H. F. Bohnenblust

Teorie her

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 6 (1961), No. 2, 73--93

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/137270`

TEORIE HER[1])

H. F. Bohnenblust

Překlad do ruštiny (a tedy také do češtiny) je opatřen vysvětlivkami a doplňky, jež jsou zařazeny do textu nebo uváděny pod čarou. Doplňky v textu jsou vyznačeny lomenými závorkami.

Článek předpokládá u čtenáře základní znalosti z matematické analýzy a z teorie pravděpodobnosti. Stručný soupis definic a vzorců z teorie pravděpodobnosti souvisících s textem článku je uveden v dodatku.

1. ÚVOD

Teorie her došla užití v nejrůznějších oblastech. Přesto je v podstatě *teorií plánování.*

[Termínu „plánování" je tu použito v nejširším smyslu. Jde o plánování za účelem dosažení jistého výsledku za podmínek, kdy tento výsledek nezávisí jen na činiteli, jenž má zájem na jeho dosažení, nýbrž i na působení jiných činitelů, jejichž zájmy mohou být odlišné, ba i protichůdné zájmu prvého činitele.]

Teorie her se zabývá studiem optimálního (nejvýhodnějšího) způsobu jednání. Předpokládá se přitom, že všechny výchozí podmínky jsou jasně formulovány. Zejména se předpokládá, že jsou známa možná jednání, jejich důsledky a cíl, k němuž každý účastník hry směřuje. Teorie her se snaží, vycházejíc z těchto výchozích údajů, objektivně analyzovat situace, které vznikají ze střetnutí zájmů účastníků hry (dále *„hráčů" — J. V.*) Přihlíží k tomu, že v okamžiku, kdy je třeba se rozhodovat pro jistý způsob jednání, nemusí být znalosti o předcházejícím a budoucím jednání hráčů úplné. Konečnou úlohou teorie her je určit optimální způsob jednání každého z hráčů a odhadnout zisk, s nímž každý hráč může počítat.

Teorie her není dnes ještě natolik vypracována, aby byla schopna řešit tuto konečnou úlohu obecně. Obtíže jsou zásadní i technické povahy. Dobře propracovaný je případ dvou hráčů se zájmy přímo protichůdnými. Složitější situace se zkoumají buď přímo, nebo — pokud to je možné — tak, že se několik hráčů spojuje v „koalici" a úloha se tak převádí na úlohu hry se dvěma protivníky.

Teorie her dochází uplatnění v operačním výzkumu, ve strategickém plánování a v úlohách taktického charakteru. Důležitou úlohu má teorie her v ekonometrii, zvlášť těsně je spjata s teorií lineárního programování. Teorie her je konečně přímo (svými výsledky) nebo nepřímo (svými metodami) spjata s jinými matematickými obory, zejména s matematickou statistikou[2]).

Hry takového druhu jako šachy, poker, bridge ap. jsou neobyčejně vhodné pro studium teorie her, alespoň ze zásadního hlediska. Pro výzkum jsou však technicky dosti složité.

---

[1]) Přeloženo z ruského *Теория игр*, Matěmatičeskoje prosveščenije, *4* (1959). Originál: E. H. Frederic Bohnenblust, *The Theory of Games.* Článek vyšel ve sborníku *Modern Mathematics for the Engineer*, Edited by E. F. Beckenbach, New York, Toronto, London, 1956. Bohnenblustovu stať *Teorie her* přeložil do ruštiny (s poznámkami a doplňky) Ю. В. ГЕРОНИМУС pod redakcí В. Б. ОРЛОВ-А. Ruský překlad citovaného sborníku vydalo Izd. inostrannoj litěratury v r. 1959. *Pozn. překl.*

[2]) Viz o tom v citovaném již sborníku *Modern Mathematics for the Engineer.*

Hra má svá pravidla (tahy různými figurami ve hře v šachy, různá pravidla karetních her ap.), jež také určují výsledný zisk (výhru). Je přirozené předpokládat, že každý hráč se snaží dosáhnout pro sebe maximálního zisku ze hry.

Pascalův pokus studovat hry založené na ryzí náhodě byl jedním z impulsů k vypracování teorie pravděpodobnosti. V takových hrách není žádný tah (v nejobecnějším smyslu, tah na šachovnici, vrh kostkou, vynesení karty atd. *J. V.*) hráče výsledkem jeho volby, nýbrž náhodným aktem, jevem, který nastává s určitou pravděpodobností. Analýza ryze náhodné hry je založena na pojmu střední hodnoty[3]). Jsou-li p_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ pravděpodobnosti n jevů, z nichž jeden určitě nastane, a jsou-li a_i příslušné výhry, je $a = \sum_{i=1}^{n} p_i a_i$ tzv. střední hodnota výhry. Střední hodnota je limitou průměrných výher při postupném opakování hry.[4]) Může sloužit za dobrý odhad sázky před hrou.

Náhodné tahy se v teorii her nevylučují. Mají v ní zvláštní úlohu a pojmy, jako je pojem střední hodnoty, jsou v teorii her pojmy základními. Ryze náhodné hry nejsou však zvlášť zajímavé. Hráči v nich nemají vliv na průběh hry a jejich soupeření se v jejich jednáních nijak neprojevuje.

Začátkem třicátých let tohoto století se začal obecnými otázkami teorie her zabývat J. v. NEUMANN. Ve své fundamentální práci položil základy této teorie a později — ve spolupráci s O. MORGENSTERNEM — napsal obšírné dílo,[5]) v němž přišel s argumenty svědčícími o důležitosti teorie her pro ekonomii. V posledních desítiletích byly tyto otázky široce studovány. Neumannovy výsledky se ukázaly použitelnými na širokou třídu jevů. Ukázalo se přitom, že je také možno použít teorie her v různých speciálních úlohách, a tak se objevily zajímavé souvislosti teorie her s jinými oblastmi matematiky. Byly také propracovány efektivnější metody pro řešení úloh z teorie her.[6])

2. FORMULACE ÚLOHY

Jako jednoduchý model situace charakteristické pro teorii her se nabízí tato hra (se dvěma hráči, kteří mají jasně protichůdné zájmy):

Mysleme si obdélník (nebo čtverec), rozdělený příčkami rovnoběžnými s jeho stranami na čtverečky. V každém čtverečku nechť je vepsáno číslo. Jeden hráč volí řádky, druhý sloupce. Výsledkem nechť je číslo, které se nachází ve čtverečku, v němž se křižují zvolený řádek a zvolený sloupec. Nechť žádný z hráčů neví nic o tom, jak volil jeho soupeř. Předpokládejme, že cílem prvního hráče je dosáhnout co možná největšího čísla, cílem druhého dosáhnout co možná nejmenšího čísla.

[Na první pohled se může tato „hra“ zdát celkem nezajímavá a dosti umělá. Na takové schéma lze však převést celou třídu obsažných teoretických

---

[3]) V ruském originálu *математическое ожидание* (matematická naděje). Viz také dodatek. *J. V.*

[4]) Viz dodatek.

[5]) J. VON NEUMANN and O. MORGENSTERN, *Theory of Games and Economical Behavior*, 2. vyd., New York, 1947.

[6]) Viz např. D. BLACKWELL and M. A. GIRSCHIK, *Theory of Games and Statistical Decisions*, New York 1954, rusky: Д. БЛЕКУЭЛ и М. А. ГИРШИК, *Теория игр и статистических решений*; H. W. KUHN, *Lectures of the Theory of Games*, New York 1950; J. MC. DONALD, *Strategy of Poker, Business and War*, New York 1950; J. C. C. MC KINSEY, *Introduction to the Theory of Games*, New York 1952; J. D. WILLIAMS, *The Complet Strategist*, New York 1954.

i praktických úloh vztahujících se k situacím, kdy výsledek soupeření dvou protivníků lze číselně ohodnotit. Jde-li o hru v pravém smyslu tohoto slova, v níž hráči sázejí, bere se za toto číselné ohodnocení výhra hráče (prohra je totéž co záporná výhra). Ve vojenství se může výsledek boje dvou protivníků ohodnotit pravděpodobností zásahu chráněného cíle, průměrnými relativními výdaji na zničení vojenského objektu, hodnotou objektu samého ap.

V nejjednodušším případě se předpokládá, že každý ze soupeřů disponuje jistou konečnou množinou „strategií", z nichž může kteroukoli zvolit. Termín *strategie* označuje velmi široký pojem. V teorii her se ho používá pro označení nejrozmanitějších schémat jednání hráčů. Někdy je účelné brát strategii jako systém tahů a jednání, někdy jako soubor libovolných parametrů, jimiž hráči disponují, někdy značí termín strategie ještě abstraktnější prvky. Čtenář si bude moci tento pojem ujasnit v dalších příkladech. Důležité je, že v dalším stadiu hry volba strategie — ze strany *kteréhokoli* hráče — *jednoznačně* určuje výsledek hry.

Výsledek zápasu dvou soupeřů závisí přirozeně na jejich volbě strategie. Očíslujme strategie prvního hráče (soupeře) čísly $1, 2, \ldots, m$, strategie druhého hráče čísly $1, 2, \ldots, n$. Číselné ohodnocení výsledku hry, v níž první hráč zvolil i-tou ze svých strategií, druhý hráč j-tou ze svých strategií, označme f_{ij}. Čísla f_{ij} lze zřejmě sestavit do obdélníkového schématu s m řádky a n sloupci. Číslo f_{ij} bude tam, kde se křižuje i-tý řádek s j-tým sloupcem tohoto schématu. Kritérium reprezentované číslem f_{ij} se volí tak, aby větší f_{ij} odpovídalo lépe zájmu prvního hráče; obráceně tedy — čím menší f_{ij}, tím lépe pro druhého hráče. Právě proto se snaží v naší hře první hráč o co možná největší, druhý o co možná nejmenší hodnotu čísla f_{ij}.]

Základní otázkou je, jakými principy se má každý z hráčů řídit při volbě svých strategií a jaký lze očekávat výsledek.

Z toho, co jsme řekli, vystupuje důležitá zvláštnost teorie her, která omezuje její aplikabilitu. Předpokládá se totiž, že zájem hráče lze měřit pomocí *čísla*. Navíc uveďme — trochu předbíhajíce — že k měření zájmu hráčů lze použít pojmu střední hodnoty, což vyplývá z teorie her (podrobněji o tom promluvíme dále v odst. 4 a 5).

Náš nejjednodušší případ má dvě charakteristiky: jednak každý z hráčů se *jednoznačně* rozhodne, aniž cokoli ví o volbě rozhodnutí svého protivníka, jednak je počet přípustných operací *konečný* (součin počtu řádků s počtem sloupců výše uvedeného schématu).

