Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

František Veselý

Život Bernarda Bolzana a jeho matematicko-přírodovědecké práce [Dokončení]

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 2 (1957), No. 2, 234--243

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/137291

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 1957

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://project.dml.cz

FRANTIŠEK VESELÝ

ŽIVOT BERNARDA BOLZANA A JEHO MATEMATICKO-PŘÍRODOVĚDECKÉ PRÁCE

(Dokončení)

Jaké úvahy zaměstnávaly mysl mladého matematika Bolzana v době jeho zrání, posoudíme dobře z tohoto zápisu, který učinil roku 1803 ve svém deníku. Píše tam: *»Nově naučenému pravidlu, ať už v oboru přírodovědeckém, nebo i v matematice, jejíž pravidla jsou přece tak evidentní, nemůže náš duch úplně důvěřovati. Jak to zařídit, abychom nabyli plné důvěry k takovému pravidlu? Jak dosáhneme pevné a k praxi nezbytné důvěry k větě, k níž naše mysl chová buď určité pochyby nebo není na ni zvyklá? Měli bychom věřit, že se tak stane, vynasnažíme-li se, abychom si pravidlo promysleli, shledali pro ně důkazy atd. Bojím se však, zvlášť nejsou-li to důkazy v plném slova smyslu invicti, nechávají-li, jak je tomu konečné téměř u každého důkazu v psychologii, filosofii, theologii, morálce, třebas jen nějakou skrytou pochybnost nebo námitku nerozřešenu, že to není nikterak cesta, jak by měl duch získat důvěru k pravidlu. Ba často právě naopak. Přemýšlím-li delší dobu o důkazu rovnoběžnosti dvou přímek, zmocní se mne nakonec pochyby, je-li věta o rovnoběžkách skutečně pravdivá, a stejně je tomu v jiných případech. — Lepší prostředek je však aplikace věty. Představíme si prostě, jak by to bylo, kdybychom měli podle návodu této věty jednat, užíti ho, na něm budovat. A tak jako ve fysikální přírodě pilíř se tím více upevňuje, čím více se naň staví, zapouští i přijaté jednou pravidlo vždy pevnější kořeny, čím častěji ho prakticky užíváme.«* Z tohoto citátu je zřejmý spekulativní charakter Bolzanových úvah, v nichž se prolínají otázky filosofie i matematiky, což platí o celé tvůrčí práci Bolzanově. Nelze tu však přehlédnout ten fakt, že již mladý Bolzano je theoretikem, pro nějž nejzávažnějším kriteriem pro pravdivost theorie je zkouška v praxi.

První dvě Bolzanovy práce z matematiky, které byly vydány tiskem, jsou:

[1] *Betrachtungen über einige Gegenstände der Elementargeometrie.* — C. Barth, Praha 1804.

[2] *Beiträge zu einer begründeteren Darstellung der Mathematik.* — O. Widtmann, Praha 1810.

Bolzanova tištěná prvotina [1], se kterou se náš čtenář může seznámit též z níže uvedené publikace [20], vyšla v době, kdy bylo Bolzanovi sotva třiadvacet let. Proto v ní nelze hledat ještě mimořádné výkony, jaké podal Bolzano ve svých pozdějších matematických pracích. Zabývá se tu základními pojmy a větami elementární geometrie, při čemž některé jeho definice (na př. podobnosti) jsou příliš obecné a je v nich užíváno pojmů, které předtím definovány nebyly. Pozoruhodné však je to, že ze zdánlivého důkazu věty o shodnosti úhlů v trojúhelnících, jejichž strany jsou úměrné, dokazuje známý Euklidův axiom o rovnoběžkách. Naznačil tu tedy Bolzano, že z postulátu o existenci podobných trojúhelníků lze dokázat Euklidův axiom o rovnoběžkách, jako to učinil již dříve Lambert, což ovšem Bolzanovi nebylo známo, a později roku 1817 Legendre. Je známo též, že

se Bolzano problematikou axiomu o rovnoběžkách později znovu zabýval a že napsal kritický spis o euklidovské geometrii *Antieuklid*, který se však ztratil již za Bolzanova života, a sotva lze doufat, že bude nalezen nějaký jeho opis. Domněnka, že Bolzano dospěl samostatně k neeuklidovské geometrii, není tedy doložena.

V úvodu k práci [2] formuluje Bolzano své osobní stanovisko k matematice; pak následuje výklad o pojmu matematiky a jejím rozdělení a výklad o matematické methodě; dodatek spisu je věnován polemice s Kantem.

V květnu roku 1813 onemocněl Bolzano tak vážně, že na dva roky musil přestat přednášet. Tato přestávka v učitelské činnosti mu pravděpodobně poskytla příležitost, aby se více věnoval studiu svého zamilovaného předmětu — matematiky. Dne 19. února 1815 stává se Bolzano členem KČSN a v následujících dvou letech vycházejí tiskem tyto jeho práce:

[3] *Der binomische Lehrsatz und als Folgerung aus ihm der polynomische und die Reihen, die zur Berechnung der Logaritmen und Exponentialgrössen dienen, genauer als bisher erwiesen.* — Enders, Praha 1816.

