Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Boris Vladimirovich Gnedenko

Lokální limitní věta pro součet nezávislých, stejně rozdělených náhodných veličin

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 1 (1956), No. 1, 3--13

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/137253

Prof. B. V. GNĚDĚNKO

LOKÁLNÍ LIMITNÍ VĚTA PRO SOUČET NEZÁVISLÝCH STEJNĚ ROZDĚLENÝCH NÁHODNÝCH VELIČIN

О ЛОКАЛЬНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЕ ДЛЯ ОДИНАКОГО РАСПРЕДЕЛЕННЫХ НЕЗАВИСИМЫХ СЛАГАЕМЫХ

(*Wiss. Zeitschrift der Humboldt-Universität zu Berlin*, Math.-naturwiss. Reihe, č. 4, roč. III, 1953/54, str. 287—293)

V posledních dvaceti letech byly značně propracovány a v některých úsecích i dovršeny klasické otázky, týkající se součtu nezávislých náhodných veličin a jejich asymptotických zákonitostí. Pokroky na tomto poli našly odezvu v řadě důležitých prací theoretických a také v monografiích P. Lévyho [1], H. Craméra [2], A. Ja. Chinčina [3], B. V. Gněděnka a A. N. Kolmogorova [4]. Objevy mají nejen theoretický matematický význam, ale bylo jich využito i v řadě jiných přírodovědeckých oborů, na př. ve statistické mechanice A. Ja. Chinčinem ([5], [6], [7]). Hlavní myšlenkou Chinčinových bádání bylo převést matematický rozbor základních problémů statistické mechaniky na dobře známé výsledky theorie načítávání náhodných veličin. V předmluvě k [7] o tom Chinčin píše: „*I v kvantové statistice si kladu za cíl ukázat, že přesné, logicky uspořádané matematické zdůvodnění různých vztahů statistické fysiky nepotřebuje, jak se obvykle myslelo, speciálního těžkopádného analytického aparátu (methoda Darwinova-Fowlerova), ale že ho lze dosáhnout jednoduchou redukcí všech zde vznikajících úloh na dobře propracované limitní věty theorie pravděpodobnosti.*"

V theorii pravděpodobnosti samé zůstávají theorie načítávání náhodných veličin a limitní věty pro součty i nadále jednou ze základních cest jejího rozvoje. Mnohé partie theorie pravděpodobnosti se opíraly při svém vzniku o theorii načítávání náhodných veličin a nadále se ve velké míře zabývají jejími výsledky. V nejposlednější době znovu vzrostl zájem o limitní věty v souvislosti s řadou nových důležitých úloh. Hlavní zájem vábí právě načítávání stejně rozdělených nezávislých náhodných veličin, a to proto, že na tomto zvláštním případě lze velmi jednoduše zjišťovat nové zákonitosti a vypracovávat nové důkazové methody.

V tomto článku pojednáme o jedné z asymptotických zákonitostí pro součet stejně rozdělených nezávislých sčítanců, v posledních letech velmi aktuální. Jde o t. zv. lokální věty. Prvním výsledkem v tomto směru je známá klasická limitní věta Moivreova-Laplaceova, kterou dnes najdeme v každé trochu úplnější učebnici počtu pravděpodobnosti. Pozdější lokální věty studovali H. Cramér [8], R. Mises [9], G. M. Bayli [10] a C. Essen [11].

Potřeby statistické fysiky vyvolaly další zájem o lokální věty, neboť právě tyto věty umožnily A. Ja. Chinčinovi jednoduchý přístup k řešení úloh klasické i kvantové statistiky.

Vycházeje zejména z těchto potřeb ukázal jsem v pracích [12], [14], [15], [16],

[17][1]) použitelnost lokální limitní věty pro případ načítávání stejně rozdělených řešetovitých náhodných veličin. Zobecnění výsledků na vícerozměrný případ zkoumali D. G. Mejzler, O. S. Parasjuka, J. L. Rvačeva ([13,] [18], [19]). Ukázalo se, že k úplnému řešení úlohy je užitečné formulovat podmínky konvergence distribučních funkcí k limitnímu rozdělení jinak, než jak to činí P. Lévy, V. Feller a A. Ja. Chinčin pro limitní normální rozdělení a B. V. Gněděnko a V. Doblin pro ostatní stabilní rozdělení (viz [4], str. 185—196). Pro normální limitní rozdělení byly tyto nové podmínky formulovány a dokázány v [17], analogické věty pro ostatní rozdělení v [20]. Rozborem limitních vět pro součty různě rozdělených řešetovitých náhodných veličin se zabývají práce [9] a [10].

Jiný důležitý případ, v němž má smysl mluvit o lokálních větách, se vztahuje k existenci hustot pravděpodobností u součtů. Tak byla pojata úloha v pracích [8], [5] a [21] (viz též [4], str. 238—245). V žádné z těchto prací není konečných výsledků. To přivedlo A. N. Kolmogorova na myšlenku uvažovat lokální věty pro hustoty pravděpodobnosti v metrice odlišné od metriky Čebyševovy. V tomto směru se podařilo J. V. Prochorovovi [22] najít nutnou a postačující podmínku pro lokální větu pro případ součtů stejně rozdělených náhodných veličin ve smyslu konvergence hustoty podle středu. Ukážeme zde, že je možno najít nutnou a postačující podmínku pro konvergenci hustot rozdělení pravděpodobností ve smyslu stejnoměrné konvergence.