První z uvedených charakteristik je jen zdánlivým zjednodušením, neboť i složitější situace lze na tento případ převést. Přesný popis takových situací je dosti obsáhlý (ilustruje jej poslední příklad v odst. 10 a také doplňující poznámky v tomto odstavci). Druhá charakteristika je podstatnější. Kdyby počet přípustných operací byl nekonečný, vzniknou další obtíže, jež někdy mohou být kritické. Jako příklad hry s nekonečně mnoha přípustnými operacemi uveďme toto přímé zobecnění výše popsaného modelu:

Budiž dána funkce f dvou proměnných x, y, $0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq y \leqq 1$. První hráč nechť volí hodnoty proměnné x, druhý hodnoty proměnné y. Předpokládejme, že první hráč se snaží o maximalizaci hodnoty funkce f, druhý o její minimalizaci.[7])

---

[7]) Charakter proměnných lze různě měnit. Za proměnnou x např. lze volit body roviny z jisté oblasti, tj. místo nezávisle proměnné x brát dvojici proměnných x_1, x_2, vyhovujících jistým předpisům.

[Naprosto zde nejde ze strany hráčů jen o vyhledání maxima nebo minima funkce f v intervalu $0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq y \leqq 1$. Zvláštnost situace vznikající v teorii her záleží v tom, že první hráč sleduje zvětšování funkce f, při čemž však disponuje jen jednou proměnnou x a ví, že jeho soupeř, disponující jen proměnnou y, sleduje protichůdný cíl. V analogické situaci je druhý hráč.]

Připustíme-li jen $x = 1, 2, \ldots, m$; $y = 1, 2, \ldots, n$, a položíme-li $f(x, y) = f_{xy}$, dostaneme naše původní schéma.

Metody a základní výsledky teorie her vyložíme pro obecný případ, kdy hra je úplně určena definicí funkce f proměnných x, y a předpisem pro obor nezávislých proměnných x, y.

Ještě obecnější případ, kdy se hry účastní více než dva hráči, nebo kdy zájmy hráčů nejsou přímo protichůdné, není dnes ještě plně prostudován. Model takové hry vypadá takto: Jednání všech partnerů charakterizují funkce $f_1, f_2, \ldots, f_i$ argumentů $x_1, x_2, \ldots, x_i$; každý hráč se snaží dosáhnout zvětšení hodnot „své funkce".

My se tedy budeme zabývat zvláštním případem tohoto modelu, kdy $f_1 = 2$ (dva hráči) a kdy (vzhl. k přímo protichůdným zájmům hráčů) $f_2(x_1, x_2) = - f_1(x_1, x_2)$, neboli $f_1(x_1, x_2) + f_2(x_1, x_2) = 0$. Tento zvláštní případ se obvykle nazývá *hra ve dvou s nulovým součtem.*

3. OPTIMÁLNÍ RYZÍ STRATEGIE

Jaké strategie by měli hráči volit a jaký výsledek lze očekávat? V teorii her se uvažuje toto schéma, odpovídající našim představám o rozumném postupu:

Mysleme si, že jde o hru ve dvou s nulovým součtem, popsanou funkcí f dvou proměnných x a y, a předpokládejme, že x může nabývat jen celočíselných hodnot $1, 2, \ldots, m$, y jen celočíselných hodnot $1, 2, \ldots, n$, tedy $1 \leqq x \leqq m$, $1 \leqq y \leqq n$.[8])

Označíme $\min\limits_y f(x, y)$ nejmenší hodnotu funkce f, zvolil-li první hráč hodnotu proměnné x a může-li y nabýt libovolné z hodnot $1, 2, \ldots, n$. Je tedy $\min\limits_y f(x, y)$ nejmenší číslo z x-té řádky našeho obdélníkového schématu. Toto číslo závisí jen na x. Necháme-li nyní x proběhnout všechny hodnoty $1, 2, \ldots, m$, můžeme určit číslo $v_1 = \max\limits_x (\min\limits_y f(x, y))$. Nechť x_0 je hodnota, pro níž se maximum v_1 realisuje, tedy $v_1 = \min\limits_y f(x_0, y)$. Pak nezávisle na y je $v_1 \leqq f(x_0, y)$.

Tuto skutečnost lze takto interpretovat: První hráč může zvolit takovou strategii (tj. zvolit $x = x_0$), aby hodnota funkce f *nebyla menší* než v_1, ať protihráč podnikne cokoli. První hráč může o tomto svém záměru (zvolit x_0) soupeře dokonce informovat, a může být při tom jist, že $f(x, y)$ nebude v žádném případě menší než v_1.

Analogicky dostaneme, vyjdeme-li s pozice druhého hráče, číslo $v_2 = \min\limits_y (\max\limits_x f(x, y))$. Druhý hráč tedy disponuje strategií, v níž funkční hodnota $f(x, y)$ nemůže přesáhnout číslo v_2. Je nyní $v_1 \leqq v_2$.

---

[8]) Druhá funkce g je určena vztahem $g(x, y) = - f(x, y)$.

[Existují totiž čísla x_0, y_0 taková, že $v_1 = \min_y f(x_0, y)$ a $v_2 = \max_x f(x, y_0)$. Potom však $v_1 = \min_y f(x_0, y) \leqq f(x_0, y_0) \leqq \max_x f(x, y_0) = v_2$, tedy $v_1 \leqq v_2$. Z $v_1 = v_2$ plyne $v_1 = v_2 = f(x_0, y_0)$.]

Lze uvést příklady pro $v_1 = v_2$ i pro $v_1 < v_2$.

[V tabulce 1 je $m = 3$, $n = 4$. Z tabulky přečteme $\min_y f(1, y) = -2$, $\min_y f(2, y) = 5$, $\min_y f(3, y) = -2$, tedy $v_1 = \max_x (\min_y f(x, y)) = 5$. Analogicky $\max_x f(x, 1) = 10$, $\max_x f(x, 2) = 5$, $\max_x f(x, 3) = 6$, $\max_x f(x, 4) = 7$, tedy $v_2 = \min_y (\max_x f(x, y)) = 5$, tedy $v_1 = v_2 = 5 = f(2, 2)$ $(x_0 = y_0 = 2)$.

Tabulka 1

$x \diagdown y$	1	2	3	4
1	-2	4	-1	6
2	10	5	6	7
3	-1	2	0	-2

Tabulka 2

$x \diagdown y$	1	2
1	2	1
2	-1	3

Ve hře s tabulkou 2 najdeme analogicky $v_1 = 1$, $v_2 = 2$, tedy $v_1 < v_2$.

Snadno nahlédneme, že pro $v_1 = v_2 = f(x_i, y_j)$ je $f(x_i, y_j)$ zároveň nejmenším číslem v i-tém řádku a největším číslem v j-tém sloupci schématu hry.]

Různost případů $v_1 = v_2$ a $v_1 < v_2$ je podstatná. Při $v_1 = v_2$ je věc jednoduchá. První hráč disponuje strategií, která mu zabezpečuje alespoň $v_1 = v_2$ a hráč kromě toho ví, že soupeř mu může zabránit dosáhnout větší hodnoty $f(x, y)$. Analogická je situace pro druhého hráče. Případ $v_1 = v_2$ je tedy jakýmsi kompromisem. Strategie x_0 resp. y_0 je pro prvního resp. pro druhého hráče optimální.

Zdůrazněme, že kompromisní situace $v_1 = v_2$ není nijak výsledkem dohody obou hráčů. Oba postupují nezávisle a bez obav, že protihráč může nějak využít znalosti jejich záměrů.

V případě $v_1 < v_2$ je mezera.

[Podívejme se znovu na tabulku 2. Volbou $x_0 = 1$ si první hráč zajistí nejméně $f(x, y) = 1$ (tj. $f(1, 2)$). Je však toto rozhodnutí nejlepší? Kdyby soupeř zvolil $y_0 = 2$, bylo by lepší zvolit $x = 2$. Je však přirozené předpokládat, že soupeř může tento postup předvídat a zvolí proto $y = 1$, což sníží hodnotu funkce f na -1 (pro $x = 2$). Udělá to však soupeř skutečně? Vždyť při volbě $y = 1$ vede volba $x = 1$ k hodnotě $f(x, y)$ pro něho nepříznivé (tj. k hodnotě 2) atd.]

Otázka nejlepší strategie při hře ve dvou s nulovým součtem při $v_1 < v_2$ je zde fundamentální. Řešení není zrovna na bíledni; vyžaduje nového pojmu — tzv. *smíšené strategie*. Strategie, které jsme dosud uvažovali a jež se redukují na volbu jisté pevné hodnoty x (nebo y), budeme nazývat *ryzí strategie*.

Příklad na smíšenou strategii ukážeme v odst. 4, obecně o tomto pojmu promluvíme v odst. 5.

Proměnné x a y mohly zatím nabývat jen konečného počtu hodnot, tj. přípustných tahů ve hře bylo jen konečně mnoho. Jestliže těchto hodnot je nekonečně mnoho, nemusí funkce charakterizující hru nabývat maxima a minima. Pak je nutno pracovat se supremem a infimem, což je hlavní příčinou obtíží, jež tu pak vznikají.

4. PŘÍKLAD Z VOJENSKO-STRATEGICKÉHO PLÁNOVÁNÍ

Písmenem x označme n-tici proměnných $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, vázaných podmínkami $x_i \geqq 0$, $\sum_{i=1}^{n} x_i = a$, písmenem y n-tici proměnných $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, vázaných podmínkami $y_j \geqq 0$, $\sum_{j=1}^{n} y_j = d$. Čísla a a d jsou pevná a předpokládáme $d \leqq a$. Definujme funkci proměnných x a y formulí $\sum_{i=1}^{n} k_i \max (x_i - y_i;\ 0)$, $k_i > 0$, $k_i \geqq k_{i-1}$[9].)

Tento příklad lze interpretovat jako ekonomickou nebo vojensko-strategickou úlohu. Popisuje podstatné rysy útoku a obrany. Číslo a je úhrnná síla útočníka, číslo d úhrnná síla obránce. Síly se vyjadřují v nějaké vhodné soustavě jednotek, zvolené tak, že jedna jednotka síly jedné z obou stran neutralizuje právě jednu jednotku síly druhé strany. Bojuje se o n cílů, jejichž důležitost nebo zranitelnost se měří konstantami k_i, i $= 1, 2, \ldots, n$. Předpoklad $k_i \geqq k_{i-1}$ zřejmě není omezením obecnosti. Obě strany jsou před úlohou, *jak rozdělit své síly na jednotlivé cíle*. Čísla x_i, resp. y_i, jsou části úhrnných sil určených pro útok na i-tý cíl, resp. na jeho obranu. Číslo $\max (x_i - y_i;\ 0)$ určuje část síly x_i, schopnou „proniknout" obranou i-tého cíle. Člen $k_i \max (x_i - y_i;\ 0)$ má v našem příkladě změřit úspěch útoku na i-tý cíl. (Nebudeme zde rozebírat otázku, do jaké míry náš popis odpovídá reálným situacím. Podle okolností se mohou ukázat vhodnějšími i jiné funkce, než je naše.)

