze imaginární; podíl $(\bar{a} - a) : (\bar{a}_0 - a_0)$ je reálné číslo $\varkappa$. Platí tedy opět

$$b = \varkappa\, b_0,\ \bar{b} = \varkappa\, \bar{b}_0,\ \bar{a} - a = \varkappa\, (\bar{a}_0 - a_0). \tag{35}$$

b) Nechť platí vztahy (35). Pak (jako na str. 529) dokážeme dosazením, že vztahy (33a), (33b) jsou totožné.

Z vět 18, 19 plynou tyto důsledky:

1. *Je-li afinita $\mathfrak{A}_0$ homotetická, je příslušná grupa Γ grupa afinní G_a.*

2. *Není-li afinita $\mathfrak{A}_0$ homotetická a je-li $\mathfrak{A}_1$ afinita z grupy Γ, která také není homotetická, pak množina všech afinit směrově komutativních s afinitou $\mathfrak{A}_1$ je grupa Γ.*

3. *Je-li $\mathfrak{A}_0$ afinita hyperbolická, je každá afinita z grupy Γ buď homotetická nebo hyperbolická s týmiž samodružnými směry. Obdobné tvrzení platí, je-li dána afinita $\mathfrak{A}_0$ parabolická nebo eliptická.*

11. Grupa afinit Γ směrově komutativních s danou afinitou $\mathfrak{A}_0$ má zvláště jednoduché chování, je-li afinita $\mathfrak{A}_0$ eliptická. Platí totiž věta:

---

[12]) $\varkappa$ bude ovšem číslo reálné (viz důkaz na str. 23).

Věta 20. *Grupa afinit směrově komutativních s danou eliptickou afinitou obsahuje samé přímé afinity. Každá její afinita, která není homotetická, je eliptická a má jediný samodružný bod.*

Důkaz. a) Budiž $\mathfrak{A}$ afinita z grupy Γ, která není homotetická; pak je afinita $\mathfrak{A}$ eliptická (viz větu 19). Je-li početní vyjádření afinity $\mathfrak{A}$

$$z' = az + b\bar{z} + c,$$

platí podle věty 17 vztah $(a - \bar{a})^2 + 4 b\bar{b} < 0$. Upravíme levou stranu

$$(a - \bar{a})^2 + 4 b\bar{b} = (a + \bar{a})^2 - 4 (a\bar{a} - b\bar{b}). \tag{36}$$

Protože $(a + \bar{a})^2 \geqq 0$ (kvadrát reálného čísla), musí být $a\bar{a} - b\bar{b} > 0$. Je tedy každá afinita $\mathfrak{A}$ z Γ, která není homotetická, přímá. Protože všechny homotetické afinity jsou také přímé, je první část věty dokázána.

b) Samodružné body eliptické afinity $\mathfrak{A}$ z Γ mají za souřadnice kořeny rovnice

$$(a - 1) \cdot z + b\bar{z} + c = 0. \tag{37}$$

O řešení této rovnice rozhoduje výraz

$$(a - 1)(\bar{a} - 1) - b\bar{b} = a\bar{a} - b\bar{b} - (a + \bar{a}) + 1.$$

Podle (36) však je

$$a\bar{a} - b\bar{b} > \frac{1}{4}(a + \bar{a})^2.$$

Je tedy

$$(a - 1)(\bar{a} - 1) - b\bar{b} > \frac{1}{4}(a + \bar{a})^2 - (a + \bar{a}) + 1 = \frac{1}{4}(a + \bar{a} - 2)^2,$$

to jest

$$(a - 1)(\bar{a} - 1) - b\bar{b} > 0$$

a rovnice (37) má jediné řešení.

Grupu Γ všech afinit, které jsou směrově komutativní s danou eliptickou afinitou, nazveme základní grupou eliptických afinit.

Afinní grupa obsahuje zřejmě nekonečně mnoho takových grup; všecky základní grupy eliptických afinit mají společnou část — grupu stejnolehlostí.

V úzké souvislosti se základními grupami eliptických afinit jsou zobrazení, nazývaná v elementární geometrii „podobnost".

Podobností (podobným zobrazením) v rovině nazýváme zobrazení, které má tuto vlastnost: Jsou-li X, Y dva libovolné různé body roviny, X', Y' jejich obrazy (navzájem různé), platí pro velikosti úseček vztah

$$X'Y' = k \cdot XY, \tag{38}$$

kde k je pevné kladné číslo, nazývané poměr podobnosti.

Je-li $k = 1$, zní vztah (38) $X'Y' = XY$, což vyjadřuje shodnost úseček XY a $X'Y'$. Takovéto podobné zobrazení nazýváme shodné zobrazení (shodnost).

Věta 21. *Podobné zobrazení je afinita.*

Důkaz: Musíme dokázat, že podobnost je vzájemně jednoznačné přiřazení bodů, které zachovává uspořádání a že převádí přímku v přímku.

a) Dokážeme nejprve, že obrazem úsečky AB je úsečka $A'B'$. Jsou-li A, B dva navzájem různé body, jsou také body A', B' navzájem různé. Je-li X bod mezi A, B, platí pro něj vztah $AX + BX = AB$, kde znaky AX, BX, AB znamenají velikosti úseček. Znásobíme-li předchozí vztah číslem k, vyjde vzhledem k (38) vztah $A'X' + B'X' = A'B'$; z něho vyplývá, že bod X' náleží úsečce $A'B'$. Protože je $X' \not\equiv A', B'$, leží bod X' mezi body A', B'.

Budiž Y libovolný bod úsečky $A'B'$; pak platí $A'Y + B'Y = A'B'$, neboli vzhledem k (38) $\frac{1}{k} A'Y + \frac{1}{k} B'Y = AB$. Uvnitř úsečky AB sestrojíme bod X tak, aby platilo $AX = \frac{1}{k} A'Y$; to je možné, neboť $\frac{1}{k} A'Y < AB$. Obrazem bodu X je podle předchozího výkladu bod X' vnitřku úsečky $A'B'$, pro který platí $A'X' = k \cdot AX = A'Y$; proto je $Y' \equiv Y$, t. j. každý bod úsečky $A'B'$ je obrazem některého bodu úsečky AB. Tím je první tvrzení dokázáno a zároveň je dokázáno, že podobnost v užším smyslu zachovává uspořádání.

b) Každý bod přímky AB náleží některé úsečce XY, která obsahuje body A i B jako vnitřní. Obrazem úsečky XY je úsečka $X'Y'$, která obsahuje podle odst. a) body A', B' jako vnitřní; bod Z' náleží úsečce $X'Y'$, a tudíž i přímce $A'B'$.

Je-li $Y \not\equiv A'$ libovolný bod přímky $A'B'$, náležející na př. polopřímce $A'B'$, sestrojíme na polopřímce AB bod X, pro nějž platí $AX = \frac{1}{k} A'Y$. Jeho obraz X leží podle předcházejícího na polopřímce $A'B'$ a platí pro něj $A'X' = k \cdot AX = A'Y$, t. j. $X' \equiv Y$.

Skutečně je tedy obrazem přímky přímka. Odtud vyplývá, že obrazem roviny je v podobnosti rovina a vzhledem ke vztahu (38) je podobnost vzájemně jednoznačné přiřazení bodů roviny.

