Jaromír Koliha

Axiomatické zavedení reálných čísel

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 14 (1969), No. 1, 1--14

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/137249

POKROKY MATEMATIKY, FYZIKY A ASTRONOMIE
ROČNÍK XIV – ČÍSLO 1

AXIOMATICKÉ ZAVEDENÍ REÁLNÝCH ČÍSEL

JAROMÍR KOLIