Václav Havel

O stereometrickém vybudování theorie kuželoseček

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 2 (1957), No. 6, 687--697

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/137307

vznikat magmatická moře, analogická těm, která pozorujeme na Měsíci. I tam již zřejmě dávno skončily revoluce v kůře, provázené bohatým vyléváním magmatu. Nové revoluce mohou vést pouze k rozrušení horských systémů a ke vzniku nových.

Pro vývoj velkých planet mělo ještě větší význam uvolnění gravitační energie při stlačení. Při prvotním stlačení Jupitera dosáhla teplota v jeho středu $1{,}1 \cdot 10^5$. Nynější rovnovážný stav velkých planet se udržuje díky jejich pomalému smršťování, při čemž se uvolňované teplo kompensuje pomalým chladnutím vlivem vyzařování.

Otázka vývoje velkých planet a jejich satelitů, která se poněkud vymyká rámci daného thematu, bude předmětem některé příští autorovy práce.

Zkráceně přeložil J. Ruprecht

O STEREOMETRICKÉM VYBUDOVÁNÍ THEORIE KUŽELOSEČEK

Dr VÁCLAV HAVEL

Úvod

Kuželosečka je obvyklę definována jako rovinný řez rotační kuželové plochy. Klasická věta Dandelinova pak dovoluje charakterisovat elipsu užitím konstantního součtu průvodičů, hyperbolu užitím konstantního rozdílu průvodičů a parabolu užitím rovnosti průvodičů. Za hlavní výsledek elementární theorie kuželoseček lze pokládat větu o tom, že centrálním průmětem kuželosečky je opět kuželosečka. Tato hlavní věta dokazuje se různým způsobem; podáme přehled o těchto důkazech. Poznamenejme ještě předem, že thema má svůj osobitý půvab pro svou klasičnost (bylo důležitou součástí staré geometrie řecké, viz o tom ku př. stručný odkaz v (8), poznámka [9]) na str. 498), pro svou elementárnost (vždyť elementární poznatky o kuželosečkách jsou obecně uznávanou složkou všestranného vzdělání i laikova) a pro svou cenu methodickou (theorie kuželoseček má své místo při výkladech z deskriptivní geometrie na našich vysokých školách technických).

Je třeba vymezit, které prostředky geometrické se připustí k použití a které nikoliv. Jde o tyto prostředky: o methodu projektivní, methodu analytickou a konečně methodu stereometrickou.

Příkladem použití methody projektivní a stereometrické je výklad v knihách (2), (5), (6), (8): nejprve se studuje výtvor dvou projektivních svazků a o něm se (za určitých omezujících předpokladů) v rámci vlastností polárních dokáže, že splňuje některou z podmínek konstantního součtu průvodičů nebo konstantního rozdílu průvodičů anebo rovnosti průvodičů. Zmíněný výtvor dvou projektivních svazků snáší centrální promítání; z toho pak plyne žádaný důkaz hlavní věty. Nebo se též zmíněný výtvor s nalezenými vrcholy a ohnisky umístí na rotační kuželovou plochu (viz o tom citované místo v knize [5]). — Příkladem jemného použití methody analytické je postup švýcarského geometra profesora Ed. Stiefela v knize (9): ukáže se totiž, že útvar odpovídající v reciprocitě kružnici, má touž rovnici jako kuželosečka a že je tedy kuželosečkou. Pro kružnici odvodí se konstrukce bodů užitím věty Brianchonovy a tato konstrukce převede se reciprocitou pro kuželosečku v konstrukci Pascalovu. Z této Pascalovy konstrukce vyplývá pak, že centrálním průmětem kuželosečky je opět kuželosečka. — Obtížnější je, postup který užívá pouze methodu stereometrickou; snad tato obtížnost pramení právě z toho, že methoda stereometrická je elementární a má méně prostředků (za vhodných předpokladů nemusí přesahovat ani příliš vědomosti středoškolské). Ukázkou laikovi přístupného užití methody stereometrické je postup v knize (4): Nejprve se po dlouhém úsilí dokáže, že kolmým průmětem kuželosečky je opět kuželosečka (resp. že obrazem kuželosečky v perspektivní afinitě je opět kuželosečka). Užitím tohoto pomocného tvrzení dokáže se pak, že též centrálním průmětem kuželosečky je opět kuželosečka. Je to uznávaný postup, ověřený mnohaletou tradicí školskou. Avšak je to postup zdlouhavý a těžkopádný, užívající celé řady pomocných konstrukcí, pro další výklad většinou zbytečných. — Proslulý francouzský geometr, profesor J. Hadamard užívá ve své knize (1) methodu stereometrickou; k důkazu hlavní věty užívá však speciálních vztahů metrických, zasazených do obecného rámce a přesahující svou formou hledisko zcela elementární. — A tak, po tomto stručném přehledu, naskýtá se nám otázka, jak uvažovanou hlavní větu dokázat pouze methodou stereometrickou a přitom obejít obtíže postupu v knize (4) (t. j. nezabývat se předběžně afinním obrazem kuželosečky), nepřesáhnout příliš hledisko elementární a využít alespoň postranním způsobem výhod postupu projektivního (hlavně postupu z knih (5), (6) a (8)). Pokus o odpověď bude podán v dalších úvahách. Naznačíme předběžně důležitější body: Předně bude vyšetřován v rozšířeném eukleidovském prostoru výtvor určité lineární konstrukce K; leží-li takový vytvořený útvar ve vlastní rovině, pak se dá umístit na kruhovou kuželovou plochu (rotační nebo nerotační). Naopak je každý rovinný řez kruhové kuželové plochy s nevrcholovou rovinou některým vytvořeným útvarem. Vlastní vytvořené útvary rozdělí se do tří skupin podle počtu nevlastních bodů. Po nalezení os symetrie umístí se pak vytvořený útvar bezprostředně na rotační plochu kuželovou. Konstrukce K je jakýmsi zprostředkovatelem; umožňuje využít některých obratů, vyskytujících se v postupu projektivním. Dále se využije několik elementárních vlastností kružnice, které se užitím centrálního promítání kružnice na kružnici zobecní natolik, že se dají přenést i na vytvořené útvary, o nichž je zatím již známo, že jsou centrálními průměty kružnic.