Věta 22. *Každá podobnost je početně vyjádřena jednou z rovnic*

$$z' = az + c, \tag{39a}$$

$$z' = b\bar{z} + c, \tag{39b}$$

kde a, b jsou pevná komplexní čísla různá od nuly. Obráceně rovnice (39a) *nebo* (39b), *kde a nebo b je pevné komplexní číslo různé od nuly, vyjadřuje podobnost.*

Důkaz: Protože je podobnost afinitou, má početní vyjádření

$$z' = az + b\bar{z} + c. \tag{40}$$

Označme k poměr podobnosti; obrazem bodu $[0]$ je bod $[c]$, obrazem bodu $[z]$ je bod $[z']$, proto platí

$$|z' - c| = k\,|z|.$$

Vzhledem k rovnici (40) dostaneme vztah

$$|az + b\bar{z}| = k\,|z|,$$

platný pro všecka komplexní čísla z. Z tohoto vztahu plyne

$$|az^2 + bz\bar{z}| = |z|\,|az + b\bar{z}| = k\,|z|^2. \tag{41}$$

Je-li $a = 0$, plyne ze vztahu (41) (pro $z = 1$) $|b| = k$. Je-li $a \neq 0$, dosadíme do (41) za z postupně čísla z_1, z_2, pro něž platí $z_1^2 = \frac{b}{a}$, $z_2^2 = -\frac{b}{a}$; dostaneme

$$|b + bz_1\bar{z}_1| = k\,|z_1|^2, \quad |-b + bz_2\bar{z}_2| = k \cdot |z_2|^2.$$

Protože je $|z_1|^2 = z_1\,\bar{z}_1 = |z_2|^2 = z_2\bar{z}_2 = \left|\frac{b}{a}\right|$, platí

$$\left| b + b \left| \frac{b}{a} \right| \right| = \left| -b + b \left| \frac{b}{a} \right| \right|,$$

neboli

$$|b| \cdot \left| 1 + \left| \frac{b}{a} \right| \right| = |b| \left| \cdot 1 - \left| \frac{b}{a} \right| \right|. \tag{42}$$

Tento vztah však lze splnit, jen když je $b = 0$. Neboť je-li $b \neq 0$, je $\left| \dfrac{b}{a} \right| > 0$ a ze vztahu (42) plyne

$$\left| 1 + \left| \frac{b}{a} \right| \right| = \left| 1 - \left| \frac{b}{a} \right| \right|.$$

Avšak vztah $|1 + x| = |1 - x|$ nelze splnit žádným kladným číslem x.

Dokázali jsme tedy, že buď je $a = 0, |b| = k$ nebo je $|b| = 0$, a pak z rovnice (41) vyplývá $|a| = k$. Tím jsou dokázány rovnice (39a), (39b).

Zobrazení dané rovnicí (39a) nebo (39b) má vlastnost vyjádřenou jednou z rovnic

$$|z_1' - z_2'| = |a(z_1 - z_2)| = |a| \cdot |z_1 - z_2|,$$
$$|z_1' - z_2'| = |b(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)| = |b| \cdot |\bar{z}_1 - \bar{z}_2| = |b| \cdot |z_1 - z_2|.$$

Tyto vztahy vyjadřují definici podobnosti.

Věta 23. *Všecky podobnosti tvoří grupu* G_p', *jež je podgrupou afinní grupy. Všecky přímé podobnosti tvoří podgrupu* G_p *grupy* G_p'; *tato grupa* G_p *je jednou ze základních grup eliptických afinit.*

Důkaz: Složením dvou afinit daných rovnicemi (39a), (39b) dostaneme zřejmě opět afinitu vyjádřenou jednou z těchto rovnic. Jsou-li obě afinity typu (39a), vznikne opět afinita typu (39a). Dále je zřejmé, že mezi afinity typu (39a) náleží i identita a že afinita inversní k afinitě typu (39a), resp. (39b) je opět afinita typu (39a), resp. (39b).

Afinity typu (39a) jsou zřejmě přímé, neboť jejich modul je $a\bar{a} > 0$; afinity typu (39b) jsou nepřímé, neboť jejich modul je $-b\bar{b} < 0$. Charakteristická rovnice směrů přímé podobnosti je

$$(\bar{a} - a)\,\zeta\bar{\zeta} = 0. \tag{43}$$

Zvolíme libovolnou přímou podobnost, jež není stejnolehlostí. Její početní vyjádření je $z' = a_0 z + c_0$, kde a_0 je číslo imaginární. Číslo $\bar{a}_0 - a_0$ je tedy ryze imaginární. Rovnice (43) vznikne, znásobíme-li rovnici $(\bar{a}_0 - a_0)\,\zeta\bar{\zeta} = 0$ vhodným reálným koeficientem. To znamená, že grupa G_p je základní grupou eliptických afinit. Tím je věta 23 dokázána.

Grupu přímých podobností lze charakterisovat jednoduše pomocí shodností; to učiníme v následující větě.

Věta 24. *Všecky shodnosti tvoří grupu* G_k', *která je podgrupou grupy podobností. Všecky přímé shodnosti tvoří podgrupu* G_k *grupy* G_k'. *Mezi všemi základními grupami eliptických afinit existuje jediná, která obsahuje grupu* G_k *přímých shodností: je to grupa* G_p *přímých podobností.*

Důkaz: Přímá shodnost je podle věty 23 a podle rovnice (39a) vyjádřena vztahem

$$z' = az + c, \tag{44}$$

kde $|a| = 1$. Nepřímá shodnost je vyjádřena rovnicí

$$z' = b\bar{z} + c,$$

kde $|b| = 1$. Jako v důkazu věty 23 dokážeme, že všecky shodnosti tvoří grupu a že všechny přímé shodnosti tvoří její podgrupu.

Budiž nyní Γ základní grupa eliptických afinit; charakteristická rovnice směrů eliptické afinity z Γ budiž

$$b_0 \zeta^2 + (\bar{a}_0 - a_0) \zeta \bar{\zeta} - b_0 \bar{\zeta}^2 = 0.$$

Má-li do grupy Γ náležet přímá shodnost o rovnici (44), která nenáleží grupě stejnolehlostí, musí být $0 = kb_0$, $\bar{a} - a = k(\bar{a}_0 - a_0)$. Poněvadž je $\bar{a} - a$ číslo ryze imaginární, právě tak jako číslo $\bar{a}_0 - a_0$, je $k \neq 0$, a tudíž $b_0 = 0$. Pak splyne zřejmě grupa Γ s grupou G_p.

12. Obrátíme se nyní k dalšímu úkolu: víme, že ke grupě G_p přímých podobností lze sestrojit nadřaděnou grupu G'_p všech podobností, která G_p obsahuje; víme také, že grupa G_p je jednou ze základních grup eliptických afinit, neboli že základní grupa eliptických afinit je zobecněním grupy přímých podobností. Je nyní otázka, zda lze zobecnit také pojem grupy G'_p všech podobností, t. j. zda lze sestrojit ke každé základní grupě eliptických afinit nadřaděnou grupu, která by obsahovala i nepřímé afinity. Odpověď na tuto otázku je kladná; abychom však mohli toto zobecnění provést, musíme nejprve zavést nový pojem.

Afinitu $\mathfrak{A}$, která není identitou, nazveme **involutorní afinitou**, nebo krátce **involucí**, je-li totožná se svým inversním zobrazením, t. j. platí-li $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^{-1}$, neboli $\mathfrak{A}^2 = \mathfrak{J}$.

Involutorní osová afinita se nazývá **kosá souměrnost**.

Věta 25. *Kosá souměrnost, jejíž osou je osa ryze imaginárních čísel, má početní vyjádření*

$$z' = az + (a - 1)\bar{z}, \tag{45}$$

kde a je číslo ryze imaginární nebo nula. Obráceně afinita s rovnicí (45), *kde a je číslo ryze imaginární nebo nula, je kosá souměrnost. Směr kosé souměrnosti o rovnici* (45) *má souřadnici* $(1 - a)$.

Důkaz: Podle věty 7 má osová afinita, která má za osu ryze imaginárních čísel, početní vyjádření

$$z' = az + (a - 1)\bar{z}. \tag{46a}$$

Inversní zobrazení k této afinitě je dáno rovnicí

$$z = \frac{\bar{a}}{a + \bar{a} - 1} z' - \frac{a - 1}{a + \bar{a} - 1} \bar{z}', \tag{46b}$$

jak zjistíme, řešíme-li rovnici (46a) a rovnici pro $\bar{z}'$ podle z. Mají-li být zobrazení (46a), (46b) totožná, musí platit

$$\frac{\bar{a}}{a + \bar{a} - 1} = a, \quad - \frac{a - 1}{a + \bar{a} - 1} = a - 1.$$

Poněvadž $a \neq 1$ (afinita není identita), je $a + \bar{a} = 0$, t. j. buď $a = 0$ nebo je a číslo ryze imaginární. Obrácením tohoto postupu dostaneme další tvrzení věty 25.

Směr kosé souměrnosti má patrně souřadnici $(z' - z)$; přitom je

$$z' - z = (a - 1)(z + \bar{z}).$$

Je-li $z \neq 0$ a není-li z ryze imaginární číslo, je $z + \bar{z}$ reálné číslo různé od nuly; směr kosé souměrnosti má tedy skutečně souřadnici $(1 - a)$.

