Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

František Fabian

Theorie pravděpodobnosti a matematická statistika v Polsku

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 2 (1957), No. 2, 249--257

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/137287

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 1957

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://project.dml.cz

FRANT. FABIAN

THEORIE PRAVDĚPODOBNOSTI A MATEMATICKÁ STATISTIKA V POLSKU*)

V Polsku jsou dvě centra, zabývající se theorií pravděpodobnosti a matematickou statistikou, a to ve Vratislavi a Varšavě. Oba kolektivy mají dlouhou tradici, a u kolektivu ve Vratislavi možno přímo mluvit o škole theorie pravděpodobnosti, vedené prof. H. Steinhausem.

Stručně o celkovém zaměření práce:

Po theoretické stránce zabývají se ve Vratislavi především zkoumáním základních pojmů theorie pravděpodobnosti a matematické statistiky (a to zejména v souvislosti s methodou Bayesovou), a theorií her; dále pak theorií rozhodovacích funkcí, theorií stochastických procesů a theorií míry. Důraz kladou především na uvedené první dvě skupiny problémů. Po stránce aplikací rozřešili a řeší řadu problémů (pod vedením především prof. Steinhause a prof. Perkala) z antropologie (v tomto směru velmi úzce spolupracují s antropologickým ústavem PAN, kde prof. Wanke vypracoval originální statistickou metodu pro zhodnocení antropometrických měření) a hutnictví. V posledním zejména jde o odhady množství jednotlivých složek v rudách, o stanovení typu a rozsahu výběru pro tyto odhady atd. Řada prací byla provedena pro lesní průmysl a zemědělství (prof. Perkal); pracuje se na určení optimálního rozdělení velikostí pro kabáty a šaty v různých věkových intervalech pro průmysl textilní, na stanovení vztahů mezi výškou a vahou zejména u dětí, a byly stanoveny zajímavé statistické závěry (prof. Lukaszewicz) pro důkazní řízení (v medicině, soudnictví) při určování otcovství. Provádějí se pokusy stanovit určitý vhodný statistický ukazatel k definování pojmu „epidemie". Se strany právníků jsou pokusy řešit statistickými metodami některé problémy právní vědy. V celku menší pozornost je zde věnována aplikacím v průmyslu strojírenském.

Varšavská skupina klade v theoretickém bádání důraz zejména na theorii limitních zákonů (prof. Fisz), stochastické procesy a theorii informací (prof. Rajski). Je zajímavé poznamenat, že právě v poslední době byl zřízen seminář z theorie informací (prof. Nardzewski), určený pro matematiky nepracující přímo v theorii pravděpodobnosti. Výrazně je vidět zaměření aplikací tohoto centra: Aplikace ve strojírenství (zejména kontrola jakosti), a v národním hospodářství. První zaměření řídí prof. Oderfeld, druhé pak prof. Oskar Lange.

Nyní stručně pojednejme o výchově posluchačů a vědeckých pracovníků. Především konstatujme základní přednost obou skupin proti poměrům u nás: na seminářích, věnovaných theorii pravděpodobnosti a matematické statistice, určených pro vědecké a pedagogické pracovníky, anebo pro ně společně se studenty nejvyšších ročníků chodí pracovníci jak z Akademie, tak University, Techniky i Vysoké školy plánování a statistiky (ve Varšavě), ať už seminář pořádá kterákoliv z institucí. Semináře (i referáty na př. matematické obce) jsou vedeny pracovně, neformálně, a možno je rozdělit asi do tří skupin: Semináře, kde se přednášejí vlastní ucelené závěry, semináře, kde přednášející uvádějí věci nehotové a ukazují na možnosti řešení uvedené problematiky, a semináře, kde se referuje z domácí či zahraniční literatury. Všechny semináře a přednášky, a to

*) Poznatky, nabyté z měsíčního pobytu v Polsku v listopadu 1956.