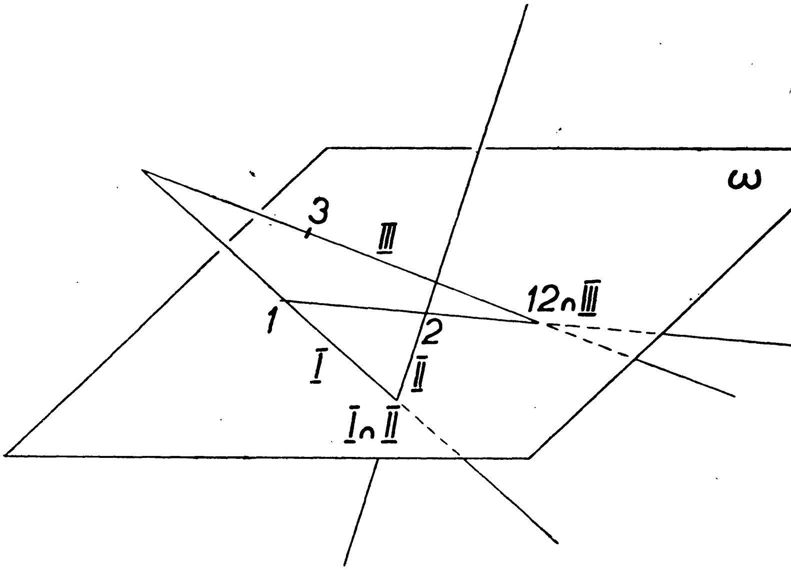
Při promítání kružnice na kružnici ukáže se výhodnou věta o stereografickém průmětu kružnice; důkaz této věty stereografického promítání je zcela elementární (viz citované místo v Jaglomově knize (3); jiný důkaz viz v knize (8), str. 181—191; srv. též (7) na citovaném místě). Na jednom místě použije se též prostorová věta Desarguesova o koxiálních trojúhelnících; také tato věta je běžná a zcela elementární. A tak prostředky důkazu jsou skromné: některé vlastnosti kružnice, stereografické promítání, věta Desarguesova. — Zmíníme se též ještě o určité methodické nevýhodě, stejné, jako má důkaz cestou projektivní: výtvor konstrukce K (stejně jako při postupu projektivním výtvor dvou svazků) hraje po celou dobu pomocnou a pro laika poněkud tajemnou úlohu; teprve v závěru rouška padá a vytvořený útvar ukáže se být kuželosečkou. Posouzení této nevýhody bude snad moci čtenář lépe provést až po prostudování tohoto článku. — Thema bylo předmětem jednání semináře z deskriptivní geometrie při ČVUT a bylo podrobeno zevrubné diskusi.

§ 1.

Všude v dalším budeme vyšetřovat rozšířený prostor euklidovský.

Poučka 1. *Kružnici k lze centrálně promítnout do kružnice k' tak, že daný trojúhelník vepsaný do k promítá se do trojúhelníka pravoúhlého rovnoramenného.*

Důkaz. Označme A, B, C vrcholy daného trojúhelníka, vepsaného do k. Označme a, b, c tečny ke k v bodech A, B, C. Zvolme rovinu ω tak, aby obsahovala body $a \cap b$, $AB \cap c$, nikoliv však body A, B, C. Kružnicí k proložme kulovou plochou $\varkappa$ tak, aby se dotýkala roviny ω v jistém bodě S. Pak průmětem kružnice k z S do roviny rovnoběžné s ω (a různé od ω) je opět kružnice[1]); průměty bodů $a \cap b$, $AB \cap c$ jsou body nevlastní, takže průmětem trojúhelníka ABC je pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník. (Viz *obr. 1.*)



Obr. 1

Konstrukce K: Jsou-li $1, 2, 3$ body a I, II přímky v téže rovině, pro něž jest $1 \in I, 2 \in II$, $1 \notin II$, $2 \notin I$, $3 \notin I$, $3 \notin II$, $3 \notin 12$, pak každé bodem $I \cap II$ jdoucí přímce x přiřaďme bod $B_x = (13 \cap x)2 \cap (23 \cap x)1$. (Viz *obr. 2.*)

Množinu všech B_x označíme jako útvar, vytvořený konstrukcí K užitím bodů 1, 2, 3 a přímek I, II.