Věta 26. *Kosá souměrnost má tyto vlastnosti: je to základní afinita a střed úsečky omezené vzorem a obrazem leží na ose afinity.*

Důkaz: Modul kosé souměrnosti je $a + \bar{a} - 1 = -1 < 0$. Střed úsečky $[z]\,[z']$ má souřadnici

$$z_0 = \frac{1}{2}(z + z') = \frac{1}{2}[z + az + (a-1)\bar{z}] = \frac{1}{2}(a+1)z + \frac{1}{2}(a-1)\bar{z}.$$

Vypočteme

$$\bar{z}_0 = \frac{1}{2}[(-a+1)\bar{z} + (-a-1)z] = -\frac{1}{2}[(a+1)z + (a-1)\bar{z}] = -z_0.$$

Číslo z_0 je tedy buď nula nebo číslo ryze imaginární.

Vraťme se nyní ke grupě podobností. Z početního vyjádření podobnosti rovnicemi (39a), (39b) vyplývá tato důležitá věta o určenosti podobného zobrazení:

Věta 27. *Buďte A, B dva vzájemně různé body, A', B' také dva vzájemně různé body. Pak existuje jediná přímá a jediná nepřímá podobnost, které převádějí body A, B po řadě v body A', B'.*

Důkaz: Má-li přímá podobnost převádět body $A = [z_1]$, $B = [z_2]$ v body $A' = [z_1']$, $B' = [z_2']$, musí platit

$$z_1' = az_1 + c, \quad z_2' = az_2 + c, \tag{47}$$

kde a, c jsou neznámá komplexní čísla. Poněvadž je $A \not\equiv B$, je

$$\begin{vmatrix} z_1, & 1 \\ z_2, & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

a soustava (47) má jediné řešení. Nemůže být $a = 0$, neboť pak by platilo $z_1' = c = z_2'$. Zcela obdobné odůvodnění lze uvést pro podobnost nepřímou. Tím je věta 27 dokázána.

Zvolme nyní libovolnou přímku o a ptejme se, zda existuje kosá souměrnost $\mathfrak{K}$ s osou o, pro kterou platí

$$\mathfrak{K}\, G_p\, \mathfrak{K} = G_p, \tag{48}$$

to jest pro kterou platí toto: určíme-li postupně všechny možné afinity $\mathfrak{K}\mathfrak{P}\mathfrak{K}$, kde $\mathfrak{P}$ probíhá všechny přímé podobnosti, dostaneme grupu G_p.

Abychom zodpověděli danou otázku, sestrojíme přímou podobnost $\mathfrak{P}_0$, která převede přímku o v imaginární osu. To je možné podle věty 27. Je-li $\mathfrak{K}$ kosá souměrnost, která má vlastnost (48), pak afinita $\mathfrak{K}' = \mathfrak{P}_0^{-1}\mathfrak{K}\mathfrak{P}_0$ má také vlastnost (48), neboť

$$\mathfrak{K}'\, G_p\, \mathfrak{K}' = \mathfrak{P}_0^{-1}\,\mathfrak{K}\,\mathfrak{P}_0\, G_p\, \mathfrak{P}_0^{-1}\,\mathfrak{K}\,\mathfrak{P}_0 = \mathfrak{P}_0^{-1}\,\mathfrak{K}\, G_p\, \mathfrak{K}\,\mathfrak{P}_0 = \mathfrak{P}_0^{-1}\, G_p\, \mathfrak{P}_0 = G_p.$$

Avšak $\mathfrak{K}'$ je zřejmě také kosá souměrnost, která má za osu imaginární osu. Afinita $\mathfrak{K}'$ má totiž každý bod imaginární osy za samodružný a mimo to je $\mathfrak{K}'$ involuce, neboť $\mathfrak{K}'^2 = \mathfrak{J}$.

To znamená, že hledané kosé souměrnosti $\mathfrak{K}$ s vlastností (48) lze vzájemně jednoznačně přiřadit kosým souměrnostem $\mathfrak{K}'$ s vlastností (48). Kosé souměrnosti $\mathfrak{K}'$ však snadno najdeme výpočtem. Nechť má $\mathfrak{K}'$ podle věty 25 početní vyjádření

$$z' = \alpha z + (\alpha - 1)\bar{z},$$

kde $\alpha = -\bar{\alpha}$, a nechť má přímá podobnost $\mathfrak{P}$ z G_p' podle věty 22 početní vyjádření

$$z' = az + c.$$

Snadno zjistíme, že afinita $\mathfrak{K}'\mathfrak{P}$ je dána rovnicí

$$z' = a\alpha z + a \cdot (\alpha - 1)\bar{z} + c.$$

Odtud vyplývá (protože $\bar{\alpha} = -\alpha$)

$$\bar{z'} = -\bar{a}\,\alpha\,\bar{z} - \bar{a}\cdot(\alpha+1)\,z + \bar{c}',$$

a dále dostaneme pro afinitu $\mathfrak{K}'\mathfrak{P}\mathfrak{K}'$ po úpravě početní vyjádření

$$z = [a\,\alpha^2 - \bar{a}\cdot(\alpha^2 - 1)]\,z + [a\,\alpha\,(\alpha-1) - \bar{a}\,\alpha\,(\alpha-1)]\,\bar{z} + [\alpha\,c + (\alpha-1)\,\bar{c}]. \quad (49)$$

Afinita s rovnicí (49) je přímá podobnost tehdy a jen tehdy, je-li koeficient při $\bar{z}$ roven nule, pro všechny přímé podobnosti $\mathfrak{P}$, t. j. platí-li

$$(a - \bar{a})\cdot\alpha\cdot(\alpha - 1) = 0.$$

Avšak $a - \bar{a} \neq 0$, neboť $a = \bar{a}$ platí jen pro homotetické afinity; dále je $\alpha \neq 1$, neboť $\mathfrak{K}'$ není identita; je tedy $\alpha = 0$. Kosá souměrnost $\mathfrak{K}'$ má pak vyjádření

$$z' = -\bar{z},$$

což je rovnice osové souměrnosti, jejíž osou je imaginární osa. Je zřejmé, že proběhne-li podobnost $\mathfrak{P}$ grupu G_p, proběhne podobnost $\mathfrak{K}'\mathfrak{P}\mathfrak{K}'$ také grupu G_p. To znamená, že existuje jediná kosá souměrnost s osou v imaginární ose, která splňuje podmínku (48); je to osová souměrnost. Z předchozího výkladu vyplývá, že existuje také jediná kosá souměrnost s osou o (libovolnou), která splňuje podmínku (48). Výsledek vyslovíme větou:

Věta 28. *Budiž G_p grupa přímých podobností, o libovolná přímka roviny. Pak existuje jediná kosá souměrnost $\mathfrak{K}$ s osou o, která splňuje vztah $\mathfrak{K}\,G_p\,\mathfrak{K} = G_p$. Je to osová souměrnost s osou o.*

Tvrzení, že kosá souměrnost $\mathfrak{K}$ je osová (pravoúhlá) souměrnost, snadno odůvodníme. Je totiž $\mathfrak{K} = \mathfrak{P}_0\mathfrak{K}'\mathfrak{P}_0^{-1}$, kde $\mathfrak{P}_0$ je přímá podobnost. Podobnost však převádí podle své definice každý trojúhelník v trojúhelník s ním podobný, t. j. každý úhel v úhel s ním shodný. Směr a osa souměrnosti $\mathfrak{K}'$ jsou navzájem kolmé. Směr a osa souměrnosti $\mathfrak{K}'$ jsou obrazy předchozích v podobnosti $\mathfrak{P}_0^{-1}$, proto jsou také vzájemně kolmé.

13. Dokážeme nyní tuto větu:

Věta 29. *Budiž Γ základní grupa eliptických afinit. Pak lze určit afinitu $\mathfrak{A}_0$ tak, že $\mathfrak{A}_0^{-1}\,\Gamma\,\mathfrak{A}_0$ je grupa přímých podobností.*

Důkaz: a) Dokážeme předně: Je-li $\mathfrak{A}_0$ libovolná afinita, je $\mathfrak{A}_0^{-1}\,\Gamma\,\mathfrak{A}_0$ základní grupa eliptických afinit. Je-li totiž $\mathfrak{A}$ eliptická afinita, t. j. afinita bez samodružného směru, nemá ani afinita $\mathfrak{A}_0^{-1}\mathfrak{A}\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{A}_1$ žádný samodružný směr. Kdyby měla afinita $\mathfrak{A}_1$ samodružný směr (ζ_1), převedla by jej afinita $\mathfrak{A}_0^{-1}$ ve směr (ζ), který by byl samodružný pro afinitu $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_0\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_0^{-1}$.