Dále uvedené pojednání je věnováno podrobnému propracování lokálních vět pro součet stejně rozdělených a nezávislých náhodných veličin právě v obou zmíněných případech.

§ 1. Stabilní rozdělení a jejich konvergenční obory

Uvažujme posloupnost vzájemně nezávislých náhodných veličin $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$, které mají stejnou distribuční funkci $F(x) = P\{\xi_n < x\}$. P. Lévy a A. Ja. Chinčin našli v r. 1936 řešení úlohy (viz [4], str. 177—185), jaké distribuční funkce mohou vystupovat jako limitní pro distribuční funkce součtů

$$S_n = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n - A_n}{B_n}, \tag{1}$$

pro $n \to \infty$ a pro konstanty $B_n > 0$ a A_n. Ukázalo se, že distribuční funkce může vystupovat jako limitní tehdy a jen tehdy, když je stabilní. Pro naše potřeby vyjádříme stabilní rozdělení takto: distribuční funkce $\Phi(x)$ je stabilní tehdy a jen tehdy, lze-li logaritmus její charakteristické funkce vyjádřit ve tvaru

$$\lg \varphi(t) = i\gamma t - c\,|t|^{\alpha} \left\{1 + i\beta \frac{t}{|t|}\,\omega(t, \alpha)\right\}, \tag{2}$$

kde α, β, γ, c jsou reálné konstanty ($0 < \alpha \leqq 2$, $-1 \leqq \beta \leqq 1$, $c \geqq 0$, $-\infty < \gamma < \infty$) a $\omega(t, \alpha) = \operatorname{tg} \frac{\pi\alpha}{2}$ pro $\alpha \neq 1$ a $\omega(t, \alpha) = \frac{2}{\pi} \lg |t|$ pro $\alpha = 1$. Číslo α budeme nazývat charakteristickým ukazatelem stabilního rozdělení $\Phi(x)$.

Je jasné, že všechna stabilní rozdělení jsou spojitá a že mají derivace všech řádů (viz na př. [4], str. 196—197). Stabilní rozdělení mají tedy hustoty pravděpodobností. Pro rozdělení (2) označíme hustotu symbolem $p(x; \alpha, \beta, \gamma, c) =$

[1]) Do důkazu věty v [17] se vloudila numerická chyba, která však nemá vliv na výsledek.

$= \dfrac{d}{dx}\Phi(x)$. Tak na př. $p\left(x;\ 2,\ \beta,\ 0,\ \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)$, $p(x; 1, 0, 0, 1) =$
$= \dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$.

Množina všech distribučních funkcí $F(x)$, pro které při vhodné volbě konstant $B_n > 0$ a A_n distribuční funkce součtů (1) konverguje k distribuční funkci $\Phi(x)$, se nazývá konvergenčním oborem distribuční funkce $\Phi(x)$. Konvergenční obory stabilních hustot pravděpodobností jsou určeny těmito dvěma větami:

Věta A. Distribuční funkce $F(x)$ náleží konvergenčnímu oboru normálního rozdělení tehdy a jen tehdy, když $\dfrac{x^2\,[1 - F(x) + F(-x)]}{\int_{-x}^{x} z^2\,dF(z)} \to 0 \ (x \to \infty)$.

Věta B. Distribuční funkce $F(x)$ náleží konvergenčnímu oboru stabilního rozdělení $(0 < \alpha < 2)$, definovaného vztahem (2), tehdy a jen tehdy, když při $x \to \infty$ $\dfrac{F(-x)}{1 - F(x)} \to \dfrac{c_1}{c_2}$, a při libovolném $k > 0$ $\dfrac{1 - F(x) + F(-x)}{1 - F(kx) + F(-kx)} \to k^{\alpha}$.

Konstanty c_1, c_2 jsou s parametry α, β, γ, c vázány vztahy:

$$\text{pro } 0 < \alpha < 1:\ c_1 = -\frac{\alpha c}{2\,L(\alpha)\cos\dfrac{\pi\alpha}{2}}(1+\beta),\quad c_2 =$$

$$= -\frac{\alpha c}{2\,L(\alpha)\cos\dfrac{\pi\alpha}{2}}(1-\beta),$$

$$\text{pro } \alpha = 1:\ c_1 = \frac{c}{\pi}(1+\beta),\quad c_2 = \frac{c}{\pi}(1-\beta),$$

$$\text{pro } 1 < \alpha < 2:\ c_1 = -\frac{\alpha c}{2\,K(\alpha)\cos\dfrac{\pi\alpha}{2}}(1+\beta),\quad c_2 =$$

$$= -\frac{\alpha c}{2\,K(\alpha)\cos\dfrac{\pi\alpha}{2}}(1-\beta).$$

V těchto rovnicích je $L(\alpha) = \int_0^\infty (\exp(-z) - 1)\,z^{-(1+\alpha)}\,dz$, $K(\alpha) = \int_0^\infty (\exp(-z) - 1 + z)\,z^{-(1+\alpha)}\,dz$. Normovací koeficienty B_n jsou určeny pro $\alpha \neq 2$ jako nejmenší čísla vyhovující nerovnostem $1 - F(x+0) + F(-x) \leqq \dfrac{1}{n} \leqq 1 - F(x) + F(-x+0)$, a pro $\alpha = 2$ jako kořeny rovnic $n\int_{|z|<B_n} z^2\,dF(z) = B_n$.