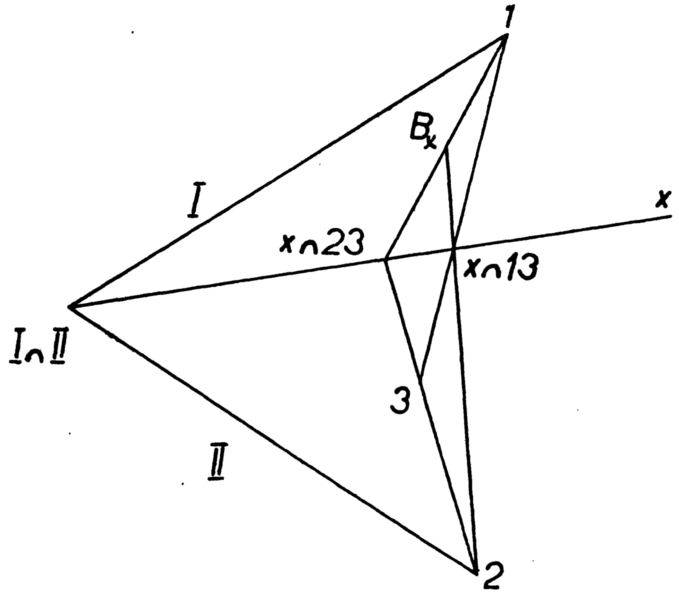
Poučka 2. *Nechť 1, 2, 3 jsou vrcholy rovnoramenného trojúhelníka vepsaného do kružnice k, při čemž body $1, 2$ jsou diametrálně protilehlé. Nechť I, II jsou tečny ke k v bodech 1, 2. a) Pak k je vytvořeno konstrukcí K užitím 1, 2, 3, I, II. b) Pak tečna III ke k v bodě 3 prochází bodem $12 \cap (13 \cap II)$ $(23 \cap I)$.*

Důkaz. a$_1$) Nechť x je vlastní přímka, rovnoběžná s přímkou I. Pak buďto body 1, $x \cap 13$, $x \cap 23$ anebo body 2, $x \cap 13$, $x \cap 23$ jsou vrcholy trojúhelníka o orthocentru 2, resp. 1, a tedy $B_x \in k$. Je-li n nevlastní přímka v rovině kružnice k, pak zřejmě B_n je bod kružnice k, diametrálně protilehlý k bodu 3. a$_2$) Zřejmě jest $B_I = 1$, $B_{II} = 2$. Dále jest B_n bod kružnice k, diametrálně protilehlý k bodu 3. Nechť tedy B je bod kružnice k, různý od 1, 2, B_n. Pak $B = B_x$ pro přímku x, jdoucí body $13 \cap B2$, $23 \cap B1$; přímka x je kolmá k přímce 12, protože bod 1 je orthocentrem trojúhelníka o vrcholech $13 \cap B2$, $23 \cap B1$, 2.

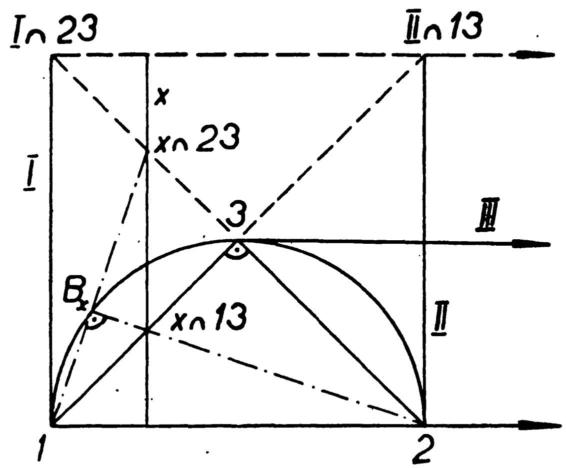
[1]) Podle známé věty promítání stereografického: viz (3), § 3.

b) Tečna *III* v bodě *3* jest zajisté rovnoběžná s přímkou *12*. Z toho plyne žádané tvrzení. (Viz *obr. 3.*)

Poučka 3. *Nechť 1, 2, 3 jsou vrcholy trojúhelníka vepsaného do kružnice k. Nechť I, II jsou tečny ke k v bodech 1, 2. a) Pak k je vytvořeno konstrukcí K užitím 1, 2, 3, I, II. b) Pak tečna ke k v bodě 3 prochází bodem 12* $\cap$ *(13* $\cap$ *II) (23* $\cap$ *I).*



Obr. 2



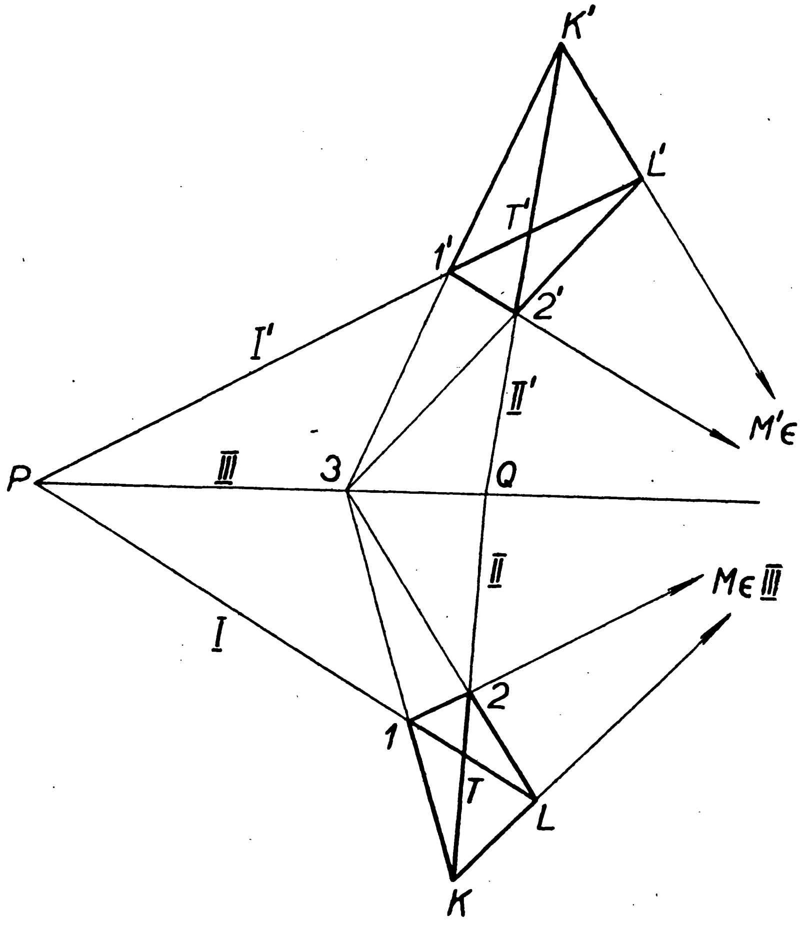
Obr. 3

Důkaz plyne z poučky 2 užitím poučky 1.