Probereme pro ilustraci tento konkrétní numerický příklad:

Nechť $n = 3$, $a = 16$, $d = 12$ (útok je silnější než obrana — *J. V.*), $k_1 = 6$, $k_2 = 2$, $k_3 = 1$. Stanovme $v_2 = \min_y (\max_x f(x, y))$. Jednoduchou úvahou zjistíme, že při fixovaném obranném systému (y_1, y_2, y_3) bude útok nejúčinnější, bude-li úhrnná síla a celá zasazena proti jednomu cíli.[10]). Je tedy $\max f(x,y)$

[9]) O. Gross, *Targets of Differing Vulnerability with Attack Stronger than Defense* (Různě zranitelné cíle — útok silnější než obrana), Research Memorandum 359, The RAND Corporation, Santa Monica, California, 1950. Označení konstant a a d podle anglického *attack* a *defense*.

[10]) To lze nahlédnout např. takto:
Mysleme si $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ pevně zvoleno. Vzhledem k podmínkám $x_i \geqq 0$, $y_i \geqq 0$, $\sum_{i=1}^{n} x_i = a \geqq d = \sum_{i=1}^{n} y_i$ lze jistě zvolit $x = (x_{,1} x_2, \ldots, x_n)$ tak, že $x_i - y_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Pak $\Sigma \max (x_i - y_i;\ 0) = \Sigma(x_i - y_i) = a - d = \varDelta$. Změníme-li nyní soustavu $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tak, že např. bude $x_k - y_k \leqq 0$, bude $\Sigma \max (x_i - y_i;\ 0) = (a - d) - (x_k - y_k) = \varDelta - (x_k - y_k) \geqq \varDelta$, tedy $\Sigma\max (x_i - y_i;\ 0)$ se jistě nezmenšilo. Zvolíme-li $x_k = 0$, bude zřejmě $\Sigma\max (x_i - y_i; 0) = a - (d - y_k) = \varDelta + y_k$, a je to zřejmě největší hodnota této sumy, kterou lze dostat z k-tého členu. Z toho je ihned zřejmé, že největší hodnotu sumy $\Sigma\max (x_i - y_i;\ 0)$ dostaneme, zvolíme-li co nejvíce čísel x_i rovných nule. Vzhledem k $\Sigma x_i = a$ nastane tedy maximum součtu $\Sigma\max (x_i -$

při daných y_1, y_2, y_3 největší z čísel $6(a - y_1)$, $2(a - y_2)$, $(a - y_3)$. Pro $y_1 = 11$, $y_2 = 1$, $y_3 = 0$ je toto maximum rovno 30. Je tedy $6(16 - y_1) \leqq 30$, $2(16 - y_2) \leqq \leqq 30$, $16 - y_3 \leqq 30$. Z těchto nerovností plyne $y_1 \geqq 11$, $y_2 \geqq 1$, $y_3 \geqq -14$. Vzhledem k $y_1 + y_2 + y_3 = 12$ musí tedy být $y_1 = 11$, $y_2 = 1$, $y_3 = 0$. Z toho tedy plyne dále, že žádná jiná volba y_1, y_2, y_3, než právě uvedená, nemůže vést k menší hodnotě $f(x, y)$. Je tedy v našem případě $v_2 = \min_y (\max_x f(x, y)) = 30$. Tedy 11 jednotek na obranu prvního cíle, 1 jednotka na obranu druhého cíle a nechráněný třetí cíl je čistá obranná strategie, která zabezpečuje, že úspěch útoku, měřený naší funkcí, nepřekročí 30.

Hledejme nyní $v_1 = \max_x (\min_y f(x, y))$. Předpokládejme tedy, že je fixován útočný systém, tj. že je dáno $x = (x_1, x_2, x_3)$. Minimum funkce $f(x, y) = \Sigma k_i \max (x_i - y_i; 0)$ dostaneme vzhledem k $a > d$ ($16 > 12$) anulováním největších členů tohoto součtu (tj. obranu musíme rozložit podle důležitosti nebo zranitelnosti cílů, což popisují konstanty k_i). Tedy $\min_y f(x, y) =$

$$= \begin{cases} 6(x_1 - 12) + 2x_2 + x_3 & \text{pro} \quad x_1 \geqq 12\,, \\ 2(x_2 - (12 - x_1)) + x_3, & \text{je-li} \quad x_1 < 12, \quad x_1 + x_2 \geqq 12, \\ x_3 - (12 - x_1 - x_2), & \text{je-li} \quad x_1 + x_2 < 12. \end{cases}$$

[V prvním případě se volí obranný systém $y_1 = 12$, $y_2 = y_3 = 0$, v druhém případě systém $y_1 = x_1$, $y_2 = 12 - x_1$, $y_3 = 0$, v třetím případě systém $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2$, $y_3 = 12 - x_1 - x_2$.]

Snadno nyní zjistíme, že žádný z těchto výrazů nemůže nabýt hodnoty větší než 24 a této hodnoty nabude při strategii $x_1 = 16$, $x_2 = x_3 = 0$. Je tedy $v_1 = \max_x (\min_y f(x, y)) = 24$.

Máme tedy $v_1 = 24$, $v_2 = 30$. Pro další rozbor musíme zavést pojem *smíšené strategie*.[11]).

[Předpokládejme, že se hra mnohokrát opakuje, že však volba ryzí obranné strategie je náhodná, tj. že se nepřihlíží nijak k výsledkům již prošlých „střetnutí". Zvolit smíšenou strategii znamená v teorii her zvolit rozdělení pravděpodobností p_1, p_2, p_3 volby ryzích strategií x_1, x_2, x_3 a pravděpodobností q_1, q_2, q_3 volby ryzích strategií y_1, y_2, y_3, ($p_1 + p_2 + p_3 = 1$, $q_1 + q_2 + q_3 = 1$). Předpokládáme-li, že se při častém opakování hry ukáže střední hodnota funkce f rozumnou charakteristikou výsledků série opakování, dá volba smíšené strategie — jak uvidíme — lepší výsledky, než volba ryzí strategie.]

Poznamenejme, že smíšená strategie, spočívající v tom, že jedna ryzí strategie má pravděpodobnost 1 a ostatní ryzí strategie mají pravděpodobnost 0, vede k volbě první ryzí strategie. Pojem smíšené strategie je tedy zobecněním pojmu ryzí strategie a každou ryzí strategii lze pokládat v tomto smyslu také za smíšenou.

$- y_i; 0)$ — a zřejmě také součtu $\Sigma k_i \max (x_i - y_i; 0)$ (vzhledem ke $k_i > 0$) — zvolíme-li v n-tici $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ jedno z čísel x_i rovno a a tudíž ostatní rovna nule. Je pak $\max_x f(x, y) = \max_x \Sigma k_i \max (x_i - y_i; 0) = \max (k_i(a - y_i))$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Vyjádřeno řečí našeho příkladu bude útok nejúčinnější, soustředí-li se všechna útočná síla na jeden jediný cíl. (Ve skutečnosti je situace ovšem složitější. Z podmínek naší úlohy např. plyne, že tím, že se proti k-tému cíli nezasadí žádná útočná síla, bude obranná síla tohoto cíle automaticky neutralisována, což ve skutečnosti nemusí vždy nastat. *J. V.*)

[11]) Jde jen o úvodní výklad tohoto pojmu. Systematicky se o smíšené strategii pojednává v dalších odstavcích. Čtenář se bude moci po jejich přečtení k tomuto našemu příkladu vrátit.

Výsledek volby smíšené strategie se charakterizuje střední hodnotou výhry při daném rozdělení pravděpodobností ryzích strategií.

V našem příkladě má velký význam smíšená strategie útočníkova, podle níž napadne celou silou první cíl s pravděpodobností $\frac{1}{4}$ a s pravděpodobností $\frac{3}{4}$ plnou silou druhý cíl, přičemž všechny ostatní způsoby útoku se vylučují. Střední hodnota funkce f je v tomto případě (při fixovaném obranném systému y_1, y_2, y_3) $\frac{1}{4} \cdot 6(a - y_1) + \frac{3}{4} \cdot 2(a - y_2) = \frac{3}{2}(2a - y_1 - y_2)$. Toto číslo nemůže být menší než 30.[12] Touto smíšenou strategií je zaplněna dřívější mezera. Číslo 30 je horní hranicí úspěchu útoku, přijala-li obrana (jak se také stalo) ryzí strategii a mohla-li útočící strana volit strategii smíšenou.

Bylo by zajímavé objasnit, jaké výhody by mohla mít obrana ze smíšené strategie. Ukázalo se však již, že útočník může dosáhnout hodnoty 30, nemůže tedy žádná smíšená strategie obrany vést k lepšímu výsledku než nalezená již čistá strategie, která nedovoluje útočníkovi dosáhnout víc než 30. Formální důkaz tohoto faktu není obtížný.

5. SMÍŠENÁ STRATEGIE

U ryzí strategie jde o jeden z tahů, jimiž hráč může disponovat, u smíšené strategie jde o pravděpodobnosti tahů.

Smíšenou strategií se sledují dva cíle. Především se dosahuje větší přizpůsobivosti, neboť každou ryzí strategii lze pokládat za smíšenou s pravděpodobností 1. Předcházející příklad ukazuje, že taková volnost akce může přinést podstatný užitek. Za druhé vede smíšená strategie k nahrazování funkčních hodnot $f(x, y)$ jejich středními hodnotami. Při použití smíšené strategie nemůže si být hráč nikdy jist tím, že funkce f nabude nějaké určité hodnoty. Může pouze tvrdit, že tuto vlastnost má střední hodnota funkce f; skutečné funkční hodnoty mohou být také menší.

Použití smíšené strategie, nebo lépe přechod k střední hodnotě funkce f má smysl jen tehdy, jestliže střední hodnota dobře charakterisuje zájmy hráčů. V teorii her se toto také předpokládá.

Uvidíme, že v některých případech vystupuje pojem střední hodnoty jako důsledek vnitřního charakteru úlohy, nejen jako důsledek aplikace smíšené strategie. Dochází k tomu např. tehdy, představuje-li funkce f sama střední hodnotu, pomocí níž se charakterisují průměrné výsledky nějakých náhodných procesů (viz dále odst. 6).

