Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Bohumil Pardubský

Matematicko-statistické methody při kontrole hromadné výroby [Dokončení]

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 2 (1957), No. 6, 668--674

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/137297

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 1957

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://project.dml.cz

[4] J. Blum, *Approximation Methods which converge with Probability One*, Annals of Mathematical Statisties, vol. 1954, 25.
[5] J. Blum, *Multidimensional Stochastic Approximation Methods*, Annals of Mathematical Statistics, 1954, vol. 25.
[6] R. Bechhofer, *ASingle — Sample Multiple Decision Procedure for Ranking Means of Normal Populations with Known Variances*, Annals of Mathematical Statistics, 1954, vol. 25.
[7] M. Beneš, J. Likeš, *Faktorové experimenty v průmyslovém výzkumu*, Pokroky matematiky, fysiky a astronomie, 1957, č. 1.
[8] P. Box, B. Wilson, *On the Experimental Attainement of Optimum Conditions*, Journal of the Royal Statistical Society, Series B, 1951, vol. 13, No 1.
[9] P. Box, *The Exploration and Exploitation of Response Surfaces: Some General Considerations and Examples*, Biometrics 1954, vol. 10, No 1.
[10] L. Davies, *Design and Analysis of Experiments*, 1954.
[11] O. Fischer, *Analysa rozptylu*, 1956.
[12] P. Box, J. Hunter, *A Confidence Region for the Solution of a Set of Simultaneous Equations with An Application to Experimental Design*, Biometrika 1954, vol. 41.

MATEMATICKO-STATISTICKÉ METHODY PŘI KONTROLE HROMADNÉ VÝROBY

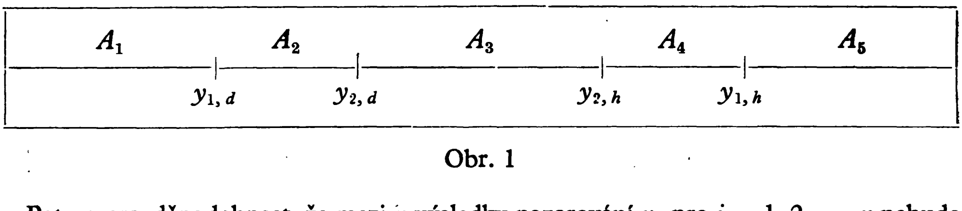
Ing. Dr B. PARDUBSKÝ,
(Výzk. úst. tepelné techniky, Praha)

(Dokončení)

3.4 Methoda individuálních hodnot

Uvažujme n nezávislých pozorování náhodné proměnné η, které přísluší normální rozdělení $N(0,1)$ a nabývá hodnot y. Nechť jsou dány čtyři hodnoty $y_{1,d} < y_{2,d} < y_{2,h} < y_{1,h}$, které tvoří krajní body pěti intervalů:

$$A_1 : (-\infty; y_{1,d}\rangle, \quad A_2 : (y_{1,d}; y_{2,d}\rangle, \quad A_3 : (y_{2,d}; y_{2,h}\rangle,$$
$$A_4 : (y_{2,h}; y_{1,h}\rangle, \quad A_5 : (y_{1,h}; \infty), \quad \text{(viz } obr.\ 1\text{)}.$$



Obr. 1

Potom pravděpodobnost, že mezi n výsledky pozorování y_i pro $i = 1, 2, \ldots n$ nebude v intervalech A_1 a A_5 ležet žádná hodnota a v intervalech A_2 a A_4 nejvýše po jedné hodnotě je rovna

$$[F(y_{2,h}) - F(y_{2,d})]^n + n[F(y_{2,d}) - F(y_{1,d})][F(y_{2,h}) - F(y_{2,d})]^{n-1} +$$
$$+ n[F(y_{1,h}) - F(y_{2,h})][F(y_{2,h}) - F(y_{2,d})]^{n-1} + n(n-1)[F(y_{2,d}) - F(y_{1,d})] \cdot$$
$$\cdot [F(y_{1,h}) - F(y_{2,h})][F(y_{2,h}) - F(y_{2,d})]^{n-2} = 1 - \alpha, \tag{50}$$

kde

$$F(y) = P(\eta \leqslant y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 1 - F(-y).$$