jak ve Vaŕšavě, tak Vratislavi se vyznačují tím, že posluchači se nejen aktivně (a to velmi konstruktivně) zúčastní diskuse po úvodním referátu či přednášce, zejména poukazujíce na další problémy, ale zasahují do přednášky i během jejího průběhu, zejména na seminářích druhého a třetího typu. Skutečně vzorným typem seminářů jsou semináře prof. Steinhause a topologický seminář prof. Knastera ve Vratislavi. Avšak i ostatní semináře na př. prof. Oderfelda z kontroly jakosti a prof. Sadowského ze statistiky ve Varšavě jsou vzorně vedeny a vedou posluchače k samostatné práci. Co se týče výuky v theorii pravděpodobnosti a matematické statistiky na vysokých školách, pak ve Vratislavi jsou soustředěny přednášky na universitu, kde však theorie pravděpodobnosti a matematická statistika není samostatnou specialisací v našem smyslu; rovněž rozsah a počet přednášek z tohoto oboru je zatím užší než u nás. Kromě toho přednáší se ve Vratislavi kurs z matematické statistiky na některých přírodovědeckých fakultách.

Ve Varšavě je soustředěna výchova matematických statistiků va Vysokou školu plánování a statistiky, kde na směru statistiky vedle přednášek z theorie pravděpodobnosti a matematické statistiky je přednášen podrobný kurs kontroly jakosti, výběrové metody atd. Zavedena bude, jak se předběžně plánuje, přednáška z aplikací matematiky v národním hospodářství. Na matematické fakultě university je pak v nejvyšších ročnících směr matematické statistiky a theorie pravděpodobnosti ve formě některých speciálních přednášek z theorie pravděpodobnosti a matematické statistiky.

Nakonec ukažme aspoň stručně obsah jednoho semináře ve Vratislavi, a jednoho ve Varšavě, které pokládám za nejcharakterističtější v současné době pro dotyčnou školu. Na semináři prof. Steinhause ve Vratislavi referoval prof. Zubrzicki o své a Steinhausově práci (patrně bude podrobně publikována), týkající se problému pravděpodobnosti a věrohodnosti.

Mějme Poissonův proces, definovaný funkcí rozdělení

$$P_h(k) = \frac{(c \cdot h)^k}{k!} e^{-c \cdot h},$$

kde c je neznámý parametr. Uvedený výraz možno na př. interpretovat jako pravděpodobnost, že v časovém intervalu délky h přijmeme k signálů. Nechť $\varkappa$ je náhodná veličina, na př. počet signálů na intervalu délky 1. Hledáme pravděpodobnost

$$P(c < \alpha / \varkappa = \mathrm{k}). \quad 0 \leq c < \infty.$$

K výpočtu této pravděpodobnosti však potřebujeme apriorní rozdělení parametru c: $P(c < \alpha)$, které neznáme. Abychom mohli otázku zodpovědět, pomůžeme si jistým obratem. Položíme

$$P(c < \alpha / \varkappa = k) = P(\varkappa \geqq k / c = \alpha).$$

Výraz na pravé straně — interpretovaný jako pravděpodobnost — umíme určit; protože potom ale výraz na levé straně — při zachování znaménka rovnosti — ztratí původní smysl, budeme jej označovat jako věrohodnost. Odpověď v této formulaci označíme jako věrohodnou.

Položíme:

$$V(c < \alpha / \varkappa = k) \overset{\text{def}}{=} P(\varkappa \geqq k / c = \alpha).$$

Sarkadi (1953) odvodil pak toto tvrzení:

$$P_{\mathrm{BH}}(c < \alpha / \varkappa = k) = V(c < \alpha / \varkappa = k).$$

Výraz P_{BH} má smysl: „pravděpodobnost při Bayesově hypothese", t. j.

$$P^{(L)}(c < \alpha) = \frac{\alpha}{L}, \; 0 \leqq \alpha \leqq L.$$

Konečně položíme

$$\lim_{L \to \infty} P_{BH}^{(L)}(c < \alpha/\varkappa = k) \stackrel{\text{def}}{=} P_{BH}(c < \alpha/\varkappa = k) = V(c < \alpha/\varkappa = k).$$

Bylo konstatováno, že tvrzení Sarkadiho, že relace platí bez *BH*, je falešné; *BH* je v odvození skryta. Odvození bylo rovněž provedeno pro rozdělení hypergeometrické místo uvedeného rozdělení Poissonova.