Matematicky znamená zavedení smíšené strategie změnu povahy nezávislých proměnných, jež v úloze vystupují. Původní proměnné x a y byly ryzí strategie. Nové proměnné — smíšené strategie — označíme p, q. Jsou-li ryzí strategie hráče dány např. přirozenými čísly $1, 2, \ldots, m$, představuje každá jeho smíšená strategie m-tici $(p_1, p_2, \ldots, p_m)$ m nezáporných čísel, jejichž součet je roven 1. Místo původní funkce f proměnných x a y přichází nová funkce F proměnných p a q, jejíž hodnota $F(p, q)$ je střední hodnota funkce f, jestliže rozdělení pravděpodobností hodnot x a y je dáno strategiemi p a q. Disponuje-li ve zvláštním případě každý hráč konečným počtem strategií, charakteriso-

[12]) Na y_1 a y_2 nelze vynaložit víc než 12 vzhledem k $y_1 + y_2 + y_3 = d = 12$. *J. V.*

vaných přirozenými čísly ($x = 1, 2, \ldots, m$ u jednoho hráče, $y = 1, 2, \ldots, n$ u druhého hráče), je

$$F(p, q) = f(1, 1)\, p_1 q_1 + f(1, 2)\, p_1 q_2 + \ldots + \\ + f(1, n)\, p_1 q_n + f(2, 1)\, p_2 q_1 + \ldots + \\ + f(m, n)\, p_m q_n\,.$$

Fundamentálním výsledkem teorie her pro hru ve dvou s nulovým součtem je skutečnost, že pro velkou třídu případů splňuje funkce F podmínku

$$\max_p\,(\min_q F\,(p, q)) = \min_q\,(\max_p F\,(p, q)).$$

Patří sem zejména všechny hry s konečným počtem strategií u každého hráče.

V našem dřívějším označení je tedy pro smíšené strategie $v_1 = v_2$. Důsledky tohoto vztahu jsou nám teď již jasné. Tento vztah charakterizuje také „kompromis", jehož nebylo možno dosáhnout v odst. 3, kde se uvažovaly jen ryzí strategie. Každý hráč disponuje nyní smíšenou strategií, kterou lze redukovat i na ryzí strategii (např. u obránců v příkladě z odst. 4), jež mu garantuje dosáhnout $v_1 = v_2$ bez ohledu na to, co činí protivník. Veličina $v = v_1 = v_2$ se nazývá *cenou hry.*

[Ukážeme příklad smíšené strategie na hře popsané na str. 77 tabulkou 2. Oba hráči disponují dvěma strategiemi. Označme pravděpodobnost, že první hráč zvolí svou první strategii, znakem p. Pak ovšem pravděpodobnost, že zvolí druhou ryzí strategii, je zřejmě $1 - p$. Analogicky buďtež pravděpodobnosti volby ryzích strategií druhého hráče q, $1 - q$. Pro tuto hru je pak $F(p, q) = 2 \,.\, pq + 1 \,.\, p(1 - q) + (-1)(1 - p)\, q + 3 \,.\, (1 - p)(1 - q) = 5pq - 2p - 4q + 3$. Hledáme $\min_q F(p,q)$. Upravme $F(p,q)$ na tvar $F(p,q) = (5p - 4)\, q + (3 - 2p)$. Minimum nastane zřejmě pro $q = 0$, je-li $5p - 4 > 0$ a pro $q = 1$, je-li $5p - q \leqq 0$. Tedy $\min_q F(p, q) = \begin{cases} 3p - 1 \text{ pro p} \leqq \frac{4}{5}, \\ 3 - 2p \text{ pro } p > \frac{4}{5}. \end{cases}$ Maxima nabude tato funkce zřejmě pro $p = \frac{4}{5}$ (v intervalu $\langle 0, \frac{4}{5}\rangle$ roste, v intervalu $(\frac{4}{5}, 1\rangle$ klesá) a je $\max_p\,(\min_q F(p, q)) = \frac{7}{5}$. Zcela analogicky (úpravou $F(p, q)$ na $(5q - 2)\, p + (3 - 4q)$) dostaneme $\max_p F(p, q) = \begin{cases} 3 - 4q \text{ pro } q \leqq \frac{2}{5}, \\ q + 1 \quad \text{pro } q > \frac{2}{5}, \end{cases}$ a odtud dále $\min_q\,(\max_p F(p, q)) = \frac{7}{5}$ pro $q = \frac{2}{5}$. Nejlepšího výsledku $v_1 = v_2 = v = \frac{7}{5}$ dosáhne tedy první hráč, zvolí-li svou první ryzí strategii s pravděpodobností $\frac{4}{5}$ a druhou s pravděpodobností $\frac{1}{5}$, druhý hráč pak volbou svých ryzích strategií s pravděpodobnostmi $\frac{2}{5}$ a $\frac{3}{5}$.

Vidíme, že i v takovém velmi jednoduchém příkladě je již dost počítání. Složitost úvahy a výpočtu ovšem roste s rostoucí složitostí úlohy. V odst. 9 najde čtenář zmínku o některých účinných metodách aproximace.

Platí $\max_x\,(\min_y f(x, y)) \leqq v \leqq \min_y\,(\max_x f(x, y))$. Pro libovolné i a pro každé q je totiž $\sum_{j=1}^{n} q_j f(x_i, y_j) \leqq \max_q F(p, q)$, neboť $\sum_{j=1}^{n} q_j f(x_i,\ y_j) = F(p,\ q) = \sum_{j,k} q_j p_k f(x_k, y_j)$ pro $p_k = 0$, $k \neq j$, $p_i = 1$. Dále je $\sum_{j=1}^{n} q_j \min_y f(x_i, y) \leqq$

$\leqq \sum_j q_j f(x_i, y_j)$ a vzhledem k $\sum_j q_j = 1$ je $\sum_j q_j \min_y f(x_i, y) = \min_y f(x_i, y)$. Tedy pro libovolné i a q je $\min_y f(x_i, y) \leqq \max_p F(p, q)$, tedy také pro každé i je $\min_y f(x, y) \leqq \min_q (\max_p F(p, q)) = v$, tedy také $\max (\min f(x, y)) \leqq v$. Analogicky se dokáže druhá z výše uvedených nerovností.

Nyní je jasné, že přechod k smíšené strategii nejen pomáhá k jednoznačné volbě postupů, ale vede také (v průměru!) k lepšímu výsledku, než užití ryzí strategie, garantující $\max (\min f(x, y))$, resp. $\min (\max f(x, y))$.]

Definice optimální smíšené strategie vede k obecnému principu, který je důležitý pro numerické výpočty (podrobněji o tom viz ještě v odst. 6). Buďtež p', q' optimální strategie. Podle definice je $F(p', y) \geqq v$ pro jakékoli y [13]) a $F(x, q') \leqq v$ pro jakékoli x. Z těchto nerovností plyne $F(p', y) = v$ pro každou optimální strategii p' a pro každou čistou strategii y, u níž se v optimální strategii q' předpokládá nenulová pravděpodobnost.

[Důkaz: $v = F(p', q') = \sum_{i,j} p'_i q'_j f(x_i, y_j) = \sum_j q_j F(p', y_j)$, kde y_j probíhá všechny ryzí strategie y. Pro všechna j je však $F(p', y_j) \geqq F(p', q')$ a $q_j \geqq 0$. Kdyby pro jisté $j = k$ bylo $q_k > 0$ a $F(p', y_k) > v$, bylo by $v = \sum_j F(p', y_j) > \sum_j q_j v = v$.]

Jakmile jsou tedy určeny ryzí strategie, jejichž pravděpodobnosti při optimální smíšené strategii jsou nenulové, dostáváme místo nerovností *soustavu rovnic*. To je početně výhodnější.

Zatím jsme uvažovali případy s konečným počtem čistých strategií. Je-li jich nekonečně mnoho a vyjadřují-li se reálnými čísly např. z intervalu $0 \leqq x \leqq 1$, určuje se smíšená strategie pomocí tzv. funkce rozdělení $P(x)$. To zahrnuje i případ, kdy se některým čistým strategiím připisují kladné pravděpodobnosti, i případ, kdy se pravděpodobnost čisté strategie určuje hustotou pravděpodobnosti $\mathrm{d}P(x) = p(x)\,\mathrm{d}x$. Funkce $F(p, q)$, vyjadřující střední hodnotu funkce $f(x, y)$, má nyní tvar[14]) $\int\int f(x, y)\,\mathrm{d}P(x)\,\mathrm{d}Q(y)$.

6. SOUMĚRNOST. PŘÍKLAD TAKTICKÉ VOLBY ČASU

Úloha se nazývá *symetrickou*, jsou-li oba hráči ve stejné situaci. Zejména se předpokládá, že oba disponují stejnými možnostmi, tj. stejnými soubory čistých strategií a tedy také stejnými soubory smíšených strategií. Souměrnost úlohy se vyjadřuje vztahem $f(x, y) = - f(y, x)$, jenž má za následek analogický vztah pro smíšené strategie $F(p, q) = - F(q, p)$.

Má-li úloha řešení, tj. je-li max-min funkce F rovno jejímu min-max, musí být vzhledem k symetrii $v = 0$. Je tedy strategie p optimální, je-li $F(p, y) \leqq 0$ pro libovolné y. Je-li p optimální pro jednoho hráče, je automaticky optimální i pro druhého hráče. Ukažme příklad symetrické úlohy.

Mysleme si, že dvě bojující strany mají za úkol obsadit týž bod (kótu, objekt). Každá z obou stran určí okamžik zahájení své akce zcela nezávisle

[13]) y je strategie obsahující jednu čistou strategii s pravděpodobností 1 a ostatní čisté strategie vesměs s pravděpodobnostmi 0. Je proto $F(p', y) = \sum_{k=1}^{m} p_k f(x_k, y) = \sum_{k=1}^{m} p'_k f(x_k, y)$.

[14]) Viz dodatek, odst. 3.

na protivníkovi. Předpokládejme, že je známa funkce φ argumentu t (času), jejíž hodnota v t určuje pravděpodobnost, s kterou kterákoli strana dobude cíle, zahájí-li svou operaci v okamžiku t. Předpokládejme dále, že φ roste od nuly do svého maxima, jehož dosáhne pro $t = 0$ a pak že klesá. Čím dříve začne jeden z protivníků svou operaci, tím větší má naději na předstižení soupeře, avšak tím menší naději na úspěch.