Poučka 4. *Nechť 1, 2, 3 jsou body a I, II přímky v rovině* ϱ*, při čemž* $1 \in I$*,* $2 \in II$*,* $1 \notin II$*,*

$2 \notin I$, $3 \notin I$, $3 \notin II$, $3 \notin 12$. Označme $K = II \cap 13$, $L = I \cap 23$, $M = 12 \cap KL$, $III = 3M$, $P = I \cap III$, $Q = II \cap III$, $T = I \cap II$.

Obdobně nechť jsou $1'$, $2'$, $3'$ body a I', II' přímky roviny ϱ', při čemž $1' \in I$, $2' \in II'$, $1' \notin II'$, $2' \notin I'$, $3' \notin I'$, $3' \notin II'$, $3' \notin 1'2'$. Označme opět $K' = II' \cap 1'3'$, $L' = I' \cap 2'3'$, $M' = 1'2' \cap K'L'$, $III' = 3'M'$, $P' = I' \cap III'$, $Q' = II' \cap III'$, $T' = I' \cap II'$.



Obr. 4

a) Jestliže jest $3 = 3'$, $P = P'$, $Q = Q'$, $\varrho \neq \varrho'$, pak přímky $11'$, $22'$, KK', LL' procházejí týmž bodem. b) Jestliže je $1 = 1'$, $T = T'$, $P = P'$, $\varrho \neq \varrho'$, pak přímky $11'$, $22'$, KK', LL' jdou týmž bodem.

Důkaz. a) Trojúhelníky $1TK$, $1'T'K'$ jsou koaxiální, a tedy podle nepřímé věty Desarguesovy jsou též koncentrické (t. j. přímky $11'$, TT', KK' jsou týmž bodem V).[2])

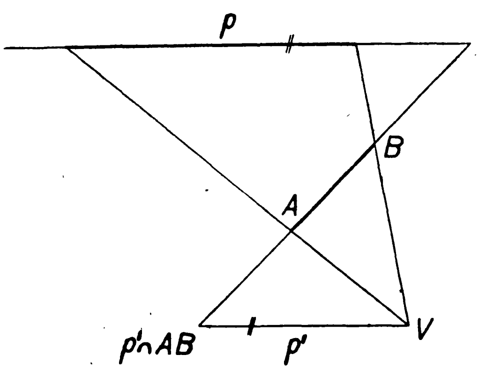
[2]) Zde je „trojúhelníkem" míněna pouze uspořádaná trojice bodů, neležících na téže přímce; koaxiálnost trojúhelníků $1\,TK$, $1'\,T'K'$ znamená pak, že body $1\,T \cap 1'\,T'$, $1\,K \cap 1'\,K'$, $TK \cap T'K'$ leží na téže přímce.

Avšak také trojúhelníky KTL, $K'T'L'$ jsou koaxiální, a tedy přímky KK', TT', LL' procházejí týmž bodem, a to opět bodem V. Dále též trojúhelníky $2TL$, $2'T'L'$ jsou koaxiální a tedy, přímky $22'$, TT', LL' jdou týmž bodem, a to opět bodem V. Tedy přímky $11'$, $22'$, TT', LL' jdou týmž bodem, jak bylo dokázat. (Viz *obr. 4.*) Obdobně se dokáže část b).

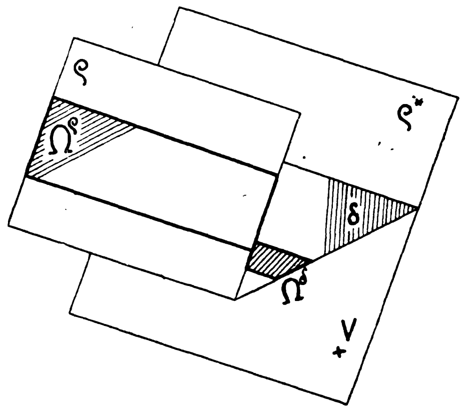
Poučka 5. *Nechť jsou dány vlastní roviny ϱ, ϱ^*, δ ($\varrho \parallel \varrho^* \neq \varrho \neq \delta$) a bod V ležící v ϱ^*, avšak nikoliv v δ. Dále nechť Ω^δ je rovinný pás v δ* [3]*), který má s přímkou $\delta \cap \varrho^*$ společný pouze nevlastní bod. Pak průmětem pásu Ω^δ z V do ϱ je opět rovinný pás.* (Viz *obr. 5a.*)

Důkaz plyne z tohoto jednoduchého poznatku planimetrického:

Ve vlastní rovině ω nechť je dán bod V, dále dva vlastní body $A \neq B$ a přímka p tak, že V neleží ani na přímce AB, ani na přímce p a že přímka p', vedená bodem V rovnoběžně s p, protíná přímku AB vně uzavřené úsečky AB. Pak průmětem úsečky AB z V do p je opět úsečka. (Viz *obr. 5b.*)



Obr. 5a



Obr. 5b

§ 2.