Lze dokázat, že pro libovolné kladné ε a $0 < \alpha \leqq 2$ platí $B_n = 0(n^{\frac{1}{\alpha}+\varepsilon})$, $n = 0\,(B_n^{\alpha+\varepsilon})$.

Pro naše další účely je výhodné zapsat podmínky pro to, aby fumkce $F(x)$ patřila do konvergenčního oboru stabilního rozdělení $\Phi(x)$, definovaného vztahem (2), s použitím pojmu charakteristické funkce.

Budiž $f(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp(itx)\, dF(x)$.

Věta C. Distribuční funkce $F(x)$ náleží do konvergenčního oboru stabilního rozdělení $\Phi(x)$ tehdy a jen tehdy, když pro libovolné $s \geqq 0$ při $t \to 0$ stejnoměrně v s je splněna jedna z podmínek:

1. Pro $\alpha = 2$ (normální limitní rozdělení) $\dfrac{R \lg \tilde{f}(st)}{R \lg \tilde{f}(t)} \to s^2$;

2. pro $0 < \alpha < 2$, $\alpha \neq 1$ a) $\dfrac{R \lg \tilde{f}(st)}{R \lg \tilde{f}(t)} \to s^\alpha$,

b) $\dfrac{I \lg \tilde{f}(st)}{R \lg \tilde{f}(t)} \to \beta s^\alpha \operatorname{tg} \dfrac{\pi \alpha}{2}$;

3. Pro $\alpha = 1$ a) $\dfrac{R \lg f(st)}{R \lg f(t)} \to s^\alpha$,

b) $\dfrac{I\,[\lg f(st) - s \lg f(t)]}{R \lg f(t)} \to \dfrac{2\beta}{\pi} s \lg s$.

Při tom je $\tilde{f}(t) = f(t)$ pro $\alpha < 1$, $\tilde{f}(t) = f(t) \exp(-iat)$ pro $\alpha > 1$, $a = M\xi_n =$
$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} x\, dF(x)$.

Důkaz této věty není obtížný. Stačí brát podmínku konvergence distribučních funkcí přepsanou pomocí charakteristických funkcí, určit volbu konstant A_n pro konvergenci distribučních funkcí součtů S_n k limitní funkci a ukázat, že normovací konstanty B_n lze přitom zvolit podle pravidla: B_n je největším kořenem rovnice $n \lg f(x^{-1}) = -c$.

§ 2. Lokální věta pro součty řešetovitých náhodných veličin

Náhodná veličina se nazývá řešetovitou, nabývá-li jen hodnot, které lze vyjádřit aritmetickou řadou $a + kh$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Označíme $p_k =$
$= P\{\xi = a + kh\}$; pak $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} p_k = 1$, protože veličina ξ může nabývat jen hodnot typu $a + kh$.

Některé z řešetovitých náhodných veličin mají velkou úlohu v počtu pravděpodobnosti. Na příklad:

a) číslo μ, které značí počet případů, kdy nastal jev A v n nezávislých pokusech, může nabývat jen hodnot 0, 1, 2, ..., n s pravděpodobnostmi $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, n)$;

b) náhodná veličina má Poissonovo rozdělení. Hodnoty, kterých může nabývat, mají tvar $a + kh$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$), a může jich nabývat s pravděpodobnostmi $P_k = \dfrac{\lambda^k \exp(-\lambda)}{k!}$ ($\lambda > 0$).

Pro první z uvedených případů platí známá lokální limitní věta Moivreova-Laplaceova, podle níž $\sqrt{npq}\, P_n(m) - \dfrac{2}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\dfrac{x^2}{2}\right) \to 0$ ($n \to \infty$) stejnoměrně v m. Zde značí $x = x_{n,m} = \dfrac{m - np}{\sqrt{npq}}$.

Další výsledek je přímým zobecněním lokální věty Moivreovy-Laplaceovy na součty řešetovitých náhodných veličin:

Nechť veličiny $\xi_1, \xi_2, \ldots$ jsou řešetovité nezávislé a nechť mají stejná rozdělení. Pak součty $\sigma_n = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n$ jsou rovněž řešetovité. Zaveďme označení $P_n(k) = P\{\sigma_n = an + kh\}$. Parametr h budeme nazývat krokem rozdělení. Krok nazveme maximální, jestliže pro žádné b ($-\infty < b < \infty$) a $h_1 > h$ nelze vyjádřit všechny hodnoty veličiny ξ ve tvaru $b + kh_1$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$).