Budiž nyní $\mathfrak{A}'$ afinity směrově komutativní s eliptickou afinitou $\mathfrak{A}_0^{-1}\mathfrak{A}\mathfrak{A}_0$. To znamená, že obě afinita $\mathfrak{A}'\mathfrak{A}_0^{-1}\mathfrak{A}\mathfrak{A}_0$ a $\mathfrak{A}_0^{-1}\mathfrak{A}\mathfrak{A}_0\mathfrak{A}'$ převádějí každý směr (ζ) v týž směr(ζ'). Nechť afinita $\mathfrak{A}_0^{-1}$ převádí směr (ζ) ve směr (ζ_1) a směr (ζ') ve směr (ζ_1'); pak afinity

$$\mathfrak{A}_0(\mathfrak{A}'\mathfrak{A}_0^{-1}\,\mathfrak{A}\mathfrak{A}_0)\,\mathfrak{A}_0^{-1} = (\mathfrak{A}_0\mathfrak{A}'\mathfrak{A}_0^{-1})\,\mathfrak{A},$$
$$\mathfrak{A}_0(\mathfrak{A}_0^{-1}\mathfrak{A}\mathfrak{A}_0\mathfrak{A}')\,\mathfrak{A}_0^{-1} = \mathfrak{A}\,(\mathfrak{A}_0\mathfrak{A}'\mathfrak{A}_0^{-1})$$

převádějí obě směr (ζ_1) — který může být zvolen libovolně — v týž směr (ζ_1'). To znamená, že afinita $\mathfrak{A}_0\mathfrak{A}'\mathfrak{A}_0^{-1}$ je směrově komutativní s $\mathfrak{A}$ a náleží do grupy Γ, neboli, že afinita $\mathfrak{A}' = \mathfrak{A}_0^{-1}\,(\mathfrak{A}_0\mathfrak{A}'\mathfrak{A}_0^{-1})\,\mathfrak{A}_0$ náleží do grupy $\mathfrak{A}_0^{-1}\,\Gamma\,\mathfrak{A}_0$. Budiž Γ' základní grupa eliptických afinit, vytvořená eliptickou afinitou $\mathfrak{A}_0^{-1}\mathfrak{A}\mathfrak{A}_0$; dokázali jsme, že Γ' je částí grupy $\mathfrak{A}_0^{-1}\,\Gamma\,\mathfrak{A}_0$. Stejně se dokáže, že Γ je částí grupy $\mathfrak{A}_0\,\Gamma'\,\mathfrak{A}_0^{-1}$, neboli, že $\mathfrak{A}_0^{-1}\,\Gamma\,\mathfrak{A}_0$ je částí grupy $\mathfrak{A}_0^{-1}\,(\mathfrak{A}_0\,\Gamma\,\mathfrak{A}_0^{-1})\,\mathfrak{A}_0 = \Gamma$. Je tedy $\Gamma' = \Gamma$ a tvrzení a) je dokázáno.

b) Vzhledem k odst. a) postačí nyní určit afinitu $\mathfrak{A}_0$ tak, aby afinita $\mathfrak{A}_0^{-1}\mathfrak{A}\mathfrak{A}_0$ byla přímá podobnost; přitom $\mathfrak{A}$ je daná eliptická afinita. Afinitu $\mathfrak{A}_0$ určíme výpočtem. Nechť má afinita $\mathfrak{A}$ vyjádření

$$z' = az + b\bar{z} + c,$$

kde $(\bar{a} - a)^2 + 4\, b\bar{b} < 0$. Afinita $\mathfrak{A}_0$ nechť má početní vyjádření

$$z' = \alpha\, z + \beta\, \bar{z}.$$

Inversní afinita $\mathfrak{A}_0^{-1}$ má podle věty 2 vyjádření

$$z = \frac{\bar{\alpha}}{\Delta}\, z' - \frac{\beta}{\Delta}\, \bar{z}',$$

kde $\Delta = |\alpha|^2 - |\beta|^2$. Afinita $\mathfrak{A}_0^{-1}\mathfrak{A}$ je dána rovnicí

$$z' = \left(\frac{a\bar{\alpha}}{\Delta} - \frac{b\bar{\beta}}{\Delta}\right) z + \left(\frac{b\alpha}{\Delta} - \frac{a\beta}{\Delta}\right) \bar{z} + c.$$

Odtud vypočítáme

$$\bar{z}' = \left(\frac{\bar{a}\alpha}{\Delta} - \frac{\bar{b}\beta}{\Delta}\right) \bar{z} + \left(\frac{\bar{b}\bar{\alpha}}{\Delta} - \frac{\bar{a}\bar{\beta}}{\Delta}\right) z + \bar{c}.$$

Afinita $\mathfrak{A}_0^{-1}\mathfrak{A}\mathfrak{A}_0$ má pak početní vyjádření

$$z' = \frac{1}{\Delta}(a\,\alpha\bar{\alpha} - b\,\alpha\bar{\beta} + \bar{b}\,\bar{\alpha}\beta - \bar{a}\,\beta\bar{\beta})\, z + \tag{50}$$
$$+ \frac{1}{\Delta}(b\,\alpha^2 - a\,\alpha\beta + \bar{a}\,\alpha\beta - \bar{b}\,\beta^2)\,\bar{z} + (\alpha c + \beta\bar{c}).$$

Má-li být afinita vyjádřená rovnicí (50) přímá podobnost, musí platit

$$b\alpha^2 + (\bar{a} - a)\,\alpha\beta - \bar{b}\,\beta^2 = 0. \tag{51}$$

Jde o to, zda lze nalézt takové řešení α, β rovnice (51), pro které platí $|\alpha|^2 - |\beta|^2 \neq 0$. Můžeme předpokládat, že je $b \neq 0$. Kdyby totiž bylo $b = 0$, byla by grupa Γ grupou přímých podobností. Je-li $b \neq 0$, musí být $\beta \neq 0$, jinak bychom totiž dostali z rovnice (51) také $\alpha = 0$.

Protože platí pro každé řešení rovnice (51) $\beta \neq 0$, lze tuto rovnici převést na rovnici s ní ekvivalentní

$$b \cdot \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 + (\bar{a} - a)\,\frac{\alpha}{\beta} - \bar{b} = 0. \tag{52}$$

Nyní zřejmě postačí dokázat, že rovnice (52) má kořen, který není komplexní jednotkou. Protože je $(a - \bar{a})^2 + 4\, b\bar{b} < 0$, můžeme určit kladné číslo k tak, že $k^2 = -(a - \bar{a})^2 - 4\, b\bar{b}$. Uvažujme nyní o kořenu rovnice (51)

$$\varepsilon = \frac{a - \bar{a} + ki}{2\, b}.$$

Platí

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\bar{a} - a - ki}{2\,\bar{b}} = -\frac{a - \bar{a} + ki}{2\,\bar{b}}.$$

Předpokládejme, že by platilo $|\varepsilon|^2 = \varepsilon\bar{\varepsilon} = 1$; pak by bylo

$$-\frac{(a - \bar{a} + k\mathrm{i})^2}{4\,b\bar{b}} = 1.$$

Odtud by plynulo

$$(a - \bar{a})^2 - k^2 + 2\,k\mathrm{i}\,(a - \bar{a}) = -4\,b\bar{b},$$

neboli

$$-2\,k^2 + 2\,k\mathrm{i}\,(a - \bar{a}) = 0,$$

neboli

$$\mathrm{i}\,(a - \bar{a}) = k.$$

Odtud by dále plynulo

$$-(a - \bar{a})^2 = k^2 = -(a - \bar{a})^2 - 4\,b\bar{b},$$

neboli $4\,b\bar{b} = 0$, t. j. $b = 0$ proti předpokladu. Tím je věta 29 dokázána.

Z věty 29 plynou dva důsledky; prvním z nich je zobecnění věty 28.

Věta 30. *Budiž Γ základní grupa eliptických afinit, o libovolná přímka roviny. Pak existuje jediná kosá souměrnost $\mathfrak{K}$ s osou o, která splňuje vztah $\mathfrak{K}\,\Gamma\,\mathfrak{K} = \Gamma$.*[13])

Důkaz: Budiž $\mathfrak{K}$ kosá souměrnost splňující vztah

$$\mathfrak{K}\,\Gamma\,\mathfrak{K} = \Gamma. \tag{53}$$

Určíme podle věty 29 afinitu $\mathfrak{A}_0$ tak, aby bylo $\mathfrak{A}_0^{-1}\,\Gamma\,\mathfrak{A}_0 = \mathsf{G}_p$.