[4] *Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen je zwei Werten, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reele Wurzel der Gleichung liege.* — Abh. der k. b. G. der W., Haase, Praha 1817.

[5] *Die drei Probleme der Rectification, der Complanation und der Cubirung, ohne Betrachtung des unendlich Kleinen, ohne die Annahme des Archimedes und ohne irgend eine nicht streng erweisliche Voraussetzung gelöst, zugleich als Probe einer gänzlichen Umstaltung der Raumwissenschaft allen Mathematikern zur Prüfung vorgelegt.* — Kummer, Leipzig 1817.

Práce [3] a [4] jsou první větší práce Bolzanovy z oboru matematické analysy. Práce [3] nebyla dosud kriticky rozebrána a zhodnocena žádným z našich ani cizích matematiků. Bylo by proto záslužné, kdyby se některý z našich matematiků ujal tohoto úkolu a podal naší matematické veřejnosti zprávu o rozboru této práce, a to tím spíše proto, že tato práce nebyla již znovu vydána a její původní vydání je těžko dostupné.

Práce [4] patří k nejvýznamnějším Bolzanovým pracím z oboru matematiky a byla vydána též česky v překladu F. J. Studničky v XI. ročníku Časopisu pro pěstování matematiky a fysiky r. 1871 při příležitosti oslav stého výročí Bolzanova narození. Vyšla též znovu v původním znění jako 153. svazek v Ostwaldových *Klassiker der exakten Wissenschaften* roku 1905. Akademik V. Jarník provedl pečlivý rozbor i zhodnocení této Bolzanovy práce v článku *Bernard Bolzano a základy matematické analysy*, který vyšel ve sborníku »Zdeňku Nejedlému Československá akademie věd«. Sborník byl vydán k 75. narozeninám Zdeňka Nejedlého r. 1953 a je již rozebrán. Bylo by jistě velmi užitečné, kdyby článek akademika V. Jarníka byl znovu otištěn v našem časopise, aby byl tak snáze přístupný naší širší matematické veřejnosti. Pro stručnou informaci našich čtenářů uvádím, že Bolzanem dokazovanou větu vyslovil po prvé d'Alembert a po prvé ji dokázal C. F. Gauss r. 1799. Tento první Gaussův důkaz a také dva jeho další důkazy této věty se opírají — ať přímo či nepřímo — o jistý poznatek přijímaný z názoru. V práci [4] usiluje Bolzano s velkým zdarem o odstranění této závady. Bolzano v ní definuje pojem spojitosti funkce obdobně, jak to učinil mnohem později A. L. Cauchy. Nachází též samostatně nutnou a postačující podmínku pro konvergenci posloupnosti, která je nyní právem označována jako Bolzanova

—Cauchyova podmínka a kterou Cauchy našel teprve o čtyři léta později. Přitom se Bolzano neomezil jen na důkaz nutnosti této podmínky, nýbrž usiluje též o důkaz její postačitelnosti; ke zdařilému provedení úplného důkazu chybí tu jen malý krok, který Bolzano nemohl učinit, poněvadž v té době nebyla ještě řádně vybudována theorie reálných čísel. Používaje této podmínky, dokazuje Bolzano větu o infimu, což je opět další významný úspěch této práce, a přistupuje pak k důkazu hlavní věty.

V práci [5], opíraje se o jistý obecný princip, odvozuje Bolzano známé vzorce pro výpočet délky oblouků křivek, plošných obsahů a objemů těles. Také tuto geometrickou práci najde náš čtenář v publikaci [20].

Z dalších Bolzanových prací, které za jeho života vyšly tiskem, uvádím:

[6] *Lebensbeschreibung des Dr Bolzano mit einigen seiner ungedruckten Aufsätzen und dem Bildnisse des Verfassers.* Eingeleitet und erläutert von dem Herausgeber. — Seidel, Sulzbach 1836.

[7] *Leben Franz Joseph Ritters von Gerstner.* — Abh. der k. b. G. der W., Haase, Praha 1837.

Bolzano napsal svůj vlastní životopis [6] na vyzvání A. Hoffmannové a ukončil jej 28. května 1831. Tento spis byl zřejmě určen pro soukromou potřebu přívrženkyně Bolzanovy a obsahuje některé údaje, které jistě nebyly psány pro veřejnost. Když r. 1836 M. J. Fesl anonymně bez předchozího souhlasu Bolzanova vydal tento životopis v nakladatelství Seidlově v Sulzbachu, byl tímto Bolzano velmi dotčen, i když omezený počet výtisků byl určen jen pro kruh Bolzanových přátel. Spis doprovodil Fesl polemickými poznámkami a zněním latinské denunciace kanovníka Fr. Pallase de Lauro, kterou Pallasův synovec Elster odevzdal nunciu Leardimu ve Vídni a úřadům papežské kurie v Římě. Tento spis vyšel též v českém překladu R. Stoklasy v Praze r. 1913 (Bolzano: *Autobiografie).* Spis je jedním z nejzávažnějších a nejspolehlivějších pramenů ke studiu Bolzanova života v letech 1781 až 1831, i když v něm chybějí mnohé podstatné údaje o průběhu Bolzanova procesu, o nichž Bolzano psát nechtěl nebo nemohl, poněvadž mnohá fakta neznal.