[Předpokládá se, že jakmile jeden ze soupeřů bod obsadí, druhý to již učinit nemůže.]

V uvažované variantě úloh tohoto druhu má každá strana možnost získat zprávu o eventuální akci protivníka.

Ryzí strategie v této úloze jsou tedy okamžiky, kdy se ta která strana rozhodne zahájit operaci. Označíme tyto strategie zase x a y a předpokládáme, že $x \leqq 0$, $y \leqq 0$ (x, y reálné). Toto omezení říká, že žádný z protivníků nemá důvodů jednat až po uplynutí nejvýhodnějšího okamžiku $t = 0$.

Smíšené strategie se v obecném případě vyjadřují funkcemi rozdělení $P(x)$, $Q(x)$. V našem případě stačí omezit se na smíšené strategie dané hustotami pravděpodobností $p(x)$, $q(x)$ a vzhledem k souměrnosti úlohy konečně na jednu hustotu $p(x)$.

Uvedeme řešení a pak teprve ukážeme, jak je lze najít. Optimální strategie je určena touto hustotou pravděpodobnosti:

$$p(x) = \begin{cases} 0 \quad \text{pro} \quad x < a\,, \\ \dfrac{\varphi(0)\,\varphi'(x)}{3\varphi^3(x)(1 + \varphi(0))} \qquad \text{pro a} \leqq x \leqq 0\,, \end{cases}$$

kde konstanta a je určena rovnicí $\varphi(a) = \dfrac{\varphi(0)}{1 + 2\varphi(0)}$. Toto řešení vyjadřuje kvantitativně intuitivní představu o optimálním schématu chování protivníka. Žádný ze soupeřů nezačne s akcí, dokud jeho naděje na úspěch nepřekročí jistou prahovou hodnotu a, určenou výše uvedenou formulí. Hustota pravděpodobnosti, s níž se každý ze soupeřů rozhoduje, je větší, jestliže funkce φ rychle roste.

První krok k řešení záleží v tom, určit funkci f proměnných x, y, která matematicky popíše naši situaci. Začne-li první z protivníků s akcí dříve, tj. je-li $x < y$, je jeho naděje dosáhnout cíle rovna $\varphi(x)$. Pro druhého protivníka je pravděpodobnost úspěchu tedy $(1 - \varphi(x))\,\varphi(y)$, [tj. pravděpodobnost, že nastanou zároveň dva vzájemně nezávislé jevy, tj. že první cíle nedosáhne — pravděpodobnost toho je k $\varphi(x)$ komplementární, tedy $1 - \varphi(x)$ — a že druhý cíle dosáhne — pravděpodobnost tohoto jevu je $\varphi(y)$. Úhrnná pravděpodobnost je tedy rovna součinu pravděpodobností obou jednotlivých jevů.[15]) Za funkci f lze zvolit rozdíl pravděpodobností úspěchu jednotlivých stran], tedy pro $x < y$ je $f(x, y) = \varphi(x) - (1 - \varphi(x))\,\varphi(y) = \varphi(x) - \varphi(y) + \varphi(x)\varphi(y)$.

Začnou-li obě strany s akcí současně ($x = y$), je $f(x, y) = 0$, neboť obě mají stejnou naději.

Je-li konečně $x > y$, je (analogicky jako pro $x < y$) $f(x, y) = \varphi(x)(1 - \varphi(y)) - \varphi(y) = \varphi(x) - \varphi(y) - \varphi(x)\,\varphi(y)$.

[15]) Viz dodatek, odst. 2.

Smíšená strategie $p(x)$ bude optimální, bude-li pro každé y $F(p, y) = \int_{-\infty}^{0} f(x, y)\, p(x)\, dx \geqq 0$. Rozdělíme nyní integrační obor na intervaly $(-\infty, y)$ a $(y, 0)$ $(x < y, x > y)$, dosadíme z uvedených formulí pro $f(x, y)$ a dostaneme[16])

$$2 \int_{-\infty}^{y} \varphi(x)\, p(x)\, dx \geqq C \left(1 - \frac{1}{\varphi(y)}\right) + 1.$$

Princip z konce odst. 5 (str. 81), zobecněný na spojitý případ, vede k požadavku, aby rovnost v uvedeném vztahu platila pro každé y, pro něž $p(y) \neq 0$. Vyloučíme-li $p(y) \equiv 0$, je přirozené předpokládat, že $p(x) = 0$ pro $x < a$ a že pro $x > a$ je dáno vzorcem $2 \int_{a}^{y} \varphi(x)\, p(x)\, dx = C \left(1 - \frac{1}{\varphi(y)}\right) + 1$. To také budeme předpokládat. Derivováním poslední rovnice podle y dostaneme pak $p(y) = \frac{C}{2} \varphi'(y)\, \varphi^{-3}(y)$, při čemž $\int_{a}^{0} p(x)\, dx = 1$ a $\int_{a}^{0} \varphi(x)\, p(x)\, dx = C$. První z těchto vztahů určuje a, pro kteroužto hodnotu dochází ke skoku, druhý vztah určuje konstantu C.[17])

---

[16]) $F(p, y) = \int_{-\infty}^{y} p(x)(\varphi(x) - \varphi(y) + \varphi(x)\, \varphi(y))\, dx + \int_{y}^{0} p(x)(\varphi(x) - \varphi(y) - \varphi(x)\, \varphi(y))\, dx =$

$$= \int_{-\infty}^{y} p(x)\, \varphi(x)\, dx - \varphi(y) \int_{-\infty}^{y} p(x)\, dx + \varphi(y) \int_{-\infty}^{y} p(x)\, \varphi(x)\, dx + \int_{y}^{0} p(x)\, \varphi(x)\, dx - \varphi(y) \int_{y}^{0} p(x)\, dx -$$

$$- \varphi(y) \int_{y}^{0} p(x)\, \varphi(x)\, dx = \int_{-\infty}^{0} p(x)\, \varphi(x)\, dx - \varphi(y) \int_{-\infty}^{0} p(x)\, dx + \varphi(y) \int_{-\infty}^{y} p(x)\, \varphi(x)\, dx -$$

$$- \varphi(y) \int_{y}^{0} p(x)\, \varphi(x)\, dx = \left(\text{vzhledem k} \int_{-\infty}^{0} p(x)\, dx = 1\right) = \int_{-\infty}^{0} p(x)\, \varphi(x)\, dx -$$

$$- \varphi(y) + \varphi(y) \int_{-\infty}^{y} p(x)\, \varphi(x)\, dx - \varphi(y) \int_{y}^{0} p(x)\, \varphi(x)\, dx \geqq 0\,.$$

Tedy

$$\int_{-\infty}^{0} p(x)\, \varphi(x)\, dx - \varphi(y) + \varphi(y) \int_{-\infty}^{y} p(x)\, \varphi(x)\, dx \geqq \varphi(y) \int_{y}^{0} p(x)\, \varphi(x)\, dx\,.$$

Připočteme nyní k oběma stranám této nerovnosti

$$\varphi(y) \int_{-\infty}^{y} p(x)\, \varphi(x)\, dx, \quad \text{označíme} \quad \int_{-\infty}^{0} p(x)\, \varphi(x)\, dx = C$$

a dělíme obě strany $\varphi(y)$. Dostaneme formuli uvedenou v textu.

---

[17]) Z $\frac{C}{2} \int_{a}^{0} \varphi'(x)\, \varphi^{-3}(x)\, dx = 1$ plyne jednoduchým výpočtem $C = \frac{4}{\varphi^{-2}(a) - \varphi^{-2}(0)}$. Dále z $\int_{a}^{0} \varphi(x)\, p(x)\, dx = C$ plyne $\frac{C}{2} \int_{a}^{0} \varphi'(x)\, \varphi^{-2}(x)\, dx = C$, odkud $\varphi(a) = \frac{\varphi(0)}{1 + 2\varphi(0)}$. Dosazením do výrazu pro C dostaneme $C = \frac{\varphi(0)}{1 + \varphi(0)}$, $p(x) = \frac{\varphi(0)}{2(\varphi(0) + 1)} \cdot \frac{\varphi'(x)}{\varphi^{-3}(x)}$ pro $x \geqq a$.

Nyní je ovšem ještě třeba prověřit, že takto získané řešení skutečně splňuje podmínku $F(p, q) > 0$ pro jakékoli y. Tím se zde již zabývat nebudeme.

Uvedený příklad je zvláštním případem velké třídy dobře prozkoumaných úloh, zvaných „souboje".[18])

Otázka najít optimální smíšenou strategii se převádí na řešení lineárních integrálních rovnic. Dá se ukázat, že tato řešení jsou unicitní, tj. že pro každého z protivníků existuje jen jedna smíšená strategie, která nejlépe vyjadřuje jeho zájem. Unicita řešení platí pro všechny „souboje" a také pro některé jiné případy. Jsou však případy, kdy pro některou stranu existuje několik optimálních smíšených strategií.

7. RELACE MAX-MIN = MIN-MAX

Z předcházejících výkladů je vidět, že teorie hry ve dvou s nulovým součtem spočívá na relaci max-min = min-max. Optimální ryzí strategie existuje ve výjimečném případě, kdy tento vztah platí pro funkci f. Pro funkci F platí častěji a umožňuje volbu optimálního způsobu jednání. Ukázali jsme konečně, že relace max-min = min-max platí vždy (pro F), disponuje-li každý hráč konečným počtem ryzích strategií. Důkaz tohoto tvrzení spočívá na dvou zvláštnostech funkce F. Jedna z nich je spjata s povahou smíšených strategií p a q, druhá se zvláštní formou této funkce.

Je-li počet ryzích strategií konečný, představuje smíšená strategie p ve smyslu definice systém $(p_1, p_2, \ldots, p_m)$ m nezáporných čísel, jejichž součet je 1. To umožňuje jednoduchou geometrickou interpretaci smíšené strategie. Budiž $m = 3$. Mysleme si trojúhelník, jehož každý bod (uvnitř nebo na obvodu) lze brát za těžiště bodových hmot (mas), umístěných ve vrcholech trojúhelníka. Poněvadž poloha těžiště závisí jen na poměru hmot (mas), můžeme položit jejich součet rovný 1. Ztotožnění p_1, p_2, p_3 s těmito hmotami vede ke ztotožnění smíšené strategie s jejich těžištěm. Jinými slovy, smíšené strategie lze pokládat za body uvnitř nebo na obvodu trojúhelníka. Čisté strategie odpovídají jeho vrcholům.