Úkolem je stanovit hodnoty $y_{1,d}, y_{2,d}, y_{2,h}$ a $y_{1,h}$ tak, aby pro předem danou hodnotu α rovnice (50) byla splněna. Dále požadujeme, aby

$$y_{2,h} = -y_{2,d} \quad \text{a} \quad y_{1,h} = -y_{1,d}. \tag{51}$$

Potom rovnice (50) má tvar

$$[2F(y_{2,h}) - 1]^n + 2n[F(y_{1,h}) - F(y_{2,h})][2F(y_{2,h}) - 1]^{n-1} + \\ + n(n-1)[F(y_{1,h}) - F(y_{2,h})]^2 [2F(y_{2,h}) - 1]^{n-2} = 1 - \alpha, \tag{52}$$

neboť

$$F(-y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-y} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 1 - F(y).$$

Jelikož v rovnici (52) jsou ještě dvě neznámé $y_{2,h}$ a $y_{1,h}$, volíme podmínku, aby pravděpodobnost, že nejvýše jedna hodnota z n napozorovaných hodnot překročí hodnotu $y_{2,h}$ byla rovna zvolené hodnotě α_1. Tedy

$$\binom{n}{n-1} [F(y_{2,h})]^{n-1} [1 - F(y_{2,h})] + [F(y_{2,h})]^n = \alpha_1. \tag{53}$$

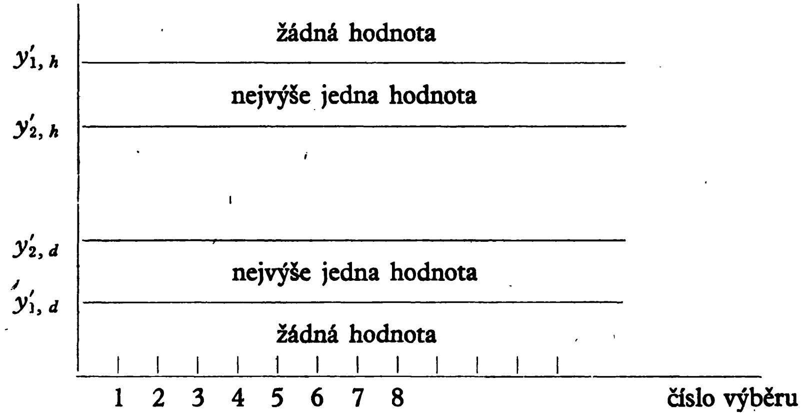
Vzhledem k tomu, že $y_{2,h} = -y_{2,d}$, je tato podmínka totožná s podmínkou, aby pravděpodobnost, že nejvýše jedna hodnota z napozorovaných hodnot byla menší než hodnota $-y_{2,d}$ byla rovna hodnotě α_1. Řešením rovnice (53) ([10] str. 328—332) stanovíme hodnotu neznámé $y_{2,h}$, kterou dosadíme do rovnice (52) a dostaneme tak kvadratickou rovnici pro neznámou $y_{1,h}$. Vzhledem ke vztahům (51) jsou hodnoty $y_{1,d}, y_{2,d}, y_{1,h}$ a $y_{2,h}$ úplně určeny. Uvažujeme-li náhodnou proměnnou η', které přísluší normální rozdělení $N(\mu, \sigma)$ a nabývá hodnot y', potom náhodná proměnná $\frac{\eta - \mu}{\sigma}$, má normální rozdělení $N(0,1)$ a nabývá hodnot

$$y = \frac{y' - \mu}{\sigma}. \tag{54}$$

Pomocí hodnot $y_{1,h}$ a $y_{2,h}$ vypočtených za předpokladu, že náhodná proměnná η, má normální rozdělení $N(0,1)$ snadno stanovíme hodnoty $y'_{1,h}$ a $y'_{2,h}$ za předpokladu, že náhodná proměnná η' má normální rozdělení $N(\mu, \sigma)$. Ze vztahu (54) a (51) dostaneme

$$y'_{1,h} = \sigma y_{1,h} + \mu, \quad y'_{1,h} = -y'_{1,h}, \quad y'_{2,h} = \sigma y_{2,h} + \mu, \quad y'_{2,d} = -y'_{2,h}. \tag{55}$$

Methoda regulace výroby pomocí individuálních hodnot spočívá v tom, že v regulačním diagramu jsou zakresleny celkem čtyři regulační meze a sice vnější regulační mez horní $y'_{1,h}$, dolní $y'_{1,d}$ a vnitřní regulační mez horní $y'_{2,h}$ dolní $y'_{2,d}$. (Viz obr. 2)



Obr. 2.

Výrobní pochod nevyžaduje žádného zásahu, jestliže z n provedených měření žádná hodnota neleží nad resp. pod horní vnější resp. dolní vnější regulační mezí a jestliže mezi vnější a horní vnitřní regulační mezí leží nejvýše jedna hodnota a obdobně smí ležet nejvýše jedna hodnota mezi dolní vnější a dolní vnitřní regulační mezí. V opačném případě je nutné znovu seřídit výrobní pochod.