Pro osvětlení pracovních podmínek, za nichž Bolzano konal tvůrčí vědeckou práci, uvádím z citovaného překladu některé výňatky. Bolzano vylíčiv, že jej nijak nemrzí nízká pense, která mu byla vyměřena, pokračuje:

»Jediné tedy, co mne ve stavu tomto nejvíce souží, je okolnost, že mám tak špatné vyhlídky, že nebudu moci nikdy z toho, co se domnívám, že jsem nalezl, vydati na světlo. Především schází mi dostatečný počet spolupracovníků, chtěl bych skoro říci dokonce osob, které by na předmětech mého zaměstnání jen takový podíl bráti mohly, mnoho-li je potřebí, abych s nimi mohl se o tom rozhovořit, a sdělením mých myšlének přivedl tyto teprve k jasnosti a určitosti. Ještě horší je, že neznám naprosto žádné cesty k vydání onoho dílu svých spisů, který je každopádně již tak zdařilý, že by mohl býti vydán. Co se předloží censuře pod mým jménem, tomu nejen že se odepře imprimatur, nýbrž rukopis sám se zavře, a opětovné prosby za vrácení mého majetku nebudou považovány za hodny odpovědi.« (l. c. pag. 89).

A přece ještě věří Bolzano ve změnu, když říká:

»Doufám, že když na příklad v několika letech budu chtít vydati spisy obsahu čistě matematického, nebude se vydání tomu klásti odpor. Leč že by mi dovolili vydati některé z knih mých, zabíhajících v obor náboženský, toho nedoufám se

z pochopitelných důvodů dožíti. Snad mohlo by se říci, že bych to, co zdejší censura nepropouští, bez těžkosti mohl tisknout v cizině, kdyby nebylo nařízení, že každý rakouský příslušník který chce něco v cizině vydávati, musí si nejdříve opatřiti dovolení zdejší censury« (l. c. pag. 90).

Stanovy KČSN obsahovaly ustanovení, že život i práce každého zemřelého člena má být zhodnocena ve zvláštním pojednání. Bolzano byl též autorem pojednání o životě a práci F. J. Gerstnera, vynikajícího matematika a geniálního polytechnika, s jehož jménem je spjato budování a organisace velké řady technických děl v Čechách a vývoj středních i vysokých škol technického směru v našich zemích. Na rok 1956 připadlo právě dvoustě výročí narození F. J. Gerstnera, který byl jedním z předních budovatelů pražského polytechnického ústavu, vzniklého roku 1806. Dne 3. listopadu 1956 bylo tomu právě sto padesát let, kdy svou činnost zahájil tento ústav, jehož pokračovatelem je naše České vysoké učení technické v Praze. Bolzanův obraz života F. J. Gerstnera je zároveň spolehlivým obrazem rozvoje vědy a techniky v našich zemích v letech 1770—1830. Z toho důvodu jsem zařadil obě výše uvedené Bolzanovy historiografické práce do tohoto článku, abych tak upozornil na dva prameny, na které naši literární historikové zapomínají. Vždyť Bolzano sám i F. J. Gerstner jsou typickými představiteli těch matematicko-přírodovědecky orientovaných osvícenců, kteří v Čechách při pěstování vědy nikdy nezapomínali na prospěch lidu.

Z dalších publikací Bolzanových uvádím tyto práce:

[8] *Dr B. Bolzano's Wissenschaftslehre. Versuch einer ausführlichen und grösstenteils neuen Darstellung der Logik mit steter Rücksicht auf deren bisherige Bearbeiter.* — Herausgegeben von mehreren seiner Freunde mit einer Vorrede des Dr J. G. A. Heinroth. — Seidel, Sulzbach 1837.

[9] *Bolzanos Wissenschaftslehre und Religionswissenschaft in einer beurteilenden Übersicht. Eine Schrift für alle, die dessen wichtigste Ansichten kennenzulernen wünschen.* — Seidel, Sulzbach 1841.

[10] *Über einige logische Fragen, angeregt durch Exners »Nominalismus und Realismus«.* — Abh. der k. b. G. der W., Kronberger, Praha 1841.

U Bolzana se neustále vzájemně prolínal zájem o studium logiky a matematiky. Již jeho první dvě práce z matematiky jsou zaměřeny k otázkám povahy logické a methodologické. V letech 1809—1812 se Bolzano zabýval intensivně studiem logiky a v letech 1820—1829 věnoval své veškeré síly sepsání své *Wissenschaftslehre.* Rukopis tohoto díla putoval potom po mnoha nakladatelstvích v Německu, než se dočkal svého otištění roku 1837, o což se přičinil obratný M. J. Fesl.