Věta 1. *a) Centrálním průmětem kružnice, neležící v rovině promítací, je útvar, vytvořený konstrukcí K.*

b) Každý útvar vytvořený konstrukcí K a ležící ve vlastní rovině, je centrálním průmětem kružnice.

Důkaz. a) Danou kružnici k vytvořme konstrukcí K užitím některých tří jejích bodů $1, 2, 3$ a užitím tečen I, II v bodech $1, 2$. Centrální průměty bodů $1, 2, 3$ a přímek I, II vytvořují pak centrální průmět kružnice k.

b) Nechť útvar k' leží ve vlastní rovině ϱ' a je vytvořen konstrukcí K užitím bodů $1', 2', 3'$ a přímek I', II'. Označme III' spojnici bodu $3'$ s bodem $1'2' \cap (1'3' \cap II')$ $(2'3' \cap I')$. Alespoň jedna z dvojic $1', I'$; $2', II'$; $3', III'$ obsahuje vlastní bod i vlastní přímku.

Nechť za prvé je $3'$ vlastní bod a III' vlastní přímka. Přímkou III' položme libovolnou rovinu ϱ různou od ϱ'; v rovině ϱ zvolme libovolnou kružnici k, která se v době $3 = 3'$ dotýká přímky $III = III'$.

[3]) Rovinným pásem rozumí se zde bodový útvar, který je konvexní, uzavřený a jehož hranici tvoří dvě různé rovnoběžky.

Body $III \cap I'$, $III \cap II'$ veďme ke k od tečny III různé tečny I, II s dotykovými body 1, 2. Podle poučky 3b prochází tečna III bodem $12 \cap (13 \cap II)$ $(23 \cap I)$. Podle poučky 4a jsou tedy body $1'$, $2'$, $3'$ a přímky I', II' centrálními průměty bodů 1, 2, 3 a přímek I, II z centra $V = 11' \cap 22'$, a tedy útvar, vytvořený konstrukcí K užitím 1, 2, 3, I, II (což je kružnice k) promítá se z centra V do útvaru vytvořeného konstrukcí K užitím $1'$, $2'$, $3'$, I', II' (což je útvar k'). Nechť za druhé je bod 1 vlastní a přímka I vlastní. Pak je postup obdobný, jen místo poučky 4a užijeme poučku 4b. Důkaz věty 1 je tím dokončen.

Poznámka. Též každý útvar, vytvořený konstrukcí K užitím nevlastních bodů 1, 2, 3 a nevlastních přímek I, II je centrálním průmětem kružnice. Toto tvrzení má však jiný charakter než část věty b) věty 1; jeho elementární (existenční důkaz) zdá se být problematický.[4])

Z lineárnosti konstrukce K vyplývá několik důsledků:

(1) Nechť útvar k leží ve vlastní rovině ϱ a je průmětem kružnice m ze středu promítání $A \notin \varrho$. Ke každému bodu $B \notin \varrho$ a každé vlastní rovině $\varrho' \not\ni B$ existuje kružnice n a bod $C \notin \varrho'$ tak, že průmět útvaru k z bodu B do roviny ϱ' je též průmětem kružnice n z bodu C.[5])

(2) V lineárním zobrazení vlastní roviny ϱ na vlastní rovinu ϱ' odpovídá centrálnímu průmětu kružnice opět centrální průmět kružnice.

(Speciálně tedy v perspektivní kolineaci ve vlastní rovině odpovídá centrálnímu průmětu kružnice opět centrální průmět kružnice.)

Věta 2. *Každý útvar k, vytvořený konstrukcí K a ležící ve vlastní rovině ϱ, lze umístit na rotační plochu kuželovou.*

Důkaz. Podle věty 1 je k centrálním průmětem některé kružnice h (ležící v rovině δ) ze středu promítání V. Veďme bodem V rovinu ϱ^* rovnoběžnou s rovinou ϱ. Jsou tři možné případy: 1) h neprotíná $\delta \cap \varrho^*$; 2) h se dotýká $\delta \cap \varrho^*$ v bodě N_h; 3) h protíná $\delta \cap \varrho^*$ v různých bodech A_h, B_h.

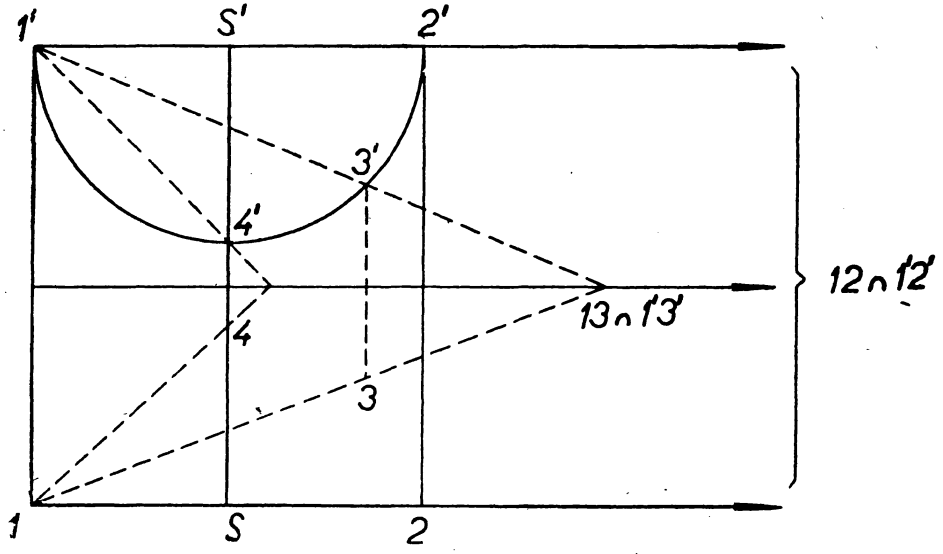
1. *případ*: Stanovme s přímkou $\delta \cap \varrho^*$ rovnoběžné tečny ke k; označme je I_h, II_h a jejich body dotyku označme 1_h, 2_h. Dále vyberme kterýkoliv bod $3_h \in h$, různý od bodů 1_h, 2_h. Průmětem bodů 1_h, 2_h, 3_h a tečen I_h, II_h z bodu V do roviny ϱ jsou body 1, 2, 3 a přímky I, II. Podle věty 1 je útvar k též vytvořen konstrukcí K užitím 1, 2, 3, I, II. Podle poučky 5 leží bod 3 uvnitř rovinného pásu, ohraničeného přímkami I, II. To, že bod 3 leží uvnitř zmíněného pásu, je pro 1. případ podstatné.