Při výpočtu regulačních mezí předpokládáme, že seřizování stroje je prováděno na střed tolerančního pole a požadujeme, aby procento výrobků, které mají sledovaný rozměr mimo předepsané konstrukční mezní rozměry, bylo nejvýše 100 β %. Potom tedy ve vztazích (55)

$$\mu = \frac{T_h + T_d}{2} \quad \text{a} \quad \sigma = \frac{T}{2\, t_{\frac{\beta}{2}}}, \tag{56}$$

kde T_h resp. T_d je horní resp. dolní mezní rozměr a $t_{\frac{\beta}{2}}$ je dána vztahem (19)

Vzhledem k (55) a (56) jednotlivé regulační meze jsou dány vzorci:

$$y'_{1,h} = \frac{T_h + T_d}{2} + b_1 T, \quad y'_{1,d} = \frac{T_h + T_d}{2} - b_1 T, \tag{57}$$

$$y'_{2,h} = \frac{T_h + T_d}{2} + b_2 T, \quad y'_{2,d} = \frac{T_h + T_d}{2} - b_2 T,$$

kde T je předepsaná tolerance a $b_1 = \frac{y_{1,h}}{2\, t_{\frac{\beta}{2}}}$, $b_2 = \frac{y_{2,h}}{2\, t_{\frac{\beta}{2}}}$. Hodnoty koeficientů b_1 a b_2 pro $a = 0{,}05$, $a_1 = 0{,}995$, $\beta = 0{,}02, 0{,}01, 0{,}005, 0{,}0027$ a $n = 3$ až 10 jsou uvedeny v *tab. 3.*

Tabulka 3.

Koeficienty b_1 a b_2

Rozsah výběru n	Přípustné průměrné procento zmetků za mezními rozměry			
	2 %	1 %	0,5 %	0,27 %
3	0,524 376	0,473 340	0,434 312	0,406 292
4	547 404	494 365	453 335	424 313
5	564 426	509 384	467 353	437 330
6	577 443	521 400	478 367	448 343
7	588 458	531 413	487 379	456 355
8	597 471	539 425	494 390	463 365
9	604 484	545 437	501 401	468 375
10	611 494	551 446	506 410	474 383

3.5 Regulace výroby methodou posuzování

V četných případech se kontrola výrobního pochodu provádí nikoliv pomocí stupnicovitých měřidel, nýbrž pomocí měrek resp. kalibrů. Touto kontrolou se rozhodne, zda kontrola jakostní charakteristiky výrobku je v předepsané toleranci či nikoliv. Abychom mohli provádět regulaci výroby na základě výsledku kontroly určité části celkové výroby, nutno sestrojit příslušný model.

Uvažujme prvky, které mají buď znak A neb B. Neexistuje prvek, který by měl oba znaky nebo žádný znak. Všech prvků je N. Pravděpodobnost, že bude náhodně vybrán prvek se znakem A nechť je p a se znakem B je $q = 1 - p$. Vybereme-li náhodně n prvků, potom pravděpodobnost, že mezi těmito n prvky bude i prvků se znakem A a $(n - i)$ se znakem B je rovna

$$\frac{\binom{Np}{i}\binom{Nq}{n-i}}{\binom{N}{n}}, \tag{58}$$

kde Np resp. Nq je zřejmě počet prvků se znakem A resp. B mezi všemi N prvky. Pro $i = 0, 1, 2, \ldots n$ dostáváme tak zvané hypergeometrické rozdělení.

Pro dostatečně velké N lze hypergeometrické rozdělení aproximovat binomickým rozdělením, které je limitním rozdělením hypergeometrického rozdělení jestliže $N \to \infty$.

Binomické rozdělení snadno odvodíme, uvažujeme-li náhodné proměnné ξ_i, pro $i = 1, 2, \ldots n$, které nabývají hodnot 1,0 s pravděpodobnostmi p, q a zřejmě

$$E[\xi_i] = p \quad \text{a} \quad D^2[\xi_i] = p - p^2 = p \cdot q, \tag{59}$$

neboť $p + q = 1$. Potom náhodná proměnná $\eta = \sum_{i=1}^{n} \xi_i$ nabývá hodnot $y = 0, 1, 2, \ldots n$ a přísluší jí binomické rozdělení s frekvenční funkcí