Toto významné Bolzanovo dílo z oboru logiky nevzbudilo zvláštní pozornost u současných vědeckých pracovníků a při objemnosti tohoto díla lze se právem domnívat, že sotva některý ze současných badatelů tehdy celé toto dílo prostudoval. Bolzanovy různé pokusy, k nimž patří i práce [9] jako stručný výklad jeho logiky, a také pokusy jeho přátel o vzbuzení pozornosti pro toto dílo, zůstaly bezvýsledné. A tak se stalo, že toto dílo, které bylo předzvěstí nové epochy ve vývoji logiky, zůstalo nepovšimnuto až do konce minulého století. V roce 1894 upozornil na ně teprve vídeňský filosof. K. Twardowski ve svém spise *Zur Lehre vom Inhalt der Vorstellungen* a v roce 1910 německý filosof Edmund Husserl, rodák z Prostějova, ve svém spise *Logische Untersuchungen.* Význam práce Husserlovy tkví právě asi jedině v tom, že upoutal pozornost vědecké veřejnosti na Bolzanovo dílo z oboru logiky. Na Bolzana upozornili též svými pracemi lo-

gikové maďarští, zejména Akos von Pauler ve svém spise *Versuch einer Theorie der Wahrheit* (Berlín—Lipsko 1929). Největší zásluhu o zhodnocení Bolzana jako jednoho z největších logiků 19. století mají však matematičtí logikové němečtí, a to zejména H. Scholz, W. Dubislaw a H. Hermes.

Bolzanova čtyřsvazková *Wissenschaftslehre*, kterou nově vydal W. Schulz v letech 1929—1931 v Lipsku, je krásným úvodem do studia logiky. Poněvadž při probírání jednotlivých themat se Bolzano vyrovnává s názory svých předchůdců — největší pozornost věnuje přitom Aristotelovi a Kantovi — je v tomto díle nahromaděno mnoho materiálu ke kritickému studiu historie logiky.

Z četných polemik s Kantovou logikou a noetikou uvádím zejména pro matematiky zajímavý výňatek, kterého použil též prof. K. Petr v předmluvě k Bolzanově *Functionenlehre* (pag. XI.—XII.):

»Jak je známo, tvrdil Kant, že je velmi důležitý rozdíl mezi důkazy, jichž používá matematik a filosof, a to v tom, že první z nich (matematické) „se provádějí z názoru na příslušný předmět", avšak druhé (filosofické) „se provádějí jen slovy (pojmy)". Jen proto chtěl nazývati ony demonstrativní, tyto pak akroamatické či diskursivní důkazy. Na str. 755 „Kritiky čistého rozumu" čteme dokonce, „že geometr svou methodou ve filosofii nepostavil by nic jiného než budovu z karet, filosof pak při užití své methody v oboru matematiky by jen žvanil". Jak škodlivý vliv měla taková tvrzení ve filosofii, zmínil jsem se již na jiném místě. Zde chci jen ještě poznamenati, že neméně škodila skutečně vědeckému vybudování matematiky. Neboť měli-li již dříve matematikové sklony odvolávati se při důkazu pouček tak často, jak to bylo možno, na to, o čem je poučoval pouhý pohled na obrazec, pak věřili od té doby (nejen v Německu, ale i ve Francii, Anglii, Nizozemsku a všude jinde tam, kde se něco o této Kantově nauce dověděli), že mají plné právo postupovati tímto způsobem. Nechci popírati užívání tohoto práva v knihách pro ty čtenáře, u nichž nelze předpokládati výcvik v myšlení a předběžné znalosti, chceme-li je vésti k poznání objektivního základu matematických pravd. Avšak tam, kde náš postup takovými ohledy není omezen a má dosáhnouti nejvyššího stupně vědeckosti, pokládám za nutné nečiniti žádné závěry z pouhého pohledu na obrazec z tak zvaného názoru, ať ryzího či jiného, zkrátka postupovati týmž způsobem jako při důkaze ryze filosofických pravd. Že se to mnohokrát nepodařilo a že většina těch, kteří chtěli dokazovati matematické pravdy způsobem filosofickým, vyslovila jen pouhý žvast, to nedokazuje, že by to bylo nemožné; zajisté však plyne z toho, co jsem řekl v § 79, 315 a na jiných místech o nicotnosti Kantovy nauky o času a o prostoru jako pouhých názorech a o zprostředkování synthetických soudů jimi, že od pokusu takové důkazy hledati nikdy se nesmí upustiti.«

Význam Bolzanovy *Wissenschaftslehre* netkví však jen v její opposici proti Kantově »Kritice čistého rozumu« a v tom, co již bylo výše naznačeno. Bolzanovy příspěvky k rozvoji logiky a ke vzniku matematické logiky jsou takové, že se ke studiu Bolzanova díla musí stále vracet každý, kdo se hlouběji zajímá o studium matematické logiky. K vysvětlení tohoto tvrzení bylo by však třeba samostatného obšírnějšího článku, a proto odkazuji zájemce na příslušné prameny v odborné literatuře, z níž uvádím: H. Scholz, *Geschichte der Logik* (Berlín 1931); W. Dubislaw, *Bolzano als Vorläufer mathematischer Logik* (Philosophisches Jahrbuch — *44* (1931); H. Scholz, *Vorlesungen über die Grundzüge der mathematischen Logik* (2 svazky, 2. vydání, Münster i. w. 1950 — 1951);