Zvolme dále kružnici k', dotýkající se přímek I, II v jistých bodech $1'$, $2'$ a mající střed S' různý od středu S úsečky 12. Bodem 3 veďme rovnoběžku s přímkou I, vyberme jeden z jejích průsečíků s m a označme jej $3'$. V perspektivní afinitě o ose $(12 \cap 1'2')$ $(13 \cap 1'3')$ a páru odpovídajících si bodů $1' \to 1$ odpovídá kružnici k' (vytvořené konstrukcí K užitím $1'$, $2'$, $3'$, I', II') útvar k (vytvořený konstrukcí K užitím 1, 2, 3, I, II). Rozeznávejme dvě alternativy:

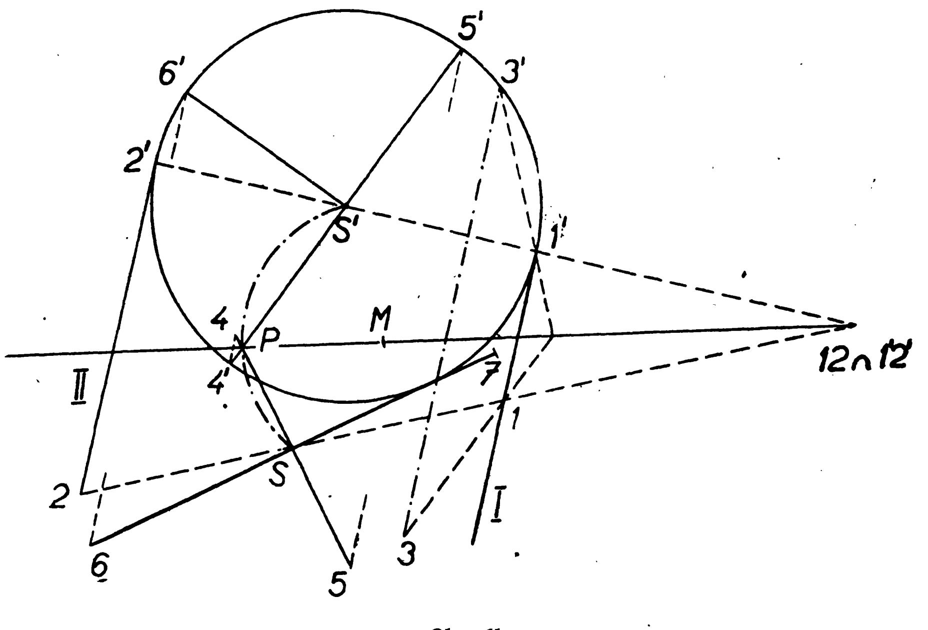
a) Je-li přímka I kolmá k přímce 12, pak ve vyšetřované afinitě určíme obrazy 4, 5 obou průsečíků $4'$, $5'$ přímky SS' s kružnicí k'. Pak tečně IV', resp, V' kružnice k' v bodě $4'$, resp. $5'$ odpovídá přímka IV, resp. V, která má s k společný pouze bod 4, resp. 5. (Viz *obr. 6a*.)

[4]) Autorovi se takový důkaz nezdařil. Jde zde — vyjádřeno jinými slovy — o prokázání existence cyklických řezů kvadratické plochy kuželové, což je úloha čtvrtého stupně. Srv. pozn. [1]) pod čarou na str. 472 v knize (1) prof. Hadamarda.

[5]) Jinými slovy: Průnik kruhové kuželové plochy s vlastní rovinou nevrcholovou promítá se centrálně do vlastní průmětny jakožto centrální průmět kružnice.



Obr. 6a



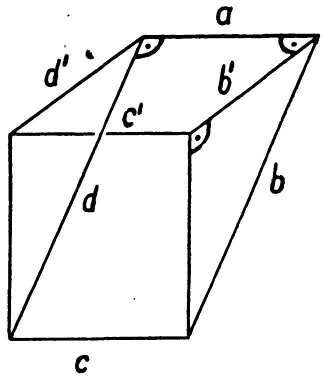
Obr. 6b

b) Není-li přímka *I* kolmá k přímce *12*, pak sestrojme průsečík *M* symetrály úsečky *SS'* s osou vyšetřované afinity. Kružnice, mající střed *M* a jdoucí body *S*, *S'*, protíná osu afinity v bodech *P*, *Q*. Průsečíkům *4'*, *5'* resp. *6'*, *7'* přímek *S'P*, *S'Q* s *k'* odpovídají v afinitě body *4, 5*, resp. *6, 7* ležící na k; přitom tečnám IV', V', VI', VII' ke k v bodech $4', 5', 6', 7'$ odpovídají v afinitě přímky IV, V, VI, VII, které protínají k vždy v jediném bodě (a to v bodě 4, resp. *5*, resp. *6* resp. *7*). (Viz *obr. 6b.*)

V případě a) jsou přímky I, II, IV, V, v případě b) přímky IV, V, VI, VII prodloužením stran a, b, c, d obdélníka.