Pro $m = 2$ vyplní smíšené strategie analogicky úsečku, pro $m = 4$ čtyřstěn v trojrozměrném prostoru, pro $m > 4$ analogický m-rozměrný útvar v $(m - 1)$-rozměrném prostoru (tzv. simplex — *J. V. G.*). Všechny tyto útvary jsou ***konvexní***, tj. obsahují-li dva body, obsahují také celou úsečku tyto body spojující.

Pokud jde o formu funkce F, je to při konečném počtu čistých strategií bilineární forma v p a q : $F(p, q) = \sum_{i,j} f(x_i, y_j)\, p_i q_j$. To znamená, že pro každé zvolené q je F lineární forma v p a obráceně. Zejména platí $F\left(\frac{p' + p''}{2}, q\right) = \frac{F(p', q) + F(p'', q)}{2}$. Nahradíme-li zde znak rovnosti znakem $\leqq$, dostaneme podmínku, vymezující velkou třídu tzv. *funkcí konvexních vzhledem k p*. Vezmeme-li znak $\geqq$, dostaneme definici tzv. *konkávních funkcí*.

Fundamentální výsledek teorie spočívá v tom, že patří-li každá z nezávislých proměnných p, q nějakému vypuklému útvaru v prostoru o konečném počtu

[18]) *Index of Publication*, The RAND Corp., Santa Monica, Calif., únor 1954, str. 14.

rozměrů a je-li funkce F konkávní vzhledem k p pro každé q a konvexní vzhledem ke q pro každé p, je $\max_p (\min_q F(p,q)) = \min_q (\max_p F(p,q))$. Předpokládá se přitom, že vypuklé útvary, jež jsou obory proměnných p a q, obsahují své hranice a že jsou omezené. Jinak by zmíněná maxima a minima nemusela existovat.

Vyslovený požadavek lze zeslabit. V některých případech má funkce F tvar zlomku s kladným jmenovatelem. Základní relace max-min = min-max zůstává v platnosti, jsou-li podmínky, pokud jde o konvexnost a konkávnost, splněny pro čitatele a jmenovatele. K tomu zejména stačí, aby čitatel a jmenovatel byly bilineární formy (viz také dále odst. 8).

Výsledky byly zobecněny i na případ nekonečně mnoha rozměrů, což má velký význam pro studium her s nekonečně mnoha ryzími strategiemi. Avšak i v těchto případech mohou být užitečné varianty s konečným počtem rozměrů. Příkladem může být úloha z odst. 4 o obraně a útoku. Zde jsou ryzími strategiemi konvexní útvary a funkce f je konvexní vzhledem k y při libovolném x. Obecné poučky teorie zaručují, že v takovém případě disponuje druhý hráč optimální ryzí strategií, což se s úspěchem dá využít pro určení optimálního postupu.

Variantu základní věty s konečným počtem rozměrů lze na nekonečně rozměrný případ aplikovat také tehdy, jestliže se ryzí strategie mění např. od 0 do 1, a je-li funkce f mnohočlen[19]: $f(x, y) = \sum_{i,k} c_{ik} x^i y^k$. Jsou-li smíšené strategie dány funkcemi rozdělení $P(x)$, $Q(x)$, je potom $F(p, q) = \sum_{i,k} c_{ik} \int x^i \, dP \int y^k \, dQ$. Úloha se převedla na případ o konečném počtu rozměrů, neboť smíšené strategie lze úplně popsat konečným počtem tzv. *momentů* $\int x^i \, dP$ a $\int y^k \, dQ$.

8. EKONOMICKÁ APLIKACE

Metod a výsledků teorie her lze často použít ve studiu modelů ekonomických situací. Jako příklad probereme model stabilně se rozvíjejícího hospodářství. Souvislost tohoto modelu s teorií her našel J. v. NEUMANN.[20]

Předpokládáme, že „hospodářství“ tvoří uzavřenou soustavu, utvořenou z n výrobků a m výrobních procesů. Výrobky označíme čísly $j = 1, 2, \ldots, n$, výrobní procesy čísly $i = 1, 2, \ldots, m$. V každém procesu se některé výrobky ze soustavy spotřebují, ostatní vyrobí. Předpokládejme, že množství výrobků a intenzita výroby se měří vhodnými jednotkami. Čísla $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}$ nechť jsou množství různých výrobků, které se spotřebují v i-tém výrobním procesu, probíhajícím s jednotkovou intenzitou, $b_{i1}, b_{i2}, \ldots, b_{in}$ množství výrobků, jež se v tomto procesu vyrobí. Relativní intenzity výrobních procesů označíme $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_m^{(0)}$, relativní ceny výrobků $y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}$. Čísla $x_i^{(0)}$ a $y_j^{(0)}$ jsou nezáporná a jejich součty jsou rovny 1. Předpoklad *stability hospodářské soustavy* znamená, že tato čísla musí být konstantní. Předpoklad *rozvíjejícího se hospodářství* možno interpretovat tak, že se intenzita výrobního procesu za každou uplynulou časovou jednotku znásobí týmž koeficientem $\xi > 1$.

[19]) M. DRESHER, S. KARLIN and L. S. SHAPLEY, *Polynomial Games*, Contributions to the Theory of Games, Ann. Math. Stud., sv. 24, 1950, 161—180.

[20]) J. VON NEUMANN, *A Model of General Economic Equilibrium*, Rev. Econ. Stud., sv. 13, str. 1—9, 1945—1946 (překlad do angličtiny podle Neumannova rukopisu).

Pro každý výrobek j musí platit $\sum_i b_{ij}x_i^{(0)} \geqq \xi \sum_i a_{ij}x_i^{(0)}$, neboť v opačném případě by potřeby rozvíjejícího se hospodářství převyšovaly skutečné zdroje. Kdyby kromě toho platil pro některý výrobek j v tomto vztahu znak rovnosti, vznikne přebytek, který má ve stabilním hospodářství nutně za následek anulování relativní ceny tohoto výrobku. Tyto dvě podmínky lze nahradit požadavkem, aby pro jakékoli možné rozdělení hodnot y_j bylo $\sum_{i,j} b_{ij}x_i^{(0)}y_j \geqq \xi \sum_{i,j} a_{ij}x_i^{(0)}y_j$, přičemž rovnost musí nastat při skutečně dosažených relativních cenách $y_j^{(0)}$.

Zákony tohoto hospodářství předpisují dále, aby soutěž vedla ke zmenšování zisku. Označíme-li normu zisku p a $1 + p = \eta$, musí pro každý výrobní proces platit $\sum_j b_{ij}y_j^{(0)} \leqq \eta \sum_j a_{ij}y_j^{(0)}$. Platí-li v některém výrobním procesu i ostrá nerovnost, je $x_i^{(0)} = 0$. Tyto dvě podmínky lze vyjádřit také tak, že pro každou přípustnou soustavu intenzit x_i platí $\sum_{i,j} b_{ij}y_j^{(0)}x_i \leqq \eta \sum_{i,j} a_{ij}y_j^{(0)}x_i$, přičemž rovnosti se dosáhne při skutečných intenzitách $x_i^{(0)}$.

Budeme nyní předpokládat, že $a_{ij} > 0$ pro všechna i, j a sestrojíme funkci $f(x, y) = \dfrac{\sum_{i,j} b_{ij}x_iy_j}{\sum_{i,j} a_{ij}x_iy_j}$. Výše uvedené podmínky lze nyní vyjádřit takto:

$\xi \leqq \min_y f(x^{(0)}, y)$, $\xi = f(x^{(0)}, y^{(0)})$; $\eta \geqq \max_x f(x, y^{(0)})$, $\eta = f(x^{(0)}, y^{(0)})$. Odtud plyne $\xi = \eta$ a dále $\xi = \min_y f(x^{(0)}, y) = \max_x (\min_y f(x, y)) = \min_y (\max_x f(x, y)) = \max_x f(x, y^{(0)}) = \eta$.

Tento výsledek ukazuje souvislost našeho ekonomického modelu se základní větou z odst. 7. Funkce f je podíl dvou bilineárních forem a můžeme proto tvrdit: *Pro dané dvě soustavy a_{ij}, b_{ij} existuje alespoň jedno rozvíjející se hospodářství s těmito veličinami jako parametry, v níž společná hodnota max-min a min-max funkce f je větší než 1.* Touto společnou hodnotou je koeficient ξ, který charakterisuje růst výroby a je roven koeficientu $\eta = 1 + p$, kde p charakterisuje normu zisku.

Podmínka $a_{ij} > 0$ pro všechna i, j je dosti silná. Může být oslabena, vezmeme-li místo funkce f funkci g, definovanou formulí $g(x, y) = \dfrac{\sum_{i,j} b_{ij}x_iy_j}{\sum_{i,j} (a_{ij} + b_{ij})\, x_iy_j}$ s předpokladem $a_{ij} + b_{ij} > 0$. Vzhledem k povaze naší úlohy je přirozené předpokládat, že $a_{ij} \geqq 0$, $b_{ij} \geqq 0$, je však potom nutno žádat $a_{ij} + b_{ij} > 0$ pro všechna i, j. Jinak by nemuselo být $\xi = \eta$.

9. POSTUPNÉ APROXIMACE

Optimální smíšené strategie jsme skutečně vypracovali zatím jen v odst. 5 a 6. Dnes je v tomto směru známo mnoho různých metod opírajících se o nejrozmanitější principy, od jednoduchých geometrických úvah po složité výsledky teorie lineárních operátorů.

V odst. 5 jsme ukázali, že v rámci našich podmínek hry ve dvou s nulovým součtem lze nerovnosti vymezující optimální strategii nahradit soustavou lineárních rovnic. To lze provést i v obecném případě her s konečným počtem čistých strategií. V takovém případě lze obdélníkové schéma, charakterisující hru, přeměnit ve schéma čtvercové vynecháním vhodných řádků a sloupců. Toto redukované schéma nazveme *jádro*[21]) výchozího obdélníka; lze na ně použít dříve již popsané metody. S růstem počtu čistých strategií se však vyčleňování jádra stává velmi pracné a metoda ztrácí značně na své účinnosti.