Ze vztahu (53) vyplývá

$$(\mathfrak{A}_0^{-1}\,\mathfrak{K}\,\mathfrak{A}_0)\,(\mathfrak{A}_0^{-1}\,\Gamma\,\mathfrak{A}_0)\,(\mathfrak{A}_0^{-1}\,\mathfrak{K}\,\mathfrak{A}_0) = \mathfrak{A}_0^{-1}\,\mathfrak{K}\,\Gamma\,\mathfrak{K}\,\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{A}_0^{-1}\,\Gamma\,\mathfrak{A}_0.$$

To znamená, že kosá souměrnost $\mathfrak{A}_0^{-1}\mathfrak{K}\mathfrak{A}_0$ splňuje vzhledem ke grupě $\mathfrak{A}_0^{-1}\,\Gamma\,\mathfrak{A}_0 = \mathsf{G}_p$ vztah obdobný vztahu (53). Podle věty 28 je tedy afinita $\mathfrak{A}_0^{-1}\mathfrak{K}\mathfrak{A}_0$ osová souměrnost $\mathfrak{O}$, jejíž osa je určitá přímka o'. Je to přímka, v níž převádí afinita $\mathfrak{A}_0$ přímku o. Z toho vyplývá, že kosá souměrnost $\mathfrak{K} = \mathfrak{A}_0\mathfrak{O}\mathfrak{A}_0^{-1}$ je určena jednoznačně, jak tvrdí věta 30.

Druhý důsledek věty 29 je věta:

Věta 31. *Budiž Γ základní grupa eliptických afinit, o_1, o_2 libovolné dvě přímky roviny. Pak existuje afinita z grupy Γ, která převádí přímku o_1 v přímku o_2.*

Důkaz: Věta je správná, je-li $\Gamma = \mathsf{G}_p$. Je-li $\Gamma \neq \mathsf{G}_p$, určíme afinitu $\mathfrak{A}_0$ tak, aby bylo $\mathfrak{A}_0^{-1}\,\Gamma\,\mathfrak{A}_0 = \mathsf{G}_p$. Buďtež o'_1, o'_2 obrazy přímek o_1, o_2 v afinitě $\mathfrak{A}_0$. Budiž $\mathfrak{P}$ přímá podobnost, která převádí přímku o'_1 v přímku o'_2. Pak afinita $\mathfrak{A}_0\mathfrak{P}\mathfrak{A}_0^{-1}$, která náleží do grupy Γ, převádí přímku o_1 v přímku o_2.

14. Předchozí výsledky nám dovolují zobecnit pojem grupy podobností. Nejprve vytvoříme grupu podobností pomocí grupy přímých podobností.

Věta 32. *Budiž G'_p grupa všech podobností, G_p grupa přímých podobností, $\mathfrak{O}$ libovolná osová souměrnost. Pak grupu G'_p dostaneme, připojíme-li ke grupě G_p všechny afinity množiny $\mathsf{G}'_p\,\mathfrak{O}$.*

Důkaz: Budiž $\mathfrak{P}'$ libovolná nepřímá podobnost. Pak afinita $\mathfrak{P}'\mathfrak{O} = \mathfrak{P}$ je přímá a podle věty 23 náleží grupě G_p. Proto je $\mathfrak{P}' = \mathfrak{P}_1\mathfrak{O}$, to jest nepřímá podobnost $\mathfrak{P}'$ náleží do množiny $\mathsf{G}_p\mathfrak{O}$. Mimo to je zřejmé, že každá afinita z množiny $\mathsf{G}_p\,\mathfrak{O}$ je nepřímá podobnost. Je tedy skutečně

$$\mathsf{G}'_p = \mathsf{G}_p \cup \mathsf{G}_p\,\mathfrak{O}.\text{[14])}$$

[13]) Tato souměrnost ovšem nemusí být pravoúhlá.

[14]) Symbol $\cup$ znamená sjednocení (spojení) dvou množin.

Věta 33. *Budiž Γ základní grupa eliptických afinit, o libovolná přímka roviny, $\mathfrak{K}$ (jediná) kosá souměrnost s osou o, která splňuje vztah $\mathfrak{K}\,\Gamma\,\mathfrak{K} = \Gamma$. Připojíme-li ke grupě Γ množinu afinit $\Gamma\,\mathfrak{K}$, dostaneme grupu; tato grupa je nezávislá na volbě přímky o.*

Důkaz. Máme předně dokázat, že množina

$$\Gamma' = \Gamma \cup \Gamma\,\mathfrak{K}$$

je grupa. Skutečně, Γ' obsahuje identitu; zobrazení inversní k afinitě $\mathfrak{A}$ z Γ je afinita $\mathfrak{A}^{-1}$ z Γ; zobrazení inversní k afinitě $\mathfrak{A}\mathfrak{K}$ z $\Gamma\,\mathfrak{K}$ je afinita $\mathfrak{K}^{-1}\mathfrak{A}^{-1} = \mathfrak{K}\mathfrak{A}^{-1}$. Avšak podle předpokladu o souměrnosti $\mathfrak{K}$ lze určit afinitu $\mathfrak{A}'$ tak, že $\mathfrak{K}\mathfrak{A}^{-1} = \mathfrak{A}'\mathfrak{K}$; náleží tedy zobrazení inversní k afinitě $\mathfrak{A}\mathfrak{K}$ z $\Gamma\,\mathfrak{K}$ opět do množiny $\Gamma\,\mathfrak{K}$ a tedy i do množiny Γ'.

Prozkoumáme nyní afinitu, jež vznikne složením dvou afinit z Γ'. Buďte $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$ dvě afinity z Γ'; je třeba vyšetřit čtyři případy afinit: $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{K}, \mathfrak{A}_1\mathfrak{K}\mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_1\mathfrak{K}\mathfrak{A}_2\mathfrak{K}$. V prvním případě náleží afinita $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2$ do Γ, v druhém případě náleží afinita $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{K}$ do množiny $\Gamma\,\mathfrak{K}$. V třetím případě určíme afinitu $\mathfrak{A}_2'$ z Γ tak, aby platilo $\mathfrak{K}\mathfrak{A}_2 = \mathfrak{A}_2'\mathfrak{K}$. Pak afinita $\mathfrak{A}_1\mathfrak{K}\mathfrak{A}_2 = \mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2'\mathfrak{K}$ náleží do množiny $\Gamma\,\mathfrak{K}$. Obdobně zjistíme ve čtvrtém případě, že afinita $\mathfrak{A}_1\mathfrak{K}\mathfrak{A}_2\mathfrak{K} = \mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2'\mathfrak{K}^2 = \mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2'$ náleží do grupy Γ. Tím je první tvrzení věty 33 dokázáno.

Buďte nyní o_1, o_2 libovolné dvě přímky, $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$ kosé souměrnosti s osami o_1, o_2, které splňují vztahy $\mathfrak{K}_1\,\Gamma\,\mathfrak{K}_1 = \mathfrak{K}_2\,\Gamma\,\mathfrak{K}_2 = \Gamma$. Podle věty 31 nyní určíme afinitu $\mathfrak{A}$ z Γ tak, aby převedla přímku o_1 v přímku o_2. Buďte nyní

$$\Gamma' = \Gamma \cup \Gamma\,\mathfrak{K}_1, \quad \Gamma'' = \Gamma \cup \Gamma\,\mathfrak{K}_2 \tag{54}$$

obě grupy, které vznikly z grupy Γ pomocí souměrností $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2$. Ze vztahu $\mathfrak{K}_1\,\Gamma\,\mathfrak{K}_1 = \Gamma$ vyplývá

$$(\mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{K}_1\mathfrak{A})(\mathfrak{A}^{-1}\,\Gamma\,\mathfrak{A})(\mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{K}_1\mathfrak{A}) = \mathfrak{A}^{-1}\,\Gamma\,\mathfrak{A} = \Gamma,$$

neboli

$$(\mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{K}_1\mathfrak{A})\,\Gamma\,(\mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{K}_1\mathfrak{A}) = \Gamma.$$

Kosá souměrnost $\mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{K}_1\mathfrak{A}$ má osu o_2 právě tak jako kosá souměrnost $\mathfrak{K}_2$. Podle věty 30 je tedy

$$\mathfrak{K}_2 = \mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{K}_1\mathfrak{A}.$$

Ze vztahu (54) vyplývá

$$\Gamma'' = \Gamma \cup \Gamma\,(\mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{K}_1\mathfrak{A}) = \Gamma \cup \Gamma\,(\mathfrak{K}_1\mathfrak{A}). \tag{55}$$

Avšak podle definice souměrnosti $\mathfrak{K}_1$ lze určit afinitu $\mathfrak{A}'$ z Γ tak, že platí

$$\mathfrak{K}_1\mathfrak{A} = \mathfrak{A}'\mathfrak{K}_1.$$

Ze vztahu (55) pak vyplývá

$$\Gamma'' = \Gamma \cup \Gamma\,(\mathfrak{A}'\mathfrak{K}_1) = \Gamma \cup \Gamma\,\mathfrak{K}_1 = \Gamma'.$$

Tím je dokázána nezávislost grupy Γ' na volbě přímky o.