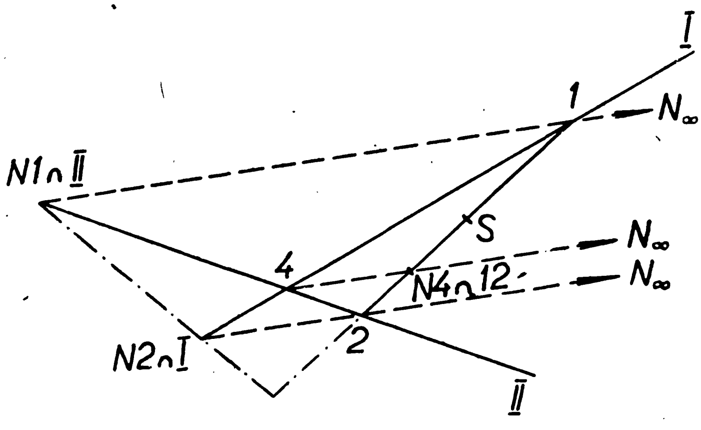
Jsou-li úsečky a, b shodné, pak obdélník je čtvercem a útvar k, vytvořený nyní konstrukcí K užitím *1, 2, 4*, I, II, resp. užitím *4, 5, 6*, IV, V je kružnicí, kterou lze ovšem vždy umístit na rotační plochu kuželovou.

Je-li úsečka a kratší než b (bez omezení obecnosti), pak sestrojme čtverec, jehož po sobě jdoucí strany jsou a, b', c', d', při čemž rovina čtverce je kolmá k rovině, obsahující c, c'. Vyšetřovaný obdélník i čtverec leží na rotační válcové ploše λ. Užitím středů úseček b', c', a a prodloužených úseček b', c' je konstrukcí K vytvořena kružnice m, ležící na λ, kdežto užitím středů úseček b, c, a a prodloužených úseček b, c je konstrukcí K vytvořen útvar k, ležící na λ. Útvar k jsme tedy umístili na rotační plochu válcovou. (Viz *obr. 6c.*)



Obr. 6e

2. *případ.* Označme N nevlastní bod přímky VN_h. Bod N je jediným nevlastním bodem útvaru k. Zvolme v rovině ϱ přímku $p \perp VN_h$ tak, aby byla při promítání z centra V průmětem přímky ph, protínající h ve dvou různých bodech $1_h, 2_h$. Označme I_h, II_h tečny k h v bodech $1_h, 2_h$. Pak $1_h, 2_h, I_h, II_h$ promítají se z V do ϱ do $1, 2, I, II$; přitom střed S úsečky *12*, bod $4 = I \cap II$ a bod N leží na téže přímce.[6]) [Kdyby $S \notin N4 \cap 12$, pak bod $(N1 \cap II)\,(N2 \cap I) \cap 12$ byl by vlastní, a tedy průmět tohoto bodu z V do δ ležel by mimo $\delta \cap \varrho^*$ to by však podle tvrzení 9 odporovalo incidenci $(N_h1_h \cap II_h)\,(N_h2_h \cap I_h)$

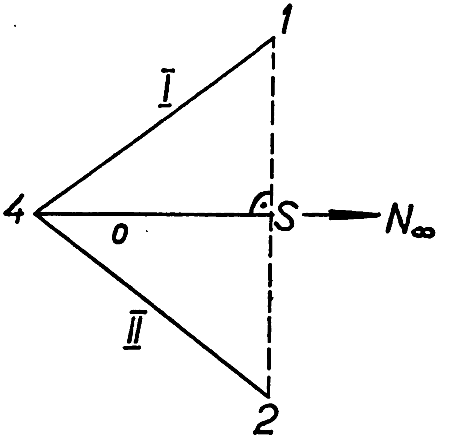


Obr. 7a

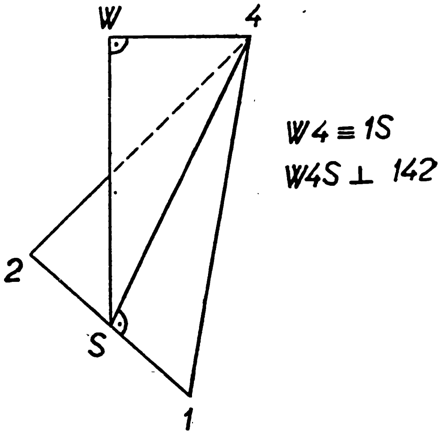
[6]) Z důkazu, uvedeného dále v závorkách, vyplývá, že tvrzení o kolinearitě bodů 4, S, N platí pro jakoukoliv volbu bodů 1_h, 2_h, kružnice h, ovšem různých od N_h. (Viz *obr. 7a.*)

$\cap 1_h 2_h \in \delta \cap \varrho^*$, platné podle poučky 3. Tedy $S = N4 \cap 12$.] Tedy přímka $o = S4$ je osou kolmé symetrie útvaru k. (Viz *obr. 7b.*)