H. Hermes — H. Scholz, *Mathematische Logik* (Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, sv. I, 1., Lipsko 1952). Pro zajímavost uvedu však jeden fakt, který osvětluje průkopnickou práci a jasnozřivost logika Bernarda Bolzana, který musí být pokládán za objevitele a prvního theoretika sémantického pojmu konsekvence. Když totiž A. Tarski nezávisle na Bolzanovi precisoval pojem konsekvence v práci *Über den Begriff der logischen Folgerung (Actualités scientifiques et industrielles*, Paříž 1936), konstatoval H. Scholz, že tato formulace pojmu konsekvence se nachází již v Bolzanově *Wissenschaftslehre*.

Poslední dvě matematicko-přírodovědecké práce, které vyšly ještě za Bolzanova života, jsou tyto:

[11] *Versuch einer objektiven Begründung der Lehre von der Zusammensetzung der Kräfte.* — Abh. der k. b. G. der W. — Kromberger a Řivnáč, Praha 1842.

[12] *Versuch einer objektiven Begründung der Lehre von den drei Dimensionen des Raumes.* — Abh. der k. b. G. der W., Kromberger a Řivnáč, Praha 1843 až 1844.

Práce [11] jedná o problému, jímž se Bolzano zabýval již před čtyřiceti lety. V §§ 52 a 53 uvádí Bolzano funkci jisté vlastnosti, kterou konstruoval jeden z nejnadanějších žáků Bolzanových Antonín Slivka, o němž se později ještě zmíním. Je to jediná práce Bolzanova z oboru fysiky, která vyšla tiskem za jeho života. Bylo by užitečné, kdyby některý z našich fysiků nám podal rozbor a zhodnocení této práce [11], resp. i práce [16], abychom si učinili obraz o Bolzanovi fysikovi.

Práce [12] byla podle vlastních údajů Bolzanových vypracována již v roce 1815 a od té doby diskutována jen s nejbližšími přáteli, z nichž Bolzano opět uvádí výslovně Ant. Slivku. Bolzano pojednává v této práci o pojmu a vlastnostech času a o pojmu trojrozměrného prostoru. Zájemce ji najde též v publikaci [20].

Tak po smrti Bolzanově vyšly v minulém století péčí jeho přátel nebo ctitelů tyto práce spadající do oborů v tomto článku vytčených:

[13] *Was ist Philosophie?* — Von Bernard Bolzano. — Aus dessen handschriftlichem Nachlass. — Braumüller, Wien 1849.

[14] *Dr B. Bolzano's Paradoxien des Unendlichen.* — Herausgegeben aus dem schriftlichen Nachlasse des Verfassers von Dr Fr. Příhonský. — Reclam, Leipzig 1851.

[15] *Drei philosophische Abhandlungen und vier akademische Reden aus B. Bolzano's Nachlasse herausgegeben von Příhonský.* — Reclam, Leipzig 1851.

[16] *Versuch einer sehr einfachen Erklärung der Aberration des Lichtes.* — Hess, Praha 1854.

[17] *Logika v kratičkém výtahu pro soukromé vyučování útlé mládeže.* — Na jazyk český přeložila Emilie Schmutzerová. Praha 1883.

Oddaný žák a přítel Bolzanův M. J. Fesl postaral se již v roce 1849 o vydání spisku [13] z rukopisné pozůstalosti Bolzanovy. Druhý z jeho věrných přátel František Příhonský vydal pak o dva roky později spisy [14] a [15]. *Paradoxie nekonečna* vyšly znovu r. 1889 v Berlíně a v ruském překladu I. V. Slešinského v Oděse r. 1911; německý matematik Hans Hahn je vydal znovu s obšírnými poznámkami (Meiner, Lipsko 1920). Nedávno pak vyšly znovu též v anglickém překladě (*Paradoxies of the Infinite*, Londýn 1950). Tento spis je výsledkem Bolza-

nova přemýšlení o problémech nekonečna v matematice, jimiž se Bolzano hodně zabýval zejména v posledních třech letech svého života, diskutoval o nich s Fr. Příhonským a přednášel o nich v KČSN. Bolzano tu odkrývá podstatu četných paradoxií, která spočívá v nesprávné definici některého pojmu nebo v nesprávném logickém usuzování. Dospívá tu též k důležitému pojmu ekvivalence množin a k poznatku, že třídu nekonečných množin lze charakterisovat tím, že tyto jsou ekvivalentní svým vlastním podmnožinám. Bolzano se stává tak do jisté míry zakladatelem theorie množin, i když nedovedl nebo nemohl vytěžit z objevu pojmu ekvivalence množin takové výsledky, k nimž dospěl o čvrt století později budovatel theorie množin Georg Cantor.