Byla ukázána aplikace na kontrolu jakosti:

Mějme dva výrobní pásy. Předpokládejme, že rozdělení počtu vadných je na obou pásech Poissonovo, s parametry skutečné kvality c_I a c_{II} a že procesy jsou vzájemně nezávislé. Ptejme se, který pás poskytuje výrobky lepší kvality.

Nechť náhodná veličina (počet vadných) na pásu I. je ν,
na pásu II. je μ.

Potom se ptáme na

$$P\left(\frac{c_{II}}{c_I} > \alpha/\mu = m, \; \mu + \nu = m + n\right)$$

v t. zv. případě „klasickém", nebo

$$P\left(\frac{c_{II}}{c_I} > \alpha/\mu = m, \; \nu = n\right)$$

v t. zv. případě „sekvenčním".

Řešení úlohy tedy vyžaduje znalost apriorního rozdělení pro veličinu $\frac{c_{II}}{c_I}$; pokus možno dále zařídit na př. tak, aby $c_I = 1$ (na délce pásu nezáleží). Opět tedy položíme:

klasický případ: $V\left(\frac{c_{II}}{c_I} > \alpha/\mu = m, \mu + \nu = m + n\right) \stackrel{\text{def}}{=}$

$$\stackrel{\text{def}}{=} P\left(\mu \leqq m / \frac{c_{II}}{c_I} > \alpha, \mu + \nu = m + n\right),$$

sekvenční případ: $V\left(\frac{c_{II}}{c_I} > \alpha/\mu = m, \nu = n\right) \stackrel{\text{def}}{=}$

$$\stackrel{\text{def}}{=} P\left(\mu \leqq m / \frac{c_{II}}{c_I} > \alpha, \; \nu = n\right).$$

Pravděpodobnosti na pravých stranách možno získat bez předpokladu znalosti apriorních rozdělení.

Uvažujme 3 hypothesy, pro které byly případy řešeny:

$$H_0 \equiv P\left(\frac{c_{II}}{c_I} < \alpha\right) = \frac{\alpha}{1 + \alpha}, \quad 0 \leqq \alpha < \infty$$

$$\left(\text{je vidět, že } P\left(\frac{c_{II}}{c_I} < \alpha\right) = P\left(\frac{c_I}{c_{II}} < \alpha\right)\right),$$

$$H_1 \equiv \log\left(1 + \frac{c_{II}}{c_I}\right) \text{ má na } < 0, \infty) \text{ rektangulární rozdělení.}$$

Tento případ je nejzajímavější.

$$H_2 \equiv \frac{c_{II}}{c_I} \text{ má na } < 0, \infty \text{ rektangulární rozdělení.}$$

Potom se ukazuje, že platí tvrzení:

Klasický případ:

$$P_{BH}^{(j)}\left(\frac{c_{II}}{c_I} > \alpha / \mu = m, \mu + \nu = m + n\right) =$$

$$= V\left(\frac{c_{II}}{c_I} > \alpha / \mu = m, \mu + \nu = m + n + 1 - j\right)$$

pro $j = 0, 1, 2,$ a $n \geqq j$, j je číslo hypothesy.

Analogický vztah se určí pro případ sekvenční, odkud vyplyne vztah mezi případem klasickým a sekvenčním.

Naskýtá se ještě další otázka: Určit pravděpodobnost, že nejbližší vadný výrobek po určeném časovém okamžiku bude na pásu I. (II.). Označme

$$p = \frac{c_I}{c_I + c_{II}}, \qquad q = \frac{c_{II}}{c_I + c_{II}}.$$

Označíme-li τ_I a τ_{II} dobu než příjde zmetek na I., resp. II., bude

$$P(\tau_i < \alpha) = 1 - \exp(c_i\, \alpha) \qquad i = \text{I, II}.$$

Zřejmě platí

$$\left(\frac{c_{II}}{c_I} > \alpha\right) \equiv \left(\frac{q}{p} > \alpha\right).$$

Zkoumejme pak jev $(q > \beta)$, kde zřejmě $\beta = \dfrac{\alpha}{1 + \alpha}$. Tedy

$$V(q > \beta / \mu = m, \mu + \nu = m + n) \overset{\text{def}}{=} P(\mu \leqq m / q = \beta, \ \mu + \nu = m + n).$$

Hypothesy nabudou tvaru:

$H_0' \equiv q$, $p = 1 - q$ má rektangulární rozdělení na $< 0{,}1)$.