$$P(\eta = y) = \binom{n}{y} p^y q^{n-y} \tag{60}$$

a kumulativní distribuční funkcí

$$P(\eta \leqslant y) = \sum_{i=0}^{y} \binom{n}{i} p^i q^{n-i}. \tag{61}$$

Vzhledem k (59), (6) a (10) je

$$E[\eta] = np, \quad D^2[\eta] = npq. \tag{62}$$

Přiřadíme-li každému náhodně vybranému výrobku, který má hodnotu jakostní charakteristiky mimo předepsanou toleranci (výrobek je zmetek) znak *1* a uvnitř předepsané tolerance (výrobek je dobrý) znak *0*, potom rozdělení počtu zmetků ve výběru rozsahu n ze souboru velkého rozsahu je dáno binomickým rozdělení (60), kde 100 p % je procento zmetků v celém souboru výrobků a 100 q % je procento dobrých výrobků. Regulační meze z_h a z_d při regulaci výrobního pochodu podle počtu výrobků, které v náhodném výběru rozsahu n nevyhovují technickému předpisu, jsou dány vztahy

$$P(\eta > z_k) = \sum_{i=z_h+1}^{n} \binom{n}{i} p^i q^{n-i} = \frac{\alpha}{2} \quad \text{a} \quad P(\eta < z_d) = \sum_{i=0}^{z_d-1} \binom{n}{i} p^i q^{n-i} = \frac{\alpha}{2}, \tag{63}$$

kde pravděpodobnost α mylného zastavení výrobního pochodu je předem dána. Při výpočtu lze s výhodou použít tabulek neúplné beta funkce. Platí totiž vztah ([11] str. 180)

$$\sum_{i=z_h+1}^{n} \binom{n}{i} p^i q^{n-i} = I_p(z_h + 1, n - z_h), \tag{64}$$

kde

$$I_x(u, v) = \frac{\int_0^x t^{u-1}(1-t)^{v-1}\,dt}{\int_0^1 t^{u-1}(1-t)^{v-1}\,dt},$$

je neúplná beta-funkce.

Aproximativní stanovení regulačních mezí z_h resp. z_d symetricky položené kolem $E[\eta] = np$ lze provést pomocí Laplaceova vzorce ([12] str. 130).

$$P(|\eta - E[\eta]| \leqq t\sqrt{npq}) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{x^2}{2}} dx + \frac{1 - \theta_1 - \theta_2}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{t^2}{2}} + \Omega, \quad (65)$$

kde $\Omega < \frac{0{,}2 + 0{,}25\,|p - q|}{npq} + e^{-\frac{3}{2}\sqrt{npq}}$, $\theta_1 = nq - t\sqrt{npq} - [nq - t\sqrt{npq}]$,

$\theta_2 = np - t\sqrt{npq} - [np - t\sqrt{npq}]$ a $[nq - t\sqrt{npq}]$ je největší celé číslo obsazené v čísle $nq - t\sqrt{npq}$. Obdobně $[np - t\sqrt{npq}]$. Je zřejmé, že čím je větší hodnota npq, tím je aproximace lepší.

Ve většině praktických případů požadovaná přesnost dovoluje zanedbat poslední dva členy na pravé straně rovnice (65). Potom regulační meze pro dané α a n jsou

$$z_h = E[\eta] + t_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{npq}, \quad z_d = E[\eta] - t_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{npq}, \quad (66)$$

kde $t_{\frac{\alpha}{2}}$ je dáno vztahem (19). Matematickou naději $E[\eta]$ vzhledem k (62) odhadneme pomocí průměrného počtu zmetků $\bar{z}$ ve výběrech rozsahu n a výraz npq odhadneme pomocí výrazu $\bar{z}\left(1 - \frac{\bar{z}}{n}\right)$.

V případě $np < 10$ lze binomické rozdělení aproximovat rozdělením Poissonovým. Platí totiž vztah ([12] str. 135)

$P_m = Q_m + \Delta$, kde $P_m = \sum_{i=0}^{m} \binom{n}{i} p^i q^{n-i}$, $Q_m = \sum_{i=0}^{m} \frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!}$ a $|\Delta| < (e^x - 1)\,Q_m$ pro $Q_m \geqq \frac{1}{2}$, $|\Delta| < (e^x - 1)(1 - Q_m)$ pro $Q_m < \frac{1}{2}$ a $x = \frac{\lambda + \frac{1}{4} + \frac{\lambda^3}{n}}{2(n - \lambda)}$. Potom odhad parametrů λ Poissonova rozdělení je dán vztahem