Spisek [17] je příkladem jakési rukověti logiky, kterou si Bolzano napsal roku 1819, když tehdy a v letech po suspensi vyučoval soukromě logice. Překlad rukověti označené *Etwas aus der Logik* není nijak významným spisem ve srovnání s *Wissenschaftslehre*. Pozornému a zasvěcenému čtenáři však neujde, jak systematicky a samostatně je zpracováno vybrané učivo bez ohledu na současný způsob tradování logiky. Jestliže na příklad překladatelka vlídně koriguje Bolzana v těch místech, kde třídí soudy na obecné, částečné a jedinečné, poznámkou, že soudy jedinečné zahrnujeme dnes do třídy soudů obecných, pak si neuvědomuje dosah Bolzanova třídění. Zdá se, že Bolzano si byl dobře vědom jistých závažných rozdílů mezi oběma druhy soudů; matematicky vyjádřeno dovedl rozlišovat množinovou relaci »je elementem« od relace »je podmnožinou«. Teprve moderní logistika odkryla podstatný rozdíl ve významu obou relací v logice.

Po dokončení rukopisu *Wissenschaftslehre* rozhodl se Bolzano napsat obšírné dílo matematické. Podle údajů Bolzanova životopisce Ed. Wintra *Bolzano und sein Kreis* (Lipsko 1933), pracoval na tomto díle soustavně v letech 1830—1835. Ve svém dopise ze dne 16. dubna 1831 píše Bolzano M. J. Feslovi, že již rok pracuje na učebnici matematiky. O této práci se zmiňuje i v dalších dopisech přátelům a 5. dubna 1835 píše opět Feslovi, že se blíží dokončení první kniha, která má nést název *Die reine Zahlenlehre* a má se skládat ze dvou částí. Druhá kniha měla mít název podle tehdejších Bolzanových proposic *Die reine Grössenlehre*. Pak však Bolzano přerušil svou práci na tomto matematickém díle na pět let z důvodů, pro které lze nalézt zatím jen jisté domněnky. Teprve v polovině roku 1840 psal svým přátelům Feslovi a Příhonskému, že chce pokračovat v práci na matematickém díle a že bude potřebovati tři až čtyři léta k dokončení tohoto díla. Nepracoval však již na něm dlouho, neboť ve svém dopise ze dne 24. července 1842 píše Feslovi: *»Pokud se však týče většího díla o matematice (učebnice ve vlastním slova smyslu to nemůže nikdy býti), na němž jsem před deseti a více lety pracoval, mizí mi každým dnem naděje, že bych je sám mohl dokončiti; ba vlastně byla — je tomu už rok a den — takřka úplně zmařena. A toužím dychtivě po mladém učenci, který by se, pokud jsem ještě na živu, obeznámil pod mým vedením s mými pojmy a pak se podjal vypracování díla.«*

Bolzano věřil, že v jeho práci by mohl pokračovat především Antonín Slivka, jeden z jeho matematicky nejnadanějších žáků. Když ho však tento zklamal tím, že se raději věnoval hospodaření na svém statku, upínal značné naděje k jinému mladému matematiku Weyrovi (otci známých českých matematiků Emila a Eduarda Weyra) a nakonec k Robertu Zimmermannovi, který na Bolzanovu radu přešel od studia práv ke studiu matematiky. Jemu také odkázal Bolzano celou svou rukopisnou pozůstalost z oboru matematiky. Avšak ani ten nesplnil naděje, které

v něj Bolzano skládal. Zájem o matematické dílo Bolzanovo se poněkud rozvířil roku 1881 při vzpomínkách na sté výročí Bolzanova narození, zejména když innsbrucký matematik O. Stolz uveřejnil práci *B. Bolzano's Bedeutung in der Geschichte der Infinitesimalrechnung* (Math. Annal. XVIII, str. 560 a násl.). Podle zpráv M. Červinkové-Riegrové (vnučka Fr. Palackého, autorka Bolzanovy biografie) očekávala tehdy česká veřejnost od našich matematiků (F. J. Studnička a bratři Weyrové), že prozkoumají Bolzanovu matematickou rukopisnou pozůstalost, avšak opět marně. Roku 1882 daroval R. Zimmermann tyto rukopisy císařské akademii ve Vídni, která je pak předala o deset let později vídeňské dvorní knihovně (později Národní knihovně). Ač někteří matematikové nahlíželi do rukopisné pozůstalosti B. Bolzana, nebyla tato matematická pozůstalost nikým náležitě uspořádána ani systematicky prozkoumána.