$H_1' \equiv \log \dfrac{1}{1 - q}$ má rektangulární rozdělení na $< 0, \infty)$.

$H_2' \equiv \dfrac{q}{\mathrm{p}}$ má rektangulární rozdělení na $< 0, \infty)$.

Analogicky jako shora dostaneme tvrzení (pro klasický případ):

$$P^{(j)}_{BH}(q > \beta / \mu = m, \mu + \nu = m + n) = V(q > \beta / \mu = m, \mu + \nu = m + n + 1 - j)$$

pro $j = 0, 1, 2$ a $n \geq j$, j je číslo hypothesy.

Poznámky: 1) Pro $j = 0$ byl případ v r. 1951 podrobně zkoumán prof. Oderfeldem.
2) Pro $j = 1$ se strany co do velikosti rozsahů kryjí.
3) Za apriorní rozdělení $P(q < \beta)$ možno volit rozdělení ve tvaru neúplné β-funkce, čímž dostaneme velmi obecný případ (Sarkadi).

Ve Varšavě, v matematickém ústavu PAN byl v letošním školním roce zaveden seminář z matematické statistiky, kde jsou probírány aplikace matematiky v národním hospodářství. Ukažme stručně obsah jednoho semináře, vedeného prof. Oskarem Langem.

Předpokládejme národní hospodářství rozdělené na n částí (sektorů, na př. hutnictví, živočišná výroba, atd.). Označme celkovou produkci v i-té části X_i; nechť x_{ij} je přechod produkce z i-té části do j-té; x_0 nechť je příděl pracovní síly, s_i pak zisk a x_i čistý produkt v i-té oblasti. Vše uvažujeme v peněžních jednotkách. Dostaneme matici přechodů produkce

$$\begin{array}{c|cccc|c}
X_0 & x_{01} & x_{02} & \dots & x_{0n} & x_0 \\
\hline
X_1 & x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} & x_1 \\
X_2 & x_{21} & x_{12} & \dots & x_{2n} & x_2 \\
\cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\
X_n & x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} & x_n \\
 & s_1 & s_2 & \dots & s_n &
\end{array}$$

Tedy:

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + x_i, \qquad i = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Jelikož prvky matice jsou v peněžních jednotkách, můžeme psát i

$$X_i = x_{0i} + \sum_{j=1}^{n} x_{ji} + s_i \qquad (\text{u Marxe: } v + c + n) \qquad i = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Odtud dostaneme

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} + x_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ji} + x_{0i} + s_i \qquad i = 1, 2, \dots, n,$$

čili:

$$\sum_{j \neq i} x_{ij} + x_i = \sum_{j \neq i} x_{ji} + x_{0i} + s_i, \qquad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

(Součet odlivů + čistý produkt = součet přílivů + hodnota pracovní síly + zisk, pro i-tou oblast.)

Analogický vztah možno zformulovat pro rozšířený reprodukční zákon. Jiný závěr možno psát:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_{0i} + \sum_{i=1}^{n} s_i$$

(celkový čistý národní důchod = součet platů + součet zisků).

Jestliže bychom uvažovali místo peněžních jednotek jednotky naturální (Q), dostaneme

$$\begin{array}{c|cccc|c}
Q_0 & q_{01} & q_{02} & \dots & q_{0n} & q_0 \\
\hline
Q_1 & q_{11} & q_{12} & \dots & q_{1n} & q_1 \\
Q_2 & q_{21} & q_{22} & \dots & q_{2n} & q_2 \\
\cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\
Q_n & q_{n1} & q_{n2} & \dots & q_{nn} & q_n
\end{array}$$

Tedy

$$Q_i = \sum_{j=1}^{n} q_{ij} + q_i, \qquad i = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Je zřejmé, že v tomto případě součty po sloupcích nemají smysl.