$$\lambda \approx \bar{z},$$

kde $\bar{z}$ je průměrný počet zmetků ve výběrech rozsahu n. Pro danou pravděpodobnost α snadno stanovíme pomocí tabulek Poissonova rozdělení [3] regulační meze z_h resp. z_d. Regulaci výrobního pochodu provádíme tak, že v pravidelných časových intervalech vybereme náhodně vždy n výrobků, které překontrolujeme a zjistíme počet výrobků, které nevyhovují technickému předpisu. Jestliže tento počet je menší než je hodnota horní regulační meze, pokračuje výrobní pochod bez jakéhokoli zásahu. V opačném případě je nutné seřízení, neboť vzroste neúměrně počet zmetků. Případ, kdy počet zmetků ve výběru je menší než hodnota dolní regulační meze, vyžaduje přezkoumání výrobních podmínek a zjištěný stav je podkladem pro snižování zmetkovitosti.

Závěr

Tím byly podány theoretické základy nejužívanějších regulačních method, ke kterým patří ještě regulace, která používá mediánu a krajních odchylek od mediánu a zjednodušená výběrová kontrola srovnávání, které byly po stránce theoretické i praktické popsány v článku „Nové methody statistické regulace jakosti výroby v SSSR“, „Sovětská věda“ Strojírenství č. 3 1954. Některé další variace regulačních method jsou popsány v návrhu revidované normy ČSN 2240 „Statistická kontrola jakosti“ [*13*]. *Tab. 2 a 3* uvedené v tomto článku jsou převzaty z tohoto návrhu normy, pro který byly vypracovány a napočteny Dr A. Žaludovou a Ing. Žd. Režným.

Literatura

[1] B. V. Gněděnko, *Kurs těorii verojatnostěj.*
[2] N. B. Borodačev, *Osnovnyje voprosy těorii točnosti proizvodstva.*
[3] Prof. Dr Janko, *Tabulky k matematické statistice.*
[4] Harald Cramér, *Mathematical Methods of Statistics.*
[5] Prof. Dr Janko, *Theorie náhodných výběrů — odhady a některé testy významnosti.*
[6] A. Hald, *Statistical Tables and Formulas.*
[7] Kolektiv VÚTT-VT, *Směrnice pro statistickou kontrolu jakosti a regulaci výrobních pochodů.*
[8] Hojo, *Distribution of Median from a Normal Population*, Biometrika, Vol. 23 (1931).
[9] Mašinostrojenije, svazek 15, kapitola 8.
[10] Alkalmazott matematikai intézetének közleményei (svaz. II).
[11] Leslie E. Simon, *An Engineer's Manual of Statistical Methods.*
[12] J. V. Uspensky, *Introduction to Mathematical Probability.*
[13] Kolektiv VÚTT-VT, *Návrh revidované normy ČSN 2240* „*Statistická kontrola jakosti*“.

NOVÉ VÝSLEDKY V THEORII DISTRIBUCÍ

J. MIKUSIŃSKI[1])

J. Mikusiński referoval při své návštěvě Sovětského svazu o výsledcích v theorii distribucí, získaných v Polsku posledního roku. Část těchto výsledků byla autorem oznámena již na matematickém sjezdu v Praze roku 1955.

A. S.

V Polsku trvá již celý rok seminář věnovaný theorii distribucí (čili zobecněných funkcí, jak je zvykem v SSSR distribuce jmenovat). Seminář probíhal zprvu současně ve Vratislavi a ve Varšavě, nyní trvá jen ve Varšavě, a to za účasti matematiků i z jiných měst. Seminář vznikl vlastně z přání vybudovat jednodušší theorii distribucí výběrem vhodných definicí i method dokazování. V minulém roce byly získány nové výsledky. Nejdůležitějším z nich bylo — podle našeho mínění — zavedení pojmu distribuce v bodě a jeho aplikace.

Dnes známe tři ekvivalentní definice distribucí; jsou uvedeny v práci Templeově v *Proceedings of the London Mathematical Society.* Temple zavedl označení (S) pro definici Sobolevovu a Schwartzovu, (B) pro definici Bôchnerovu a (M) pro definici Mikusińského.

Těmito definicemi se nebudeme obírat a jen připomínáme, že se týkají distribucí nekonečného řádu. V aplikacích však mají hlavní význam mnohem jednodušší distribuce konečného řádu. Podařilo se nám udat další definici, velmi jednoduchou, vyhovující intuitivním představám fysiků. Tato definice se dá kromě toho velmi snadno rozšířit

[1]) J. Mikusiński, *O rabotach polskich matěmatikov po těorii obobščennych funkcij i operacionnomu iščisleniju*, UMN, sv. XI (1956), č. 6.