G. W. BROWN vypracoval metodu postupných aproximací[22]), jíž lze použít v případech, kdy nelze vyčlenit jádro. Metoda spočívá v tom, že se pro každého hráče sestrojí (nekonečné) posloupnosti $\{p^{(r)}\}$, $\{q^{(r)}\}$ smíšených strategií, jež konvergují k optimální strategii p, q. Metoda je velmi vhodná pro numerické výpočty, neboť se dá snadno programovat pro matematické stroje, ač jinak posloupnosti konvergují velmi zvolna.[23])

Posloupnosti $\{p^{(r)}\}$, $\{q^{(r)}\}$ se konstruují rekurentně. Budiž dána smíšená strategie q pro druhého hráče. Označme $\varphi(q)$ ryzí strategii prvního hráče, která je optimální jako odpověď (reakce) na strategii q. Analogicky označme $\psi(p)$ optimální ryzí strategii proti dané smíšené strategii p prvního hráče. Posloupnosti $\{p^{(r)}\}$ a $\{q^{(r)}\}$ se konstruují současně. Vyjdeme z libovolné strategie $q^{(1)}$ a položíme $\mathrm{p}^{(1)} = \varphi(q^{(1)})$. Další členy určujeme rekurentními vztahy $q^{(r+1)} = \dfrac{r-1}{r}\, q^{(r)} + \dfrac{1}{r}\, \psi(p^{(r)})$, $p^{(r+1)} = \dfrac{r-1}{r}\, p^{(r)} + \dfrac{1}{r}\, \varphi(q^{r+1})$. [Doporučujeme čtenáři vypočíst několik aproximací nejlepší smíšené strategie pro hru z příkladu na str. 81 a porovnat výsledky s přesnými hodnotami $p = \frac{4}{5}$, $q = \frac{2}{5}$.]

K této metodě se těsně přimyká metoda, kterou vzájemně nezávisle vypracovali BROWN a NEUMANN a v níž se optimální strategie určuje jako limita řešení jisté soustavy diferenciálních rovnic, když nezávisle proměnná neomezeně roste.

10. OBECNÝ POJEM STRATEGIE. HRA TYPU POKER

Všechny zatím probírané příklady byly zvláštními případy modelu z odst. 2. Někdy je však nutno počítat se situacemi obecnější povahy, kdy oba hráči se mohou rozhodnout pro některé z *několika* řešení. Kromě toho mohou být někdy tahy (v obecném smyslu tohoto slova — *J. V.*) *čistě náhodné*. V okamžiku, kdy je nutno učinit tah, mohou být výsledky předcházejících tahů, reakce protivníka nebo náhodné tahy hráči částečně známy.

Nejobtížnější je popsat kvantitativně náhodu zahrnutou v teorii a dát přesný smysl pojmu ryzí strategie. Omezíme se na případy, kdy počet tahů a možných kombinací hry je konečný. Ryzí strategii vymezíme soustavou instrukcí, která předvídá všechny možné situace a která může informovat libovolného nezasvěcence o tom, co učinit. Celkový počet čistých strategií budiž konečný.

Mysleme si nyní, že každý hráč má úplný soupis svých ryzích strategií ve formě knihy, na jejíž každé stránce je popsána jedna strategie. Předpoklá-

[21]) V ruštině *существенная часть* (podstatná část). *J. V.*

[22]) G. W. BROWN, *Notes on the Solution of Linear Involving Inequalities*, Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1951.

[23]) Důkaz viz v JULIA ROBINSON, *An Iterative Method of Solving a Game*, New York, 1952.

dejme dále, že každý hráč může předat hru náhradníkovi a to tak, že mu sdělí číslo stránky, na níž je popsána strategie, které hodlal použít. Náhradník, takto informovaný, může nyní postupovat sám. Poznamenejme, že hra se takto převádí na dříve popsaný model: každý hráč volí číslo (číslo stránky), aniž ví cokoli o záměrech protivníka.

Ukážeme příklad. Mysleme si hru ve dvou s nulovým součtem, která představuje zjednodušenou variantu hry „poker" a to variantu, která zachovává možnost tzv. „bluffu"[24]). Hra sestává z šesti kroků [*a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*. Kroky *a* a *b* se činí vzájemně nezávisle, kroky další střídavě, počínaje prvním hráčem. Hra může skončit kterýmkoli krokem *c* až *f*. Hraje se s kartami jen dvou „hodnot" — vyšší a nižší. Postup hry je tento:

a) každý hráč vloží do hry základní sázku, rovnou 2 (jednotkám);

b) každý hráč „koupí" — nezávisle na protihráči — kartu.

Může to být karta vyšší nebo nižší. Tento akt je *náhodný*. Předpokládá se, že oba hráči mají stejnou naději koupit vyšší nebo nižší kartu. Každý hráč vidí svou kartu a nevidí kartu protihráče.

c) První hráč může „pasovat" (tj. vzdát se další hry — *J. V.*), nebo zvýšit svou sázku o 3 [vloží tedy eventuálně v tomto kroku do hry celkem 5];

d) druhý hráč může pasovat, nebo žádat vyložení karet, nebo zvýšit sázku o 3 [tj. zvýšit sázku protihráče, tedy vsadit dalších 6 jednotek. Celkem pak bude činit jeho sázka 8);

e) první hráč může učinit totéž [jeho sázka dosáhne tedy eventuálně 11];

f) druhý hráč může buď pasovat, nebo žádat vyložení karet.

Hra pokračuje tak dlouho, dokud některý hráč nepasuje, nebo nevyžaduje vyložení karet. V tomto případě se karty porovnají a vyhrává karta vyšší. Jsou-li karty téže hodnoty, vezme si každý hráč zpět celou svou sázku. Pasuje-li hráč, vyhrává celý vklad protihráč (toto pravidlo platí i pro krok *c*); druhý hráč v tom případě vyhrává základní sázku).

Celkový počet strategií lze zmenšit dohodou, že hráč, který koupil vyšší kartu, automaticky zvyšuje sázku ve všech krocích. V takovém případě je ryzí strategií instrukce jen pro případ, že hráč koupil nižší kartu.

První hráč disponuje čtyřmi čistými strategiemi:

I_1 : pasovat při kroku *c*);
I_2 : zvýšit sázku při *c*), avšak pasovat při *e*);
I_3 : zvýšit sázku při *c*), avšak žádat vyložení karet při *e*);
I_4 : zvýšit sázku při *c*) i při *e*).

Druhý hráč disponuje také čtyřmi čistými strategiemi:

II_1 : pasovat při *d*);
II_2 : vyložit karty při *d*);
II_3 : zvýšit sázku při *d*) a pasovat při *f*);
II_4 : zvýšit sázku při *d*) a vyložit karty při *f*).

[24]) Charakteristika typická pro hru poker. Dosti dobře ji lze vystihnout českým termínem „předstírání". Bluff spočívá v tom, že hráč sází záměrně v rozporu s možnostmi své karty, tj. sází např. mnoho, ač má špatnou kartu, aby protihráč nabyl přesvědčení, že má dobrou kartu, a tím ho eventuálně „zahnal" (tj. přiměl ke vzdání partie), nebo obráceně sází opatrně, ač má dobrou kartu, aby protihráč nabyl dojmu, že má kartu slabou, a aby byl tak vyprovokován k velkým sázkám. V terminologii našeho článku lze „bluff" označit za záměrnou volbu neoptimální strategie vlastní, aby se protihráč svedl od volby strategie optimální. *J. V.*

Obdélníkové (čtvercové) schéma odpovídající této hře je toto:

	II_1	II_2	II_3	II_4
I_1	$-1/2$	$1/4$	1	$7/4$
I_2	$1/4$	0	$-1/2$	$1/4$
I_3	-1	$-3/4$	0	$3/4$
I_4	$-7/4$	$-3/2$	$5/4$	0

Nazývá se *výherní maticí*. [Úlohu funkce $f(x, y)$ tu má střední hodnota výhry při volbě strategií x a y.]

Ukažme, jak se dojde např. k číslu $-\frac{7}{4}$ ve čtvrtém řádku a v prvním sloupci schématu.[25])

První hráč zvolí svou čtvrtou strategii, tj. zvyšuje sázku, kdykoli je to možné. Druhý hráč volí svou první strategii, tj. pasuje při čtvrtém kroku. Spočítejme nejprve možné výhry prvního hráče.

Jestliže oba hráči koupili vyšší kartu, zvyšují ve smyslu dohody oba sázky, dokud je to možné. Hra tedy končí šestým krokem vyložením karet (druhý hráč má vyšší kartu), a podle pravidel hry nevyhrává nikdo. Výhra prvního hráče je tedy rovna 0.

Jestliže první hráč koupil vyšší, druhý hráč nižší kartu, zvyšuje první hráč automaticky sázku, druhý hráč vzhledem k zvolené strategii (II_1) při čtvrtém kroku pasuje, čímž hra končí prohrou druhého hráče. První hráč tedy vyhrává 2.

Jestliže první hráč koupil nižší, druhý vyšší kartu, zvyšuje první hráč sázku vzhledem ke své strategii (I_4) stále, druhý podle dohody rovněž. Hra končí šestým krokem vyložením karet (druhý hráč má vyšší kartu) a prohrou prvního hráče, který prohrává 11. Jeho výhra je tedy -11.

Jestliže konečně oba hráči koupili nižší kartu, první hráč vzhledem ke své strategii sázku zvyšuje, druhý hráč vzhledem ke své strategii při čtvrtém kroku pasuje, čímž prohrává 2 (základní sázku). První hráč tedy vyhrává 2.

Pravděpodobnost každé z uvedených variant je $\frac{1}{4}$.[26]) Tedy střední hodnota výhry prvního hráče je $\frac{1}{4} \cdot (0 + 2 - 11 + 2) = -\frac{7}{4}$.

Uveďme ještě řešení této hry, tj. optimální smíšené strategie obou hráčů:

První hráč: I_1 s pravděpodobností $\frac{1}{7}$, I_2 s pravděpodobností $\frac{6}{7}$, I_3 a I_4 s pravděpodobností 0;

Druhý hráč: II_1 s pravděpodobností $\frac{6}{7}$, II_2 s pravděpodobností $\frac{1}{7}$, II_3 a II_4 s pravděpodobností 0.

Hra je tedy výhodná pro druhého hráče, který může očekávat průměrnou výhru $\frac{2}{7}$ v každé partii.

11. ZÁVĚR

Mluvili jsme zde jen o hrách ve dvou s nulovým součtem. J. v. NEUMANN studoval obecné případy, v nichž lze tvořit „koalice" hráčů. Intuitivně je jasné (a příklady to potvrzují), že v mnoha případech může hráč získat více, spojí-li se s jinými, než hraje-li na vlastní pěst. Tato výhoda je důsledkem dohody, podle níž jedná někdy jednotlivý hráč sice proti vlastnímu zájmu, avšak v zájmu celé koalice. Dohoda spočívá v tom, že výhry se sloučí a znovu rozdělí podle dohodnutých pravidel. Tato pravidla musí být taková, aby

[25]) Podáno trochu podrobněji než v originále. *J. V.*

[26]) Plyne ihned z pravidla b). *J. V.*

nedávala vzniknout u jednotlivých členů koalice tendencím vzdát se společné hry a eventuálně se dohovořit s protivníkem ve vlastním zájmu.