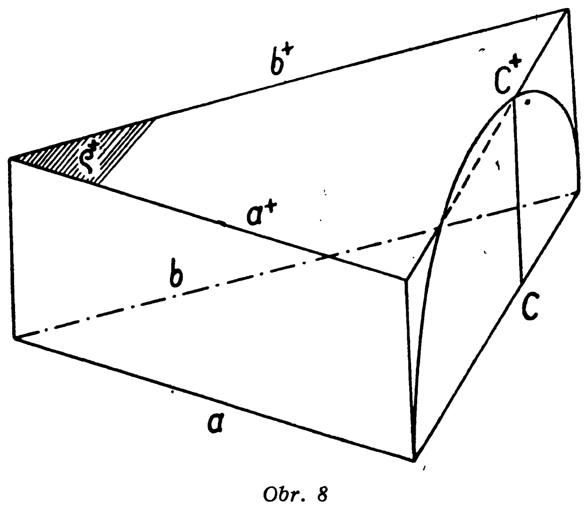
V rovině, jdoucí přímkou o kolmo k ϱ, stanovme bod W tak, aby trojúhelník $W4S$ měl pravý úhel při W a aby úsečky $W4$, $1S$ byly shodné. Označíme-li λ rotační kuželovou plochu jdoucí bodem W, středem úsečky $4S$ a mající osu WS, pak užitím $1, 2, N, I, II$ konstrukcí K vytvořený útvar k leží na λ (přímky $W1$, $W2$, WN leží na λ a roviny WI, WII se dotýkají plochy λ).



Obr. 7b



Obr. 7c



Obr. 8

3. *případ.* Body A_h, B_h promítají se z V do ϱ do nevlastních bodů A, B; tečny a_h, b_h ke k v bodech A_h, B_h promítají se z V do ϱ do přímek a, b. Dále zvolme libovolný bod $C_h \in h$ různý od bodů A_h, B_h a promítneme jej z V do ϱ do bodu C. Určíme rotační kuželovou plochu λ tak, aby přímky a, b tvořily její meridián a aby bod C byl kolmým prů-

mětem jistého bodu $C^+ \in \lambda$ do roviny ϱ. Bodem C proložíme rovinu $\varrho^+ \parallel \varrho$. Tečné roviny k λ podél a, b protínají ϱ^+ v přímkách a^+, b^+. Zřejmě konstrukcí K je užitím bodů A, B, C^+ a přímek a^+, b^+ vytvořen útvar k^+ shodný s útvarem k (vytvořeným konstrukcí K užitím A, B, C, a, b). Avšak jest též $k^+ = \lambda \cap \varrho^+$ (Viz *obr. 8.*)

Věta 2 je tím dokázána.

Definice. *Společný průnik rotační kuželové plochy $\varkappa$ [7]) s nevrcholovou rovinou ϱ, nikoliv kolmou k ose plochy $\varkappa$, nazývá se hyperbolou, resp. parabolou, resp. elipsou, obsahuje-li právě dva nevlastní body, resp. jediný nevlastní bod, resp. neobsahuje-li žádný nevlastní bod.*

Hyperboly, paraboly, elipsy a kružnice označují se společným názvem jako (vlastní a jednoduché) kuželosečky.

Z vět 1, 2 plyne důležitý důsledek, který vyslovíme jako hlavní větu.

Hlavní věta. a) *Centrálním průmětem kuželosečky* (která neleží v rovině promítací) *do vlastní roviny je opět kuželosečka.*

b) *V lineárním zobrazení vlastní roviny ϱ na vlastní rovinu ϱ' odpovídá kuželosečce opět kuželosečka.*

Literatura

[1] J. Hadamard, *Leçons de géométrie élémentaire II*, Paris 1901 (§ 754—758 na str. 468—473).
[2] K. Havlíček, *Úvod do projektivní geometrie kuželoseček*, Praha 1956 (str. 159—166).
[3] I. M. Jaglom, *Geometričeskije preobrazovanija II*, Moskva 1956 (§ 3 na str. 70—76).
[4] J. Kounovský - Fr. Vyčichlo, *Deskriptivní geometrie*, Praha 1953 (§ 10, 12 na str. 313 až 315).
[5] E. Otto, *Geometria wykreślna*, Warszawa 1954 (§ 26—29 na str. 122—154).
[6] H. Prüfer, *Projektive Geometrie*, Leipzig 1953 (§ 10, str. 185, resp. § 12, str. 188—192).
[7] H. Rademacher - O. Toeplitz, *Von Zahlen und Figuren*, Berlin 1933 (kap. 21 na str. 150 až 160).
[8] K. Rohn - E. Papperitz, *Lehrbuch der darstellenden Geometrie I*, Leipzig 1913 (§ 237—248 na str. 181—191; pozn. 9. na str. 498; § 256—274 na str. 198—215).
[9] Ed. Stiefel, *Lehrbuch der darstellenden Geometrie*, Basel 1947 (str. 67, resp. str. 87—89, resp. str. 95).

ZAOKROUHLOVACÍ CHYBA PŘI NUMERICKÉM POČÍTÁNÍ S HLEDISKA STATISTICKÉHO

RENATA MIKULASCHKOVÁ

Velmi důležitým problémem při numerickém počítání je odhad chyby, které se dopustíme při numerickém řešení problému. Zatím co různé otázky jiné, na př. otázky konvergenční, jsou podrobně studovány, odhad chyby je otázkou poměrně málo propracovanou. To proto, že odhad, má-li být užitečný, musí být snadno proveditelný a musí dávat výsledky, které se příliš neliší od skutečnosti. Zatím se však ještě velmi často stává, je-li odhad vůbec proveditelný, že odhadnutá chyba je mnohem větší než chyba skutečná.

[7]) Poněvadž vyšetřujeme rozšířený euklidovský prostor, je rotační válcová plocha pouze speciálním případem rotační plochy kuželové.