Teprve když kolem roku 1920 nahlížel Dr M. Jašek, profesor na tehdejším státním dívčím reálném gymnasiu v Plzni, do rukopisné pozůstalosti Bolzanovy ve vídeňské Národní knihovně, upoutala jeho pozornost Bolzanova konstrukce spojité funkce, která v žádném vnitřním bodě svého definičního oboru nemá derivaci. Koncem roku 1921 oznámil to prof. K. Petrovi a na jeho výzvu přednášel pak o této funkci ve vědeckých společnostech a napsal o ní tři informativní zprávy, a to *Aus dem handschriftlichen Nachlass Bernard Bolzano's* (Sitzbericht der k. b. G. der W. 1920—1921), *Funkce Bolzanova* (Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, roč. LI (1922), str. 69 + 76), *O funkcích s nekonečným počtem oscilací v rukopisech Bernarda Bolzana* (Časopis pro pěst. matematiky a fysiky, roč. LIII, 1922, str. 102—110). Tento objev způsobil značný rozruch, který náš čtenář jistě pochopí, když připojím malou historickou poznámku.

Až do roku 1921 se soudilo, že první příklad spojité funkce, nemající v žádném bodě definičního oboru derivaci, podal vynikající německý matematik K. Weierstrass, který prý ve svých přednáškách již od roku 1861 uváděl příklad takové spojité funkce s touto paradoxní vlastností. Když roku 1875 P. du Bois - Reymond v *Journal für die reine und angewandte Mathematik* (79, 1875, str. 29—31) publikoval zprávu o Weierstrassově funkci, vyvolalo to přímo sensaci ve světové obci matematiků. Nyní se však ukázalo, že Bolzano konstruoval spojitou funkci s uvedenou vlastností asi o tři desítiletí dříve než K. Weierstrass, při čemž Bolzanova funkce byla podstatně jednodušší než Weierstrassova.

Jaškův objev měl za následek, že se naši vědečtí pracovníci začali zajímat o matematickou pozůstalost Bolzanovu. V roce 1923 byla zřízena zvláštní bolzanovská komise při KČSN, která si položila za úkol vydati tiskem ty části rukopisné pozůstalosti, které byly Bolzanem zpracovány již tak, aby mohly býti otištěny, postarat se o uspořádání Bolzanovy korespondence a vydati tiskem tu její část, která má širší vědecký nebo kulturní význam, resp. pečovati též o nové vydání některých Bolzanových spisů. Práce na tomto úkolu probíhala někdy dost pomalu, a to v některých případech z malicherných příčin, a tak došlo k vydání pěti svazků Spisů Bernarda Bolzana, z nichž tu uvádím tyto publikace:

[18] *Functionenlehre.* — Vydal a poznámkami opatřil prof. Dr Karel Rychlík; předmluvu napsal prof. Dr K. Petr. — Spisy Bernarda Bolzana, sv. 1, KČSN, Praha 1930.

[19] *Číselná theorie. — Zahlentheorie.* — Vydal a poznámkami opatřil prof. Dr Karel Rychlík. — Spisy B. Bolzana, sv. 2, KČSN, Praha 1931.

[20] *Geometrické práce — Mémoires géométriques.* — Vydal a poznámkami opatřil prof. Dr Jan Vojtěch. Spisy B. Bolzana, sv. 5, KČSN, Praha 1948.

Publikace [18] je pátou (a poslední) částí díla *Grössenlehre*, z níž první oddíl pojednává o theorii funkcí, druhý o diferenciálním počtu. Bolzano tu nepodává definici pojmu funkce (snad byla podána v některé předchozí části), avšak jeho pojetí funkce je přibližně takové, jaké nacházíme později u Dirichleta. Definuje tu též spojitost funkce v bodě a v § 10 uvádí i příklad funkce spojité v jediném bodě. Z obsahu § 13 lze dovodit, že si Bolzano uvědomoval potřebu pojmu stejnoměrnosti, i když sám tento pojem nedefinoval. V § 18 se Bolzano dopustil jisté chyby, jejíž důsledky se projevují i později. Avšak v §§ 19—30 jsou obsaženy důkazy základních vět o spojitých funkcích v tak dokonalé formě, že by mohly být převzaty do každé novodobé učebnice matematické analysy. Jednu z těchto vět dokázal Bolzano již v práci [4] z r. 1817, o čtyři léta dříve než Cauchy. Rovněž v §§ 49—50 pojednává Bolzano bezvadně o monotonních funkcích. V §§ 65, 70, 73 je sestrojeno několik příkladů funkcí, jejichž ohraničený definiční obor nelze rozdělit na konečný počet intervalů monotonie, a nejpěknější příklad takové funkce je podán v § 75. Bolzano tam dokazuje spojitost této funkce v přesvědčení, že posloupnost spojitých funkcí má vždy za limitu rovněž spojitou funkci; důkaz o spojitosti Bolzanovy funkce není tedy správný. Avšak tato nepřesnost je snadno vysvětlitelná, když uvážíme, že příslušná obecná věta o spojitosti funkce, která je limitou posloupnosti spojitých funkcí, byla dokázána teprve v letech 1847—1848. V druhém oddílu pojednává Bolzano o základech diferenciálního počtu a přes některé omyly se tu ukazuje jako průkopník, neboť ukazuje správně na základy i methody, jichž se má užít při budování tohoto oboru matematické analysy. V § 19 druhého oddílu je podán správný důkaz, že Bolzanova funkce uvedená v § 75 předchozího oddílu nemá derivaci v žádném bodě množiny všude husté. Brzy po oznámení Jaškově dokázali naši matematikové K. Rychlík *(Über eine Funktion aus Bolzanos handschriftlichem Nachlasse,* Sitzbericht der k. b. G. der W. 1921—1922) a V. Jarník (*O funkci Bolzanově,* Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, roč. LI — 1922, str. 248—264), že Bolzanova funkce nemá konečnou ani určitě nekonečnou derivaci v žádném vnitřním bodě svého definičního oboru. Tento stručný náznak obsahu publikace [18] si čtenář snadno doplní z pečlivých a obsažných poznámek, jimiž prof. K. Rychlík opatřil vydání *Functionenlehre*, a o celkové hodnotě tohoto významného díla Bolzanova se dobře poučí z kritického rozboru a hodnocení *Functionenlehre* v článku akademika V. Jarníka *Bolzanova »Funktionenlehre«* v Časopise pro pěstování matematiky a fysiky, roč. IX, 1931, str. 240—262.