Věta. Nechť náhodné veličiny $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ jsou nezávislé, stejně rozdělené a řešetovité. K tomu, aby existovaly A_n a $B_n > 0$ tak, aby platilo

$$\sup_{-\infty < k < \infty} \left\{\frac{B_n}{h} P_n(k) - p(z_{nk}; \alpha, \beta, \gamma, c)\right\} \to 0 \quad (n \to \infty), \tag{3}$$

kde $z_{nk} = \dfrac{an + kh - A_n}{B_n}$, je nutné a stačí, aby

1. distribuční funkce $F(x)$ náležela do konvergenčního oboru stabilního rozdělení $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} p(z; \alpha, \beta, \gamma, c)\, dz$ (pro konvergenci distribučních funkcí součtů (1) s uvedenými konstantami A_n a B_n),
2. krok rozdělení byl maximální.

Důkaz nutnosti podmínky je téměř triviální. Není-li totiž krok h maximální, budou možné hodnoty součtu $\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n$ ($n = 1, 2, \ldots$) obsahovat systematické mezery: rozdíl dvou nejbližších možných hodnot součtu nemůže být menší než dh, kde d je největší společný dělitel dvojic rozdílů hodnot ξ_k dělených h. Není-li h maximální krok, je $d > 1$ pro všechny hodnoty n. Na druhé straně plyne z (3) vztah $P\left\{\dfrac{\sigma_n - A_n}{B_n} < x\right\} \to \Phi(x)$ ($n \to \infty$). Jinak řečeno, $F(x)$ náleží do konvergenčního oboru stabilního rozdělení $\Phi(x)$.

Důkaz postačitelnosti je složitější. Charakteristická funkce veličiny ξ_k je $f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_k \exp(iat + ithk) = \exp(iat) \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_k \exp(ithk)$, a charakteristická funkce součtu s_n je $f^n(t) = \text{epx}(iant) \sum_{k=-\infty}^{\infty} P_n(k) \exp(itkh)$. Vynásobíme poslední rovnici výrazem $\exp(-it(an + kh))$ a integrujeme od $-\dfrac{\pi}{h}$ do $\dfrac{\pi}{h}$; dostaneme $\dfrac{2\pi}{h} P_n(k) =$

$$= \int_{-\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}} f^n(t) \exp(-iant - itkh)\, dt.$$ Je nyní $hk = B_n z_{nk} + A_n - an$ (dále budeme psát všude z místo z_{nk}), tedy $\frac{2\pi}{h} P_n(k) = \int_{-\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}} \bar{f}^n(t) \exp(-izt B_n)\, dt$, kde $\bar{f}(t) = \exp\left(-\frac{it A_n}{n}\right) f(t)$.

Položíme dále $x = tB_n$ a dostaneme $\frac{2\pi B_n}{h} P_n(k) = \int_{-\frac{\pi B_n}{h}}^{\frac{\pi B_n}{h}} \exp(-ixz) \bar{f}_n\left(\frac{x}{B_n}\right) dx.$

Odtud, protože funkce $\varphi(t) = \exp\left(i\gamma t - c|t|^\alpha \left\{1 + i\beta \frac{t}{|t|} \omega(t, \alpha)\right\}\right) =$ $= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(itx)\, p(x; \alpha, \beta, \gamma, c)\, dx$ je absolutně integrovatelná pro libovolné $\alpha > 0$ $(c \neq 0)$, plyne $2\pi p(x; \alpha, \beta, \gamma, c) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-itx)\, \varphi(t)\, dt.$ Tedy

$$R_n = 2\pi\left(\frac{B_n}{h} P_n(k) - p(z; \alpha, \beta, \gamma, c)\right) = \int_{-\frac{\pi B_n}{h}}^{\frac{\pi B_n}{h}} \exp(-ixz)\, \bar{f}^n\left(\frac{z}{B_n}\right) dx -$$
$$- \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ixz)\, \varphi(x)\, dx.$$

Máme, jak patrno, dokázat, že veličina R_n konverguje k nule stejnoměrně v k $(-\infty < k < \infty)$. Vyjádříme za tím účelem R_n ve tvaru součtu čtyř integrálů

$$I_1 = \int_{-A}^{A} \exp(-ixz)\left[\bar{f}^n\left(\frac{x}{B_n}\right) - \varphi(x)\right] dx, \quad I_2 = \int_{|x|>A} \exp(-ixz)\, \varphi(x)\, dx,$$
$$I_3 = \int_{A<|x|<\varepsilon B_n} \exp(-ixz)\, \bar{f}^n\left(\frac{x}{B_n}\right) dx, \quad I_4 = \int_{\varepsilon B_n \leq |x| < \frac{\pi B_n}{h}} \exp(-ixz\, \bar{f}^n\left(\frac{x}{B_n}\right) dx,$$

kde A je nějaké dosti velké číslo, jehož přesná hodnota bude určena později, a ε je dostatečně malá kladná konstanta.

V důsledku prvé podmínky věty a limitní věty pro charakteristické funkce, stejnoměrně v t $(|t| \leqq A)$ $\bar{f}^n\left(\frac{t}{B_n}\right) \to \varphi(t)$ $(n \to \infty)$ pro libovolné A. Pro $n \to \infty$, tedy $I_1 \to 0$.