Splyne-li základní grupa eliptických afinit Γ s grupou přímých podobností G_p, splyne grupa Γ' z věty 33 s grupou podobností G_p. Proto lze grupu Γ' pokládat za zobecnění grupy podobností.

Připomeňme ještě z předchozího výkladu, že lze nalézt afinitu $\mathfrak{A}$ tak, že platí vztahy

$$\Gamma = \mathfrak{A}^{-1}\,G_p\,\mathfrak{A}, \quad \Gamma' = \mathfrak{A}^{-1}\,G_p'\,\mathfrak{A}. \tag{56}$$

Mimo to pro grupu translací a grupu stejnolehlostí platí vztahy:

$$G_s = \mathfrak{A}^{-1}\,G_s\,\mathfrak{A}, \quad G_t = \mathfrak{A}^{-1}\,G_t\,\mathfrak{A}, \tag{57}$$

při čemž $\mathfrak{A}$ je libovolná afinita. Vzhledem k vztahům (56) a (57) budeme nazývat grupy $\Gamma, \Gamma', G_s, G_t$ transformované grupy (afinitou $\mathfrak{A}$) ke grupám G_p, G'_p, G_s, G_t.

Je tedy každá transformovaná grupa translací totožná s grupou translací, každá transformovaná grupa stejnolehlostí totožná s grupou stejnolehlostí. Transformované grupy přímých podobností jsou všecky základní grupy eliptických afinit (grupu G_p v to počítaje).

15. Grupa přímých podobností G_p a grupa všech podobností G'_p mají dvě důležité podgrupy: grupu přímých shodností G_k a grupu všech shodností G'_k. Transformujeme-li určitou afinitou $\mathfrak{A}$ grupy G_p a G'_p, dostaneme grupy

$$\Gamma = \mathfrak{A}^{-1} G_p \mathfrak{A}, \quad \Gamma' = \mathfrak{A}^{-1} G'_p \mathfrak{A}.$$

Transformujeme-li touž afinitou $\mathfrak{A}$ grupy G_k a G'_k, dostaneme grupy

$$\mathfrak{A}^{-1} G_k \mathfrak{A}, \quad \mathfrak{A}^{-1} G'_k \mathfrak{A}, \tag{58}$$

které jsou podgrupami grup Γ, Γ' a které lze pokládat za zobecnění grup G_k a G'_k. Úkolem tohoto odstavce je ukázat, jak lze charakterisovat transformované grupy (58) geometricky. K tomu účelu budeme nejprve charakterisovat grupy G_k a G'_k samy bez použití pojmu shodnosti úseček, resp. vzdálenosti dvou bodů.

Věta 34. *Jediné involutorní afinity jsou středové souměrnosti a kosé souměrnosti.*

Důkaz. Pojem involutorní afinity byl zaveden na str. 541. Je-li A, A' dvojice různých bodů involutorní afinity, je střed úsečky AA' patrně samodružný bod. Involutorní afinita (která ovšem není identita) má tedy buď jediný samodružný bod nebo přímku samodružných bodů. Má-li afinita jediný samodružný bod S, je tento bod středem každé úsečky XX' a afinita je souměrnost podle středu S. Má-li afinita přímku samodružných bodů, je osová a tudíž je to kosá souměrnost.

Věta 35. *Jediné involutorní afinity, obsažené v grupě všech podobností, jsou středové a osové souměrnosti.*

Důkaz. Podle věty 34 stačí dokázat, že každá kosá souměrnost, obsažená v grupě G'_p, je osová souměrnost. Budiž A, A' dvojice různých bodů kosé souměrnosti $\mathfrak{K}$, S střed úsečky AA', R další bod osy. Náleží-li kosá souměrnost $\mathfrak{K}$ grupě G'_p, je $A'S' = k \cdot AS$, $A'R' = k \cdot AR$, neboli $A'S = k \cdot AS$, $A'R = k \cdot AR$. Z prvního vztahu plyne $k = 1$, z druhého pak $A'R = AR$. Bod R leží tedy na ose úsečky AA', t. j. $AA' \perp RS$. Kosá souměrnost $\mathfrak{K}$ je tedy skutečně osovou souměrností.

Věta 36. *Grupa všech shodností G'_k je množina všech takových afinit z grupy G'_p, které lze složit z konečného počtu involutorních afinit této grupy.*

Důkaz: a) Každou shodnost $\mathfrak{S}$ lze rozložit v osové souměrnosti. Je-li $\mathfrak{S}$ identita, je toto tvrzení zřejmé. Není-li $\mathfrak{S}$ identita, má dvojici různých bodů A, A'. Je-li $\mathfrak{O}_1$ souměrnost, jejíž osa je osa úsečky AA', pak $\mathfrak{S}\mathfrak{O}_1$ je shodnost se samodružným bodem A. Buď je tedy $\mathfrak{S}\mathfrak{O}_1 = \mathfrak{J}$, nebo má shodnost $\mathfrak{S}\mathfrak{O}_1$ přímku samodružných bodů, nebo má jediný samodružný bod A. V prvním případě je $\mathfrak{S} = \mathfrak{O}_1$, v druhém případě $\mathfrak{S}\mathfrak{O}_1 = \mathfrak{O}_2$, neboli $\mathfrak{S} = \mathfrak{O}_2\mathfrak{O}_1$. V třetím případě zvolíme bod $B \neq A$ a označíme B_1 jeho obraz v shodnosti $\mathfrak{S}\mathfrak{O}_1$. Osa m úsečky BB_1 prochází bodem A; je-li $\mathfrak{O}_2$ souměrnost s osou m, pak shodnost $\mathfrak{S}\mathfrak{O}_1\mathfrak{O}_2$ má samodružné body A, B. Je tedy buď $\mathfrak{S}\mathfrak{O}_1\mathfrak{O}_2 = \mathfrak{J}$ nebo $\mathfrak{S}\mathfrak{O}_1\mathfrak{O}_2 = \mathfrak{O}_3$. V prvním případě dostaneme $\mathfrak{S} = \mathfrak{O}_2\mathfrak{O}_1$, v druhém $\mathfrak{S} = \mathfrak{O}_3\mathfrak{O}_2\mathfrak{O}_1$. Tím je dokázáno tvrzení a).

Obráceně je zřejmé, že každá afinita složená z osových a středových souměrností je shodnost.

Věta 37. *Budiž $\Gamma' = \mathfrak{A}^{-1} G'_p \mathfrak{A}$ transformovaná grupa všech podobností. Pak transformovaná grupa všech shodností $\mathfrak{A}^{-1} G'_k \mathfrak{A}$ je množina všech afinit z Γ', které dostaneme složením konečného počtu involutorních afinit z Γ'.*

Důkaz: Budiž $\mathfrak{A}_0$ afinita z Γ', která vznikne složením konečného počtu involutorních afinit $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_n$ z Γ'. Platí tedy

$$\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2 \ldots \mathfrak{A}_n.$$

Z tohoto vztahu vyplývá vztah

$$\mathfrak{A}\mathfrak{A}_0\mathfrak{A}^{-1} = (\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}^{-1})(\mathfrak{A}\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}^{-1}) \ldots (\mathfrak{A}\mathfrak{A}_n\mathfrak{A}^{-1}).$$

Afinity $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_0\mathfrak{A}^{-1}, \ldots, \mathfrak{A}\mathfrak{A}_n\mathfrak{A}^{-1}$ jsou vesměs involutorní a náležejí patrně grupě $\mathfrak{A}\,\Gamma'\,\mathfrak{A}^{-1} = G'_p$; jsou to tedy souměrnosti buď středové nebo osové. Afinita $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_0\mathfrak{A}^{-1}$ je podle věty 36 shodnost, a proto afinita $\mathfrak{A}_0$ náleží grupě $\mathfrak{A}^{-1}\,G'_k\,\mathfrak{A}$.