Další problematika se točí kolem závislosti mezi technickými podmínkami a výsledkem výroby. Zavádí se pojem t. zv. technických koeficientů. Položme

$$a_{ij} = \frac{q_{ij}}{Q_j}, \qquad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

(Na př.: je-li q_{ij} množství v tunách určitého uhlí potřebného na výrobu oceli, Q_j je množství oceli v tunách, bude a_{ij} množství uhlí (v tunách) na tunu oceli.)

Podobně

$$a_{0j} = \frac{q_{0j}}{Q_j},$$

bude na př. pracovní síla potřebná na vyprodukování jednotky výroby j. Dostaneme opět celou matici technických koeficientů.

$$\begin{pmatrix}
a_{01} & a_{02} & \dots & a_{0n} \\
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\
\cdot & \cdot & & \cdot \\
\cdot & \cdot & & \cdot \\
a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}
\end{pmatrix}.$$

Tyto koeficienty možno získat: α) statisticky z empirických dat výroby,
β) z norem.

Druhý způsob se pokládá za lepší; nemáme-li k disposici normy, užijeme statistického materiálu. Mají tedy a_{ij} smysl technických norem.

Dostaneme

$$Q_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} Q_j + q_i,$$

resp. pro pracovní sílu

$$Q_0 = \sum_{j=1}^{n} a_{0j} Q_j + q_0.$$

Odtud

$$q_i = Q_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} Q_j, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

což je n lineárních rovnic s koeficienty a_{ij}. Matice soustavy bude

$$\begin{pmatrix} 1-a_{11} & -a_{12} & \ldots & -a_{1n} \\ -a_{21} & 1-a_{22} & \ldots & -a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \ldots & 1-a_{nn} \end{pmatrix} = A$$

(neuznáme-li pojem „vnitřního obratu", bude $a_{ii} = 0$ pro všechna i; v některých oblastech však, na př. v zemědělství, je tento obrat velký).

V podstatě jde o $2n$ neznámých, kde n veličin je daných plánem (na př. Q_i) a druhých n je vázaných (na př. q_i). Máme tedy n stupňů volnosti, a ostatních n hodnot je dáno technickými podmínkami. Kdyby matice A měla řád $n - s$, byl by počet stupňů volnosti o s menší. Počet stupňů volnosti plánu vyplývá tedy z řádu matice technických koeficientů.

Řešením dostaneme na př.

$$Q_i = \frac{\sum_{j=1}^{n} A_{ij} q_j}{|A|} = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} q_j,$$

$$c_{ij} = \frac{\partial Q_i}{\partial q_j};.$$

Má tedy c_{ij} smysl ukazatele, jak zvýšit výrobu v i (na př. v uhlí), chceme-li zvýšit výrobu v j (na př. oceli) o jednotku. Pro pracovní sílu dostaneme

$$Q_0 = \sum_{j=1}^{n} a_{0j} \sum_{k=1}^{n} c_{jk} q_k + q_0 =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \Big[\sum_{j=1}^{n} a_{0j} c_{jk} \Big] q_k + q_0 =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} c_k q_k + q_0, \left(\sum_{j=1}^{n} a_{0j} c_{jk} = c_{0k} \right),$$

kde koeficienty c_k mají analogickou interpretaci, jako je tomu u koeficientů c_{ij}.

Další závěry získáme zavedením cen; nechť p_i je cena i-tého produktu. Bude:

$$X_i = p_i Q_i, \quad x_i = p_i q_i; \quad x_{ij} = p_i q_{ij}.$$

Vektor cen bude $(p_0, p_1, \ldots, p_n)$.