Integrál I_2 může být učiněn vzhledem k integrovatelnosti funkce $\varphi(t)$ co do absolutní hodnoty libovolně malým, zvolíme-li dostatečně velké A.

Integrál I_4 odhadneme pomocí věty: krok rozdělení h bude maximální tehdy a jen tehdy, bude-li modul charakteristické funkce veličiny ξ v intervalu

$0 < |t| < \frac{2\pi}{h}$ menší než jedna, a pro $t = \frac{2\pi}{h}$ roven jedné (viz [4], str. 66).

Lze tedy ke každému $\varepsilon > 0$ zvolit takové $c > 0$, že pro $\varepsilon < |t| \leqq \frac{\pi}{h}$ bude $|f(t)| \leqq \exp(-c)$. Tento odhad vede k nerovnosti $|I_4| \leqq \exp(-nc) \int\limits_{\varepsilon \leqq |x| \leqq \frac{\pi B_n}{h}} dx < \frac{2\pi B_n}{h} \exp(-nc)$. Protože B_n roste pomaleji než $n^{\frac{1}{\alpha}+\varepsilon}$, platí $I_4 \to 0$ $(n \to \infty)$.

Integrál I_3 se odhadne pomocí věty C. Podle prvé podmínky této věty pro libovolné $s \geqq 0$ při $t - 0$ $\frac{R \lg f(st)}{R \lg f(t)} \to s^\alpha$ $(0 < \alpha \leqq 2)$ stejnoměrně v s. Tedy při dostatečně malém ε je pro $|t| \leqq \varepsilon$ $\frac{R \lg f(st)}{R \lg f\left(\frac{1}{2} t\right)} = 2^\alpha + \eta_t$, kde $|\eta_t| \leqq$

$$\leqq \eta \leqq \frac{2^\alpha - 1}{2}. \text{ Nyní } |I_3| < \int\limits_{A \leqq |x| \leqq \varepsilon B_n} \left|f\left(\frac{x}{B_n}\right)\right|^n dx \leqq$$

$\leqq \sum\limits_{s=0}^{k} \int\limits_{2^s A \leqq |x| < 2^{s+1} A} \left|f\left(\frac{x}{B_n}\right)\right|^n dx$, kde $2^k A \leqq \varepsilon B_n < 2^{k+1} A$. Z předešlého plyne $|I_3| \leqq \sum\limits_{s=0}^{k} \int\limits_{A \leqq |t| < 2A} \exp\left(nR \lg f\left(\frac{t}{B_n}\right) (2^\alpha - 1)\, s\right) 2^s\, dt$.

A protože $F(x)$ patří do konvergenčního oboru stabilního rozdělení, bude v intervalu $A \leqq |t| < 2A$ $nR \lg f\left(\frac{t}{B_n}\right) = -c\,|t|^\alpha + o(1) < -\frac{c}{2}|t|^\alpha$. Bude

$$\text{tedy } |I_3| \leqq \sum_{s=0}^{k} \int\limits_{A < |t| < 2A} \exp\left(-\frac{c}{2}|t|^\alpha (2^\alpha - \eta)^s\right) 2^s\, dt =$$

$= \sum\limits_{s=0}^{k} \int\limits_{2^s A \leqq |t| < 2^{s+1} A} \exp\left(-\frac{c}{2}|t|^\alpha \left(1 - \frac{\eta}{2^\alpha}\right)^s\right) dt$. Snadno se lze přesvědčit, že zvolíme-li dostatečně velké A, můžeme uvažovaný součet integrálů učinit menším než předem dané číslo. Tím je věta dokázána.

§ 3. Lokální limitní věta pro hustoty pravděpodobností

Nechť při nějakém n má součet (1) hustotu rozdělení pravděpodobností $p_n(x)$. Snadno se přesvědčíme, že při $N > n$ budou také existovat hustoty rozdělení pravděpodobností σ_N.

Věta. K tomu, aby při $n \to \infty$ $\sup\limits_x \{p_n(x) - p(x; \alpha, \beta, \gamma, c)\} \to 0$, je nutné a stačí, aby byly splněny tyto dvě podmínky:

1. distribuční funkce $F(x)$ patří do konvergenčního oboru stabilního rozdělení definovaného vztahem (2),

2. existuje takové n_0, že distribuční funkce součtu σ_{n0} je absolutně spojitá a její derivace omezená.

Nutnost prvé podmínky je zřejmá. Nutnost druhé podmínky plyne z toho, že limitními rozděleními pro součty (1) mohou být jen stabilní rozdělení, pro která je derivace omezená.

V důkazu postačitelnosti se budeme opírat o tuto větu o Fourierových transformacích (viz na př. [23], str. 22):

Nechť je funkce $g(x)$ absolutně integrovatelná, spojitá a omezená, a nechť její Fourierova transformace $\varphi(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp(itx)\, g(x)\, dx$ je nezáporná. Pak $\varphi(t)$ je absolutně integrovatelná.