Dnes lze teoreticky zkoumat zatím jen stabilnost koalicí. Teorie není ještě s to řešit otázky nejlepších způsobů jejich organizace.

O výsledcích Neumannových prací se lze dočíst v knize J. VON NEUMANN and O. MORGENSTERN, *Theory of Games and Economical Behavior*, 2. vyd., New York 1947. Případ, kdy tvoření koalicí narušují vnější příčiny, je z teoretického hlediska nejsložitější. Není dosud ani obecné formulace této úlohy. Řešeny byly jen některé zvláštní případy.

DODATEK

Některé pojmy a vzorce z teorie pravděpodobnosti[27])

1. Náhodným jevem A rozumíme obvykle jev, který, spojen s nějakým pokusem, může a nemusí nastat. Nastane-li v n pokusech m krát, nazýváme číslo $f_n = \frac{m}{n}$ $(0 \leqq m \leqq n)$ *četností* jevu A. Je známý experimentální fakt, že četnost jevu se s rostoucím n stále méně liší od jistého pevného čísla. Tento základní fakt umožňuje teoreticky zkoumat náhodné jevy, s nimiž se setkáváme v přírodovědě i v praktickém životě. Zmíněné číslo lze (s jistou nepřesností) u každého náhodného jevu zjistit tím, že provedeme dostatečný počet pokusů a stanovíme f_n pro různá n.

Každému náhodnému jevu A lze tedy přiřadit jistou, dostatečně stabilní číselnou charakteristiku — četnost — která popisuje vlastnosti jevu A při *hromadných výzkumech*. Vztah mezi jevy a jejich četnostmi se v teorii pravděpodobnosti axiomatizuje. Každému jevu A se přiřazuje číslo $P(A)$ — tzv. *pravděpodobnost jevu A*.

Teorie pravděpodobnosti spočívá na soustavě axiomů zvolených tak, aby se v matematické teorii zachovaly důležité vlastnosti experimentálních četností. Dnes je známo několik takových soustav.

2. Několik základních vzorců:[28])

Pravděpodobnost jevu A je číslo $P(A)$, vyhovující podmínce $0 \leqq P(A) \leqq 1$. Pravděpodobnost jistého jevu U je 1, pravděpodobnost nemožného jevu V je 0: $P(U) = 1, P(V) = 0$.

Sjednocením jevů A_1, A_2 — znak $A_1 \cup A_2$ — nazýváme jev, spočívající v tom, že nastane alespoň jeden z jevů A_1, A_2. Průnikem A_1, A_2 — znak $A_1 \cap A_2$ — nazýváme jev, spočívající v tom, že nastane A_1 i A_2.

Jsou-li jevy A a B *nezávislé*, tj. nemění-li se $P(A)$, je-li známo, že nastal jev B, platí $P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$. Jestliže se jevy A a B *vzájemně vylučují*, tj. je-li $P(A \cap B) = 0$, je $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

---

[27]) Spokojíme se zde jen stručným výkladem věci, a to jen pokud je to v souvislosti s naším článkem. Zájemce o podrobnější studium odkazujeme na literaturu, např. Б. В. ГНЕДЕНКО, *Курс теории вероятностей*, М., 1954; Н. АРЛЕЙ, К, БУХ, *Введение в теорию вероятностей и математическую статистику*, М., 1951.

[28]) Některé z těchto vzorců se uvádějí v literatuře buď jako axiomy, nebo jako důsledky — podle toho, která axiomatická soustava byla zvolena za základ.

Jev, spočívající v tom, že jev A *nenastane*, nazývá se komplementární k A a označuje se $\bar{A}$. Jevy A a $\bar{A}$ se vzájemně vylučují, jev $A \cup \bar{A}$ je jistý. Z toho a z předcházejících vztahů plyne $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

3. Předpokládejme, že pokus α má nutně za následek jeden z jevů A_i, $i = 1, 2, \dots, n$, tj. $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = U$, tedy $\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1$. Nechť dále $A_i \cap A_k = V$, $i \neq k$, tj. $P(A_i \cap A_k) = 0$, $i \neq k$. Spočívá-li jev A_i ve výskytu čísla x_i, říkáme, že pokus α má za výsledek *náhodnou* veličinu (náhodnou proměnnou) ξ, jež nabývá hodnot x_i, $i = 1, 2, \dots, n$. Analogicky se zavádí dvojrozměrná náhodná veličina (ξ, η), jejímiž hodnotami jsou dvojice (x_i, y_j), $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, m$.

Pro pravděpodobnostní charakterisování náhodné veličiny musí být udány pravděpodobnosti, s nimiž může nabýt svých hodnot. Pro náhodnou veličinu ξ musí být udáno n čísel $p_1, p_2, \dots, p_n$, kde p_i je pravděpodobnost, že ξ nabude hodnoty x_i. Vzhledem k tomu, že některé z hodnot x_i veličina ξ jistě nabude, je $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. Jsou-li všechny hodnoty x_i stejně pravděpodobné, je $p_i = \frac{1}{n}$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Zcela analogicky se charakterisuje veličina (ξ, η) nm pravděpodobnostmi p_{ij}, $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, m$, při čemž $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} p_{ij} = 1$.

Funkcí f náhodné veličiny ξ je náhodná veličina $f(\xi)$, nabývající hodnot $f(x_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$. *Střední hodnotou*[29]) funkce f se nazývá číslo $\mathbf{E}f(\xi) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\, p_i$[30]).

Analogicky je střední hodnota funkce f náhodné veličiny (ξ, η) číslo $\mathbf{E}f(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(x_i, y_j)\, p_{ij}$.

Jsou-li náhodné veličiny ξ, η nezávislé, tj. nabývá-li ξ hodnot x_i s pravděpodobností p_i a η nezávisle na ξ hodnot y_j s pravděpodobností q_j ($i = 1, 2, \dots, n$), $j = 1, 2, \dots, m$), je (podle formule $P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$) $\mathbf{E}f(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(x_i, y_j)\, p_i q_j$. Právě tato formule má základní význam v teorii smíšených strategií, neboť ryzí strategie x a y volí hráči vzájemně nezávisle.

Náhodná veličina může být také spojitá, tj. může nabýt libovolné hodnoty z jednorozměrných nebo dvojrozměrných intervalů. Pravděpodobnostní charakteristiky spojitých náhodných veličin jsou tzv. *hustoty rozdělení*. Pro veličinu ξ se hustota rozdělení $p(x)$ definuje vztahem $P\{x \leqq \xi < x + \mathrm{d}x\} =$

---

[29]) Viz poznámku [3]). *J. V.*

[30]) Znak $\mathbf{E}$ je odvozen z německého a anglického termínu (*Erwartungswert, expectancy*). V literatuře se používá také znaku $\mathbf{M}$, odvozeného z německého *Mittelwert*. V ruském originále je střední hodnota značena pruhem nahoře: $\mathbf{E}f(\xi) = \overline{f(\xi)}$. *J. V.*

$= p(x)\,\mathrm{d}x + o(\mathrm{d}x)$, kde levá strana znamená pravděpodobnost, že náhodná veličina padne do intervalu $(x, x + \mathrm{d}x)$ a $o(\mathrm{d}x)$ je nekonečně malou veličinou vyššího řádu než $\mathrm{d}x$[31]).

Z uvedeného vztahu plyne $P\{\lambda_1 < \xi < \lambda_2\} = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} p(x)\,\mathrm{d}x$. Zřejmě $\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\,\mathrm{d}x = 1$.[32])

Hustota rozdělení $p(x, y)$ dvojrozměrné náhodné veličiny se definuje vztahem $P\{x < \xi < x + \mathrm{d}x;\ y < \eta < y + \mathrm{d}y\} = p(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + o(\sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2})$.

Pravděpodobnost $p(\mathcal{M})$, že (ξ, η) padne do oboru $\mathcal{M}$ (roviny (x, y)) se vyjadřuje formulí $P(\mathcal{M}) = \int\int_{\mathcal{M}} p(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$. Platí $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} p(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 1$[33]).

Střední hodnota funkce f náhodné veličiny ξ se definuje formulí $\mathbf{E}f(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x)\,f(x)\,\mathrm{d}x$ a v dvojrozměrném případě formulí $\mathbf{E}f(\xi, \eta) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)$ $p(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$. Jsou-li ξ a η vzájemně nezávislé náhodné veličiny s hustotami rozdělení $p(x)$, a $q(y)$, jak se dá snadno ukázat, je $p(x, y) = p(x)\,q(y)$ a $\mathbf{E}f(\xi, \eta) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\,q(y)\,f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$. Spojité i nespojité náhodné veličiny lze popsat jednotně tzv. *funkcemi rozdělení*. V jednorozměrném případě (ξ) se funkce rozdělení P definuje vztahem $P(x) = P\{-\infty < \xi \leqq x\}$. Je-li ξ spojitá, je zřejmě $P(x) = \int_{-\infty}^{x} p(u)\,\mathrm{d}u$ a $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} = p(x)$.

Funkce P může být obecně nediferencovatelná. Pak $\mathbf{E}f(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}P(x)$ a $\mathbf{E}f(\xi, \eta) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,\mathrm{d}P(x)\,\mathrm{d}Q(y)$.[34])

4. Praktický význam pojmu střední hodnoty funkce náhodné veličiny plyne z této poučky:

Nechť se n pokusy získá n hodnot funkce f jednorozměrné nebo dvojrozměrné náhodné veličiny: $f_1, f_2, \ldots, f_n$. Za dosti obecných podmínek platí pak: Pravděpodobnost, že aritmetický průměr $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_i$ se bude lišit od střední hodnoty $\mathbf{E}f$ o méně než $\varepsilon > 0$, konverguje s rostoucím n k nule:

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{|\mathbf{E}f - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_i| > \varepsilon\right\} = 0.$$

Při velkých sériích zkoumání se tedy aritmetický průměr hodnot funkce f velmi zřídka podstatně odchýlí od její střední hodnoty $\mathbf{E}f$.

Přeložil (místy volně) *Josef Veselka*

---

[31]) Tj. $\lim_{\Delta x\to 0} \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} = 0$. *J. V.*

[32]) Píšeme od $-\infty$ do ∞ místo od λ_1 do λ_2, neboť předpokládáme, že vně intervalu (λ_1, λ_2) je $p(x) = 0$.

[33]) Nekonečné meze z analogických důvodů jako v jednorozměrném případě. Viz pozn. [32]). *J. V.*

[34]) Tzv. Stieltjesovy integrály. Viz o tom např. Х. ГОХМАН, *Интеграл Стильтьеса и его приложения,* М., 1958.