Dosadíce do shora uvedené rovnice pro hodnotu celkového produktu

$$X_i = x_{0i} + \sum_{j=1}^{n} x_{ji} + s_i,$$

dostaneme

$$p_i Q_i = p_0 q_{0i} + \sum_{j=1}^{n} p_j q_{ji} + \pi_i Q_i, \; i = 1, 2, \ldots, \text{n},$$

kde zisk na jednotku produkce v i-tém sektoru $\pi_i = \dfrac{s_i}{Q_i}$ nazveme stopou zisku. Dále lze psát

$$p_i Q_i = p_0 a_{0i} Q_i + \sum_{j=1}^{n} p_j a_{ji} Q_i + \pi_i Q_i, \; Q_i \neq 0,$$

odtud

$$p_i = p_0 a_{01} + \sum_{j=1}^{n} p_j a_{ji} + \pi_i, \; i = 1, 2, \ldots, n,$$

kde neznámými mohou být ceny a stopy zisku, t. j. $2n + 1$ neznámých

$$(p_0, p_1, \ldots, p_n; \pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n).$$

Z poslední relace vyplývá na př. zajímavý závěr, že platy, ceny a stopy zisku jsou závislé pouze na technických podmínkách, a jejich vazba je nezávislá na Q_i.

Opět dostaneme

$$(1 - a_{ii}) p_i - \sum_{j \neq i} a_{ji} p_j - a_{0i} p_0 = \pi_i, \; i, j = 1, 2, \ldots, n,$$

a tedy matice bude

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1-a_{11} & -a_{21} & \ldots & -a_{n1} & -a_{01} \\ -a_{12} & 1-a_{22} & \ldots & -a_{n2} & -a_{02} \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ -a_{1n} & -a_{2n} & \ldots & 1-a_{nn} & a_{0n} \end{array} \right).$$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}_{A'}$$

Další rozbor pak závisí na matici A'. Jsou-li na př. dále dány stopy zisku, zbude $n + 1$ neznámých; systém má pak $n + 1$ stupňů volnosti. Jsou-li dány ceny a platy, jsou stopy zisku dány technickými podmínkami. Počet stupňů volnosti se snižuje s řádem matice.

Matematický vztah mezi maticemi A a A' je zřejmý; odtud možno vyvodit další závěry.

Zaveďme dále koeficient $a_{ij}' = \dfrac{x_{ij}}{X_j}$. Bude tedy

$$a_{ij}' = \frac{p_i}{p_j}\, a_{ij}.$$

Tento koeficient udává, kolik peněžních jednotek nutno vydat na sektor i, aby se vyrobila peněžní jednotka produkce v sektoru j. Analogicky jako shora možno opět získat jistou matici těchto koeficientů (nazvěme je na př. materiálních nákladů) a zkoumat její vlastnosti.

Nechť $X_l = X_j + X_k$ (t. j. v peněžních jednotkách) a

$$x_{il} = x_{ij} + x_{ik},$$

bude

$$a_{il}' = \frac{x_{il}}{X_l} = \frac{x_{ij} + x_{ik}}{X_j + X_k} = \frac{a_{ij}' X_j + a_{ik}' X_k}{X_j + X_k}$$

a tedy celkový koeficient je roven váženému průměru koeficientů složek.

I zde po přednášce, kterou vyslechla velká řada jak matematiků, tak statistiků, ekonomů a plánovačů, se rozvinula široká diskuse.

Především bylo konstatováno, že v důsledku vyřčeného má plán omezený počet stupňů volnosti. Z toho tedy pro praxi plyne, že „plánuje-li" někdo všechny faktory bez znalosti (t. j. matematické) vázanosti jednotlivých faktorů, jako by všechny byly nezávislé, má to za důsledek, že dojde k řadě malých případně dalekosáhlých disproporcí.

Množství práce potřebné na výrobu jednotky je vyznačeno technickými koeficienty. Jestliže pak ceny jsou přesně množstvím práce vložené do výroby a vyjádřené v penězích, pak další vztahy jsou věcí pouze technických podmínek.

Byla diskutována otázka rozbití původního systému na m nezávislých podsystémů, (t. j. jistá $a_{ij} = 0$, neb aspoň $a_{ij} \doteq 0$), což by se projevilo i ve vlastnostech uvedených matic, pak by plán bylo možno rozdělit na m dílčích plánů nezávislých.

Poznámka. Kritické připomínky s ekonomického hlediska k právě uvedené matematické metodě v národním hospodářství viz v článku T. Rjabuškin, *Balansovyje postrojenija v buržuaznoj statistike*, Vestnik statistiky, č. 6, 1946. K článku se v příštím čísle ještě vrátíme.