Podle podmínky věty je hustota rozdělení pravděpodobností součtu σ_{n0} omezená, existuje tedy konstanta C taková, že pro všechna x $(0 \leqq p_{n0}(x) \leqq C)$ charakteristická funkce pro σ_{n0} je $f^{n_0}(t)$. Uvažujme nyní náhodnou veličinu ξ, nezávislou na σ_{n0}, ale se stejným rozdělením. Hustota rozdělení pravděpodobností veličiny $\eta = \sigma_{n0} - \xi$ bude $\tilde{p}_{n0}(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} p_{n0}(x+z)\, p_{n0}(z)\, dz$. Z této rovnice plyne ihned omezenost funkce $\tilde{p}_{n0}(x)$. Z další jednoduché úvahy plyne, že funkce $\tilde{p}_{n0}(x)$ je stejnoměrně spojitá na celé ose x. Pro libovolné h je $\tilde{p}_{n0}(x+h) - \tilde{p}_{n0}(x) \leqq \int\limits_{-\infty}^{\infty} [p_{n0}(x+h+z) - p_{n0}(x+z)]\, p_{n0}(z)\, dz \leqq C \int\limits_{-\infty}^{\infty} [p_{n0}(z+h) - p_{n0}(z)]\, dz$. V důsledku známé Lebesgueovy věty integrál na pravé straně nerovnosti konverguje při $h \to 0$ k nule pro každou integrovatelnou funkci $p_{n0}(z)$.

Charakteristická funkce veličiny η je $|f(t)|^{2n_0}$ a tudíž nezáporná. Funkce $|f(t)|^{2n_0}$ je podle uvedené věty integrovatelná, a vzhledem k $|f(t)| \leqq 1$ je funkce $f^n(t)$ rovněž integrovatelná pro libovolné $n \geqq 2n_0$, kde n_0 je číslo definované v podmínce věty. Funkce $f^n(t)$ jsou tedy pro $n \geqq 2n_0$ absolutně integrovatelné.

Protože charakteristická funkce součtu (1) je $f_n(t) = \exp\left(-it\dfrac{A_n}{B_n}\right) f^n\left(\dfrac{t}{B_n}\right)$, můžeme pro $n > 2n_0$ v souhlase s právě řečeným napsat rovnici $2\pi p_n(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp(-itx)\, f^n\left(\dfrac{t}{B_n}\right) \exp\left(-it\dfrac{A_n}{B_n}\right) dt$. Pro hustotu limitního rozdělení platí $2\pi p(x;\alpha,\beta,\gamma,c) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp(-itx)\, \varphi(t)\, dt$, stačí tedy dokázat, že stejnoměrně v x $(-\infty < x < \infty)$ při $n \to \infty$ $I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp(-itx) \left[f^n\left(\dfrac{t}{B_n}\right) \exp\left(-it\dfrac{A_n}{B_n}\right) - \varphi(t)\right] dt \to 0$.

Za tím účelem vyjádříme integrál I ve tvaru součtu těchto čtyř integrálů:

$$I_1 = \int\limits_{-A}^{A} \exp(-itx) \left[f^n\left(\frac{t}{B_n}\right) \exp\left(-it\frac{A_n}{B_n}\right) - \varphi(t)\right] dt,\ I_2 =$$

$$= -\int_{|t|>A} \exp(-itx)\ \varphi(t)\,\mathrm{d}t, \quad I_3 = \int_{A<|t|\leqq\varepsilon B_n} \exp\left[-it\left(x+\frac{A_n}{B_n}\right)\right] f^n\left(\frac{t}{B_n}\right)\mathrm{d}t,$$

$$I_4 = \int_{|t|>\varepsilon B_n} \exp\left[-it\left(x+\frac{A_n}{B_n}\right)\right] f^n\left(\frac{t}{B_n}\right)\mathrm{d}t.$$

Důkaz stejnoměrné konvergence integrálů I_1 a I_2 a odhad integrálu I_3 jsme provedli výše. Integrál I_4 se odhaduje pomocí vlastností charakteristických funkcí absolutně spojitých funkcí. Pro charakteristickou funkci absolutně spojitého rozdělení existuje ke každému $\varepsilon > 0$ takové $c = c(\varepsilon) > 0$, že pro $|t| \geqq \varepsilon\ |f(t)| < \exp(-c)$. Zřejmě je $|f(t)|^{2n_0} < \exp(-c)$, a poněvadž B_n roste pomaleji než $n^{\frac{1}{\alpha}+\varepsilon}$, platí $|f^n(t)| \leqq \exp\left(-c\left(\frac{n}{2n_0}-1\right)\right) B_n \int_{|t|>\varepsilon} |f(t)|^{2n_0}\,\mathrm{d}t \to 0\ (n\to\infty)$, čímž je věta dokázána.

V souvislosti s právě dokázanou větou vyvstávají nutně tyto otázky:

1. Jakým podmínkám musí vyhovovat distribuční funkce $F(x)$, aby bylo nalezeno takové číslo n celé, pro které funkce $F_n(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F_{n-1}(x-z)\,\mathrm{d}F(z)$, $(F_1(x) = F(x))$, je absolutně spojitá?