Obráceně každou afinitu $\mathfrak{A}_0$ z grupy $\mathfrak{A}^{-1}\,G'_k\,\mathfrak{A}$ lze psát ve tvaru $\mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{A}'_0\mathfrak{A}$, kde $\mathfrak{A}'_0$ je shodnost. $\mathfrak{A}'_0$ se dá tudíž rozložit v konečný počet osových souměrností:

$$\mathfrak{A}'_0 = \mathfrak{O}_1\mathfrak{O}_2 \ldots \mathfrak{O}_n.$$

Odtud vyplývá

$$\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{A}'_0\mathfrak{A} = (\mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{O}_1\mathfrak{A})(\mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{O}_2\mathfrak{A}) \ldots (\mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{O}_n\mathfrak{A}).$$

Afinity $\mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{O}_2\mathfrak{A}, \ldots, \mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{O}_n\mathfrak{A}$ jsou vesměs kosé souměrnosti z grupy $\mathfrak{A}^{-1}\,G'_k\,\mathfrak{A}$, t. j. z grupy Γ'. Tím je věta 37 úplně dokázána.

Věta 37 charakterisuje transformovanou grupu $\mathfrak{A}^{-1}\,G'_k\,\mathfrak{A}$ geometrickým způsobem. Obdobně lze charakterisovat geometricky i transformovanou grupu $\mathfrak{A}^{-1}\,G_k\,\mathfrak{A}$: zde se omezíme na ty přímé afinity z Γ', které lze rozložit v konečný počet involutorních afinit z Γ'.

Tím je úplně objasněno zobecnění grup shodností.

16. Dříve než přikročíme k závěrečnému přehledu afinní grupy, odvodíme ještě dvě známé a konstruktivně velmi důležité vlastnosti podobných zobrazení.

Věta 38. *Každou přímou podobnost lze rozložit v otočení a homothetickou afinitu, t. j. stejnolehlost nebo translaci nebo identitu (v jakémkoli pořádku složené). Každou nepřímou podobnost lze rozložit v osovou souměrnost a homothetickou afinitu, t. j. stejnolehlost nebo translaci nebo identitu (opět v jakémkoli pořádku složené).*

Důkaz. a) Přímá podobnost má rovnici $z' = az + c$. Budiž $a = |a|\,\varepsilon$, kde ε je komplexní jednotka. Danou podobnost pak vyjádříme jako afinitu $\mathfrak{R}\mathfrak{H}$. V případě, že je $\varepsilon \neq 1$, zvolíme za $\mathfrak{R}$ rotaci o rovnici $z'' = -\varepsilon z$ a za $\mathfrak{H}$ stejnolehlost o rovnici $z' = -|a|\,z'' + c$. Je-li $\varepsilon = -1$, zvolíme za $\mathfrak{R}$ rotaci $z'' = -z$ a za afinitu H homothetickou afinitu $z' = |a|\,z'' + c$.

b) Rovnici přímé podobnosti můžeme uvést také na tvar

$$z' = -\varepsilon\left(-|a|\,z - \frac{c}{\varepsilon}\right);$$

danou podobnost pak vyjádříme jako afinitu $\mathfrak{H}\mathfrak{R}$. V případě, že $\varepsilon \neq -1$, zvolíme za $\mathfrak{H}$ homothetickou afinitu o rovnici $z'' = -|a|\,z - \dfrac{c}{\varepsilon}$ a za $\mathfrak{R}$ rotaci o rovnici $z' = -\varepsilon\,z''$.

Je-li $\varepsilon = -1$, zvolíme za $\mathfrak{H}$ homothetickou afinitu o rovnici $z'' = |a|\,z - c$ a za $\mathfrak{R}$ otočení o rovnici $z' = -z''$. Nepřímá podobnost má rovnici $z' = b\bar{z} + c$. Budiž opět $b = |b| \cdot \varepsilon$, kde ε je komplexní jednotka. Pak rozložíme danou podobnost na shodnost o rovnici $z'' = \varepsilon\bar{z}$ a homothetickou afinitu o rovnici $z' = |b|\,z'' + c$. Shodnost $z'' = \varepsilon z$ je nepřímá a má samodružný bod [0], tudíž je to osová souměrnost.

d) Dále upravíme rovnici dané nepřímé podobnosti na tvar

$$z' = \varepsilon\left(|b|\;\bar{z} + \frac{c}{\varepsilon}\right).$$

Podobnost rozložíme na homothetickou afinitu o rovnici $z'' = |b|\, z + \dfrac{c}{\varepsilon}$ a na shodnost o rovnici $z' = \varepsilon \cdot \overline{z''}$; to je však opět osová souměrnost.

Tím je věta 38 úplně dokázána.

Víme již, že každá přímá podobnost je eliptická nebo homothetická afinita; z věty 38 vyplývá, že každá nepřímá podobnost je hyperbolická afinita. Je-li vyjádřena jako $\mathfrak{H}\mathfrak{O}$, kde $\mathfrak{H}$ je homothetická afinita a $\mathfrak{O}$ osová souměrnost, jsou samodružné směry afinity $\mathfrak{H}\mathfrak{O}$ směr osy souměrnosti $\mathfrak{O}$ a směr k němu kolmý. Obdobná situace je v každé význačné grupě.

Budiž Γ libovolná základní grupa eliptických afinit. Podle věty 29 existuje afinita $\mathfrak{A}_0$ tak, že platí $\mathfrak{A}_0^{-1}\, \Gamma\, \mathfrak{A}_0 = \mathsf{G}_p$, kde G_p je grupa přímých podobností. Budiž $\mathfrak{K}$ kosá souměrnost, pro niž platí $\mathfrak{K}\, \Gamma\, \mathfrak{K} = \Gamma$. Pak transformovaná grupa je množina

$$\Gamma' = \Gamma \cup \Gamma\, \mathfrak{K}. \tag{59}$$

Zřejmě platí

$$(\mathfrak{A}_0^{-1}\mathfrak{K}\mathfrak{A}_0)\,(\mathfrak{A}_0^{-1}\, \Gamma\, \mathfrak{A}_0)\,(\mathfrak{A}_0^{-1}\mathfrak{K}\mathfrak{A}_0) = \mathfrak{A}_0^{-1}\,(K\, \Gamma\, \mathfrak{K})\, \mathfrak{A}_0 = \mathfrak{A}_0^{-1}\Gamma\, \mathfrak{A}_0)$$

neboli

$$(\mathfrak{A}_0^{-1}\mathfrak{K}\mathfrak{A}_0)\, \mathsf{G}_p\, (\mathfrak{A}_0^{-1}\mathfrak{K}\mathfrak{A}_0) = \mathsf{G}_p.$$

To znamená, že afinita $\mathfrak{A}_0^{-1}\mathfrak{K}\mathfrak{A}_0$ je osová souměrnost, a lze tedy psát

$$\mathsf{G}_p' = \mathsf{G}_p \cup \mathsf{G}_p\, (\mathfrak{A}_0^{-1}\mathfrak{K}\mathfrak{A}_0). \tag{60}$$

Ze vztahu (59) dostaneme

$$\mathfrak{A}_0^{-1}\, \Gamma'\, \mathfrak{A}_0 = \mathfrak{A}_0^{-1}\, \Gamma\, \mathfrak{A}_0 \cup (\mathfrak{A}_0^{-1}\, \Gamma\, \mathfrak{A}_0)\,(\mathfrak{A}_0^{-1}\mathfrak{K}\mathfrak{A}_0),$$

neboli

$$\mathfrak{A}_0^{-1}\, \Gamma'\, \mathfrak{A}_0 = \mathsf{G}_p \cup \mathsf{G}_p\, (\mathfrak{A}_0^{-1}\mathfrak{K}\mathfrak{A}_0). \tag{61}$$

Porovnáním vztahů (60) a (61) vychází

$$\mathfrak{A}_0^{-1}\, \Gamma'\, \mathfrak{A}_0 = \mathsf{G}_p',$$

neboli

$$\Gamma' = \mathfrak{A}_0\, \mathsf{G}_p'\, \mathfrak{A}_0^{-1}.$$

Je-li $\mathfrak{A}$ nepřímá afinita z Γ', lze určit podobnost $\mathfrak{P}$ z grupy G_p' tak, že platí

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_0 \mathfrak{P} \mathfrak{A}_0^{-1}.$$

Podle věty 8 je podobnost $\mathfrak{P}$ nepřímá, a tedy hyperbolická. Z toho plyne, že i afinita $\mathfrak{A}$ je hyperbolická. Můžeme vyslovit výsledek:

Věta 39. *Každá transformovaná grupa $\Gamma' = \mathfrak{A}^{-1}\, \mathsf{G}_p'\, \mathfrak{A}$ obsahuje všechny homothetické afinity. Každá přímá afinita z transformované grupy je buď homothetická nebo eliptická, každá nepřímá afinita z transformované grupy je hyperbolická.*

Kdežto eliptické afinity jsou všechny obsaženy v transformovaných grupách, není tomu tak s hyperbolickými afinitami. To je zřejmé, každá hyperbolická afinita, obsažená v některé z transformovaných grup, je totiž nepřímá. Mimo tyto nepřímé hyperbolické afinity však existují i hyperbolické afinity přímé. To ukazuje následující příklad.