V publikaci [19] je otištěn jiný fragment Bolzanova matematického díla, který Bolzano sám ve svém rukopise označuje *Verhältnis der Theilbarkeit unter den Zahlen.* Bolzano v něm pojednává o elementárních vlastnostech celých racionálních čísel a obsah celého spisu lze zhruba a stručně naznačit těmito hesly: dělitelnost, společný násobek a dělitel, Euklidův algoritmus, některé vlastnosti prvočísel, jednoznačnost rozkladu celého čísla v prvočinitele, největší společný dělitel, nejmenší společný násobek, Eulerova funkce, věta Lagrangeova, Fermatova a Wilsonova. Vydání je doplněno cennými kritickými poznámkami rázu věcného i historického.

Publikace [20] obsahuje geometrické práce Bolzanovy, které s kritickými poznámkami připravil prof. Dr Jan Vojtěch již v roce 1933; k jejich vydání však

došlo teprve o patnáct let později. Jsou tam zařazeny v tomto článku již uvedené práce [1], [12], [5], a za ně je pak zařazena práce *Über Haltung, Richtung, Krümmung und Schnörkelung bei Linien sowohl als Flächen*, kterou Bolzano napsal r. 1844. V této publikaci vyšla po prvé tiskem.

*

První část tohoto článku byla zakončena výňatkem ze *Vzpomínek* Karoliny Světlé na Bernarda Bolzana; významná česká spisovatelka tam se zaníceným obdivem projevuje úctu ušlechtilému člověku a odvážnému bojovníku za svobodu a lidská práva všech bídou trpících a vykořisťovaných, při čemž si však přece jen stěžuje, že zásluhy tohoto muže o probuzení a kulturní rozvoj českého národa nebyly do té doby náležitě oceněny. Jestliže se znovu zamyslíme nad slovy Karoliny Světlé, pak si musíme přiznat, že některé její výtky jsou dosud aktuální. Nemáme na příklad dosud žádnou původní českou monografii o životě a práci Bernarda Bolzana, která by byla zpracována podle pramenů nyní již dostupných. V pracích našich literárních historiků nacházíme pak dokonce závažné omyly nejen v datech o životě a díle B. Bolzana, nýbrž i v datech o vzniku KČSN; přitom zpravidla nenacházíme žádných zmínek o významu vědeckých prací matematicko-přírodovědecky orientovaných pracovníků KČSN, k nimž patřil i B. Bolzano, který je nejvýraznějším a nejkrásnějším představitelem českého osvícenství.

Jako matematik byl Bolzano zhodnocen v míře daleko větší, než to Karolina Světlá mohla vůbec tušit. I když je u nás poměrně málo známo, že Bolzano musí být dnes hodnocen jako jeden z největších logiků XIX. století, je zásluhou našich matematiků již hodně známo, že Bolzano patří k prvním vědeckým pracovníkům, kteří si na počátku minulého století uvědomovali nutnost revise základů matematiky, zejména v matematické analyse a geometrii, a že konal práci vskutku pionýrskou, když ukazoval, jakým způsobem se musí při tom postupovat. Přes tyto kladné výsledky se domnívám, že Bolzanovo dílo obsahuje pro historika matematiky ještě hodně cenného materiálu, kterého dosud nebylo využito. Přál bych si proto, aby se zvýšil zájem mladé generace našich vědeckých pracovníků o filosofické i matematické dílo Bolzanovo (filosofii a matematiku v díle Bolzanově nelze od sebe téměř oddělit), k čemuž mohou přispět účinnou podporou i některé naše vědecké instituce, zejména Československá akademie věd a Jednota československých matematiků a fysiků. A konečně bych si přál, aby profesor Karel Rychlík, který je znamenitým znalcem matematického díla Bolzanova, předal co nejvíce svých zkušeností těm, kteří by měli zájem o studium Bolzanova díla.

Jestliže tento informativní článek přispěje k podnícení zájmu mladých vědeckých pracovníků o Bolzanovu osobnost, pak tím jeho účel bude splněn.