2. Libovolná distribuční funkce $F(x)$ může být uvedena na tvar

$$F(x) = a\overline{F}(x) + b\overline{\overline{F}}(x), \tag{4}$$

kde $\overline{F}(x)$ a $\overline{\overline{F}}(x)$ jsou distribuční funkce, $a \geqq 0$, $b \geqq 0$ $a + b = 1$. Funkce $\overline{F}(x)$ je absolutně spojitá, funkce $\overline{\overline{F}}(x)$ roste na množině míry nula. Vzniká otázka: bude derivace složky $\overline{F}_N(x)$ omezená pro libovolné $N > n$, když konstanta a_n bude pro některá n v tomto rozkladu různá od nuly pro funkci $F_n(x)$ a derivace $\overline{F}_n(x)$ omezená?

3. Za jakých podmínek pro funkci $F(x)$ lze najít takové číslo n, aby v rozdělení (4) funkce $F_n(x)$ byla konstanta a_n kladná?

Závěrečné poznámky

Věty dokázané výše potřebují některé doplňky. Tak je nutno vyšetřit rychlost konvergence k nule rozdílů, které vystupují v lokálních větách. Některé výsledky v tomto směru lze najít v [4] a [11]. Všechny se vztahují jen na konvergenci k normálnímu rozdělení.

Lokální věty se dále zkoumají také ve smyslu jiných konvergencí než konvergence stejnoměrné. Ve smyslu konvergence podle středu byly zkoumány v práci [2].

Přirozeně vzniká problém rozšířit lokální limitní věty na libovolná neomezeně dělitelná rozdělení s hustotami pravděpodobností, a to jak pro konvergenci stejnoměrnou, tak pro jiné typy konvergence.

Přímým zobecněním musí být jejich zobecnění na součty náhodných veličin s různým rozdělením. Jeden ze starších výsledků (Poisson) je tento: Mějme posloupnost vzájemně nezávislých pokusů, v každém z nichž se může realisovat jev A. Pravděpodobnost realisace A v k-tém pokusu je p_k. Nechť je dále $P_n(m)$ pravděpodobnost, že se mezi prvými pokusy vyskytne jev A $m$krát, $z = \frac{m - \sum_{k=1}^{n} p_k}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n} p_k q_k}}$,

potom vztah $(q_k = 1 - p_k)$ $\sqrt{\sum_{k=1}^{n} p_k q_k}\, P_n(m) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) \to 0 \ (n \to \infty)$

platí stejnoměrně v m tehdy a jen tehdy $(-\infty < m < \infty)$, když $\sum_{k-1}^{n} p_k q_k \to \infty \ (n \to \infty)$.

Zobecnění této věty na jiné řešetovité náhodné veličiny s nestejným rozdělením je v [9] a [10]. Snadno lze odvodit ještě širší větu:

Nechť náhodné veličiny

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots \tag{5}$$

jsou nezávislé, a každá z nich nechť může nabývat jen hodnot, jež lze vyjádřit aritmetickou řadou $a + kh$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Náhodné veličiny (5) mají matematické naděje a rozptyly $a_n = M\,\xi_n$, $b_n^2 = D\,\xi_n$, $B_n^2 = \sum_{x=1}^{n} b_n^2$. Nechť dále $P_n(k)$ je pravděpodobnost rovnice $\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n = na + kh$ a $z = \frac{na + kh - \sum_{1}^{n} a_n}{B_n}$.

Existují-li čísla $\alpha > 0$ a β, takže $\alpha \leqq b_n^2 \leqq \beta$ $(n = 1, 2, \ldots)$, potom platí stejnoměrně v k $(-\infty < k < \infty)$ $\frac{B_n}{h} P_n(k) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) \to 0 \ (n \to \infty)$.

Uvedená věta ovšem zdaleka není konečným řešením. Není složité uvést jiné postačující podmínky pro platnost lokálních vět, a to nejen pro konvergenci k normálnímu rozdělení. Otázka tkví ve vyhledávání nutných a postačujících podmínek pro aplikabilitu lokálních vět v případě různých rozdělení řešetovitých i spojitých náhodných veličin. Formulace konečných výsledků naráží přitom na některé zvláštní potíže. Ukazuje se zejména, že v případě nestejných rozdělení sčítanců mohou při zkoumání lokálního chování pravděpodobností mít podstatnou úlohu jednotliví sčítanci. Ukážeme triviální příklad.

Nechť v posloupnosti (5) může prvá veličina nabývat jen dvou hodnot 0 a 1 s odpovídajícími pravděpodobnostmi $q = 1 - p$ a p. Všichni ostatní sčítanci nechť mohou nabývat hodnot 0 a 2, každou s pravděpodobností $\frac{1}{2}$. Označíme $s_n = \xi_1 + s_n'$, $s_n' = \xi_2 + \xi_3 + \ldots + \xi_n$. Zřejmě $M\,\xi_1 = p$, $M\,\xi_n = 1$, pro $n \neq 1$ a $D\,\xi_1 = pq$, $D\,\xi_n = 1$ pro $n \neq 1$, $Ms_n = n - q$, $Ds_n = n - 1 + pq$, $Ms_n' = n - 1$, $Ds_n' = n - 1$. Nechť $P_n'(2k) = P\{s_n' = 2k.\}$ Podle věty z § 2 je $\frac{\sqrt{n-1}}{2} P_n'(2k) -$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z'^2_{nk}}{2}\right) \to 0 \ (n \to \infty), \text{ kde } z'_{nk} = \frac{2k - (n-1)}{\sqrt{n-1}}.$$ Je jasné, že s_n může nabývat hodnot $0, 1, 2, \ldots, 2n$, při čemž $P\{s_n = 2k\} = qP'_n(2k)$, $P\{s_n = 2k+1\} = pP'_n(2k)$. Tedy $\sqrt{Ds_n}\, P\{s_n = 2k\} \sim q \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2_{n,2k}}{2}\right)$