Určeme početní vyjádření hyperbolické afinity, která má za samodružné směry směr osy reálné a směr osy imaginární. Charakteristická rovnice směrů takové afinity

$$\bar{b}\zeta^2 + (\bar{a} - a)\, \zeta\bar{\zeta} - b\bar{\zeta}^2 = 0$$

má kořeny $\zeta = 1$ a $\zeta = i$. Z toho vyplývají vztahy

$$\bar{b} + \bar{a} - a - b = 0, \quad -\bar{b} + \bar{a} - a + b = 0,$$

t. j.

$$\bar{a} = a, \quad \bar{b} = b;$$

neboli a, b jsou čísla reálná pro něž platí $b \neq 0$, $a^2 - b^2 \neq 0$. Tato podmínka je nejen nutná, ale i postačující; t. j. afinita

$$z' = az + b\bar{z} + c,$$

kde a, b jsou reálná čísla, pro něž platí $a^2 - b^2 \neq 0$, $b \neq 0$, je hyperbolická; její samodružné směry jsou směry osy reálné a imaginární. Zvolíme-li $|a| > |b|$, je $|a|^2 - |b|^2 > 0$, t. j. afinita je přímá, zvolíme-li $|a| < |b|$, je $|a|^2 - |b|^2 < 0$, t. j. afinita je nepřímá.

Kdybychom chtěli zařadit i všecky afinity hyperbolické (a parabolické, o nichž dosud nebyla při třídění řeč) do podgrup afinní grupy, analogických základním grupám eliptických afinit, utvořili bychom obdobně k dané hyperbolické (parabolické) afinitě množinu Γ všech afinit, které jsou s ní směrově komutativní. Tato množina je podgrupou afinní grupy a obsahuje grupu stejnolehlostí; nazýváme ji také **základní grupou** hyperbolických (parabolických) afinit (viz str. *00*).

Základní grupu hyperbolických afinit lze také charakterisovat jako množinu všech afinit, které mají dané dva různé směry za samodružné; příslušná algebraická podmínka je dána úměrností koeficientů charakteristické rovnice směrů. Podobně základní grupa parabolických afinit se dá popsat jako množina všech afinit, které mají daný směr za samodružný a jsou buď parabolické nebo homothetické. Také zde je algebraická podmínka dána úměrností koeficientů charakteristické rovnice směrů.

Základní grupa eliptických afinit obsahuje jen afinity přímé; obdobně tomu je u základní grupy parabolických afinit. To vyplývá z této úvahy. Diskriminant $(\bar{a} - a)^2 + 4\, b\bar{b}$ charakteristické rovnice směrů parabolické afinity

$$\bar{b}\zeta^2 + (\bar{a} - a)\, \zeta\bar{\zeta} - b\bar{\zeta}^2 = 0$$

je roven nule. Úpravou dostaneme

$$(\bar{a} - a)^2 + 4\, b\bar{b} = (a + \bar{a})^2 - 4\,(a\bar{a} - b\bar{b}) = 0,$$

neboli

$$a\bar{a} - b\bar{b} = \frac{1}{4}(a + \bar{a})^2.$$

Výraz $\frac{1}{4}(a + \bar{a})^2$ je nezáporný, v tomto případě kladný, neboť modul afinity nemůže být rovný nule.

Základní grupa hyperbolických afinit obsahuje naproti tomu afinity přímé i nepřímé, jak ukazuje příklad.

Základními grupami eliptických, parabolických i hyperbolických afinit, transformovanými grupami podobností, grupou stejnolehlostí grupou translací, grupou všech shodností, grupou shodností přímých a transformovanými grupami shodností nejsou ovšem zdaleka vyčerpány podgrupy afinní grupy. Tak na př. všecky afinity (homothetické, parabolické i hyperbolické, které mají daný směr za samodružný, tvoří grupu, která obsahuje nekonečně mnoho základních grup. Také všecky přímé afinity tvoří podgrupu afinní grupy. S hlediska elementární geometrie, zejména nauky o podobnosti a shodnosti jsou ovšem nejdůležitější základní grupy eliptických afinit a grupy transformované.

17. Na závěr podáme stručný přehled definic nejdůležitějších podgrup afinní grupy.

Grupa translací G_t obsahuje identitu a translace. Translace jsou homothetické afinity bez samodružného bodu.

Grupa stejnolehlostí G_s obsahuje všechny homothetické afinity. Mimo afinity z grupy G_t jsou to ještě stejnolehlosti, t. j. homothetické afinity s jedním samodružným bodem.

Základní grupa eliptických afinit Γ neboli transformovaná grupa přímých podobností je množina všech (homothetických a eliptických) afinit, které jsou směrově komutativní s danou eliptickou afinitou.

Transformovaná grupa všech podobností Γ' se dostane z grupy Γ rozšířením o množinu afinit $\Gamma \mathfrak{K}$, kde $\mathfrak{K}$ je kosá souměrnost splňující vztah $\mathfrak{K}\,\Gamma\,\mathfrak{K} = \Gamma$.

Transformovaná grupa všech shodností je množina všech afinit z transformované grupy všech podobností Γ', které lze složit z konečného počtu involutorních afinit.

Transformovaná grupa přímých shodností je množina všech afinit, které náležejí transformované grupě přímých podobností a transformované grupě všech shodností, neboli je to množina všech přímých afinit z transformované grupy všech shodností.

Zvláštním případem posledních čtyř podgrup jsou: grupa přímých podobností G_p, grupa všech podobností G'_p, grupa všech shodností G'_k a grupa přímých shodností G_k. Dostaneme je tak, že mezi transformovanými grupami $\mathfrak{A}^{-1}\, G'_p\, \mathfrak{A}$ vybereme jednu určitou grupu. Tento výběr se opírá o pojem shodnosti úseček, resp. vzdáleností dvou bodů, a je vyjádřen podmínkou $X'Y' = k \cdot XY$, která je uvedena v definici podobného zobrazení.

Na konec je třeba připomenout, že v této stati jsou afinity málo studovány po konstruktivní stránce, která je pro jejich použití velmi důležitá a která by vyžadovala soustavného a podrobného zpracování.

OTOMAR HÁJEK

SINGULARITY DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE

Obsah: Úvod a označení. § 1. Základní věty. § 2. Maximální řešení, monotonie. § 3. Struktura singulárních bodů. § 4. Unicita. § 5. Příklady a problémy. Literatura.

Tato práce je v podstatě použitím nejjednodušších method moderních partií matematiky na obecnou theorii diferenciálních rovnic (přesněji, obyčejnou explicitní diferenciální rovnici 1. řádu se spojitou pravou stranou). Prakticky se to projevuje trivialisací důkazů — viz zejména větu o unicitě (věta 19), nebo o závislosti řešení na počátečních podmínkách (věty 9, 10).

Aparát § 1—2 aplikuje na klasické thema v § 4, a na § 3, který je vlastním cílem práce. Tento § považuji za nejdůležitější (a nejméně úplný); zůstávají zde otevřeny některé velmi jednoduché a zároveň fundamentální problémy.

Podobně jako v jiných partiích matematiky (z klasických oborů na př. „calcul des limites“, parciální rovnice 2. řádu eliptické, Perronův integrál) i zde je jedním z důležitých prostředků methoda majorant. Základní je pak jedna věta z Perronovy práce [1], vydané r. 1915; Perron ji tam dokazuje způsobem tak jednoduchým, že, za prvé, vůbec