a $\sqrt{Ds_n}\, P\{s_n = 2k+1\} \sim p \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2_{n,2k+1}}{2}\right)$, kde $z_{nk} = \dfrac{k - \sum_{\tau=1}^{n} a_\tau}{B_n}$.

Odtud je vidět, že při $p = q = \frac{1}{2}$ platí lokální věta, při ostatních nikoli.

Přeložil Jindřich Branžovský.

Literatura

[1] P. Lévy, *Théorie de l'addition des variables aléatoires*, Paris, 1937.

[2] H. Cramér, *Random variables and probability distributions*, Cambridge 1937, ruský překlad Moskva 1947.

[3] A. Ja. Chinčin, *Predělnyje těoremy dlja summ nězavisimych slučajnych veličin*, GONTI 1938.

[4] B. V. Gněděnko i A. N. Kolmogorov, *Predělnyje raspredělenija dlja summ nězavisimych slučajnych veličin*, GITTL 1949, maďarské vydání Budapešť 1951.

[5] A. Ja. Chinčin, *Matěmatičeskije osnovanija statističeskoj mechaniky*, Gostěchizdat 1943, vyšlo také anglicky.

[6] A. Ja. Chinčin, *Ob analitičeskom apparatě fizičeskoj statistiki*, Trudy mat. in-a i. V. A. Stěklova, sv. 33, 1950.

[7] A. Ja. Chinčin, *Matěmatičeskije osnovanija kvantovoj statistiki*, GITTL 1951.

[8] H. Cramér, *On the composition of elementary errors*, Skand. Aktuarientidiskrift, 1928, 13—74, 141—180.

[9] R. Mises, *Generalizzazione di un theorema sulla probabilita della somma di un numera illimitato di variabili casuali*, Giornale dell'Ist. degli Attuari, sv. 5, 1934, 483—495.

[10] G. M. Bayli, *O lokalnoj predělnoj těoreme těorii verojatnostěj*, Uč. zap. Sverdlovskogo un. 2, 1937, 7—24.

[11] C. Essen, *Fourier analysis of distribution functions. A math. study of the Laplace-Gaussien law*, Acta Math. 77, 1945, 1—125.

[12] B. V. Gněděnko, *O lokalnoj predělnoj těoreme těorii verojatnostěj*, UMN, sv. 3, č. 3, 1948, 187—194.

[13] D. G. Mejzler, O. S. Parasjuk, J. L. Rvačeva, *O mnogomernoj lokalnoj predělnoj těoreme těorii verojatnostěj*, DAN SSSR, sv. 60, č. 7, 1127—1128.

[14] B. V. Gněděnko, *O lokalnoj těoreme dlja oblastěj normalnogo pritjaženija ustojčivych zakonov*, DAN SSSR, sv. 66, č. 3, 1949, 325—326.

[15] B. V. Gněděnko, *O lokalnoj predělnoj těoreme dlja slučaja beskoněčnoj dispersii*, Sb. tr. in-a mat. AN USSR, č. 12, 1949, 22—30.

[16] B. V. Gněděnko, *O lokalnoj těoreme dlja predělnych ustojčivych raspredělenij*, Ukr. mat. ž., sv. 1, č. 4, 1949, 3—15.

[17] B. V. Gněděnko, *Ob oblasti pritjaženija normalnogo zakona*, DAN SSSR, sv. 71, č. 3, 1950, 425—428.

[18] J. L. Rvačeva, *Bagatomirna lokalna těorema dlja graničnych stijkich rozpodiliv*, DAN USSR, č. 3, 1950, 183—189.

[19] J. L. Rvačeva, *Mnogomernaja lokalnaja těorema dlja predělnych ustojčivych raspredělenij*, Tr. in-a mat. i mech. AN UzSSR, č. X, část I, 1953, 106—121.

[20] B. V. Gněděnko i V. S. Koroljuk, *Děkilka zauvažen do těorii oblastěj pritjaganija stijkich rozpodiliv*, DAN USSR, č. 4, 1950, 275—278.

[21] B. V. Gněděnko, *Něskolko zamečanij o lokalnoj predělnoj těoreme dlja plotnostěj*, Mat. sb. Kij. gos. un., č. 5, 1951, 21—28.

[22] Ju. V. Prochorov, *Lokalnaja těorema dlja plotnostěj*, DAN SSSR, sv. 83, č. 6, 1952, 797—800.

[23] S. Bochner and K. Chandrasekharen, *Fourier transforms*, Ann. of. Math. Studies, č. 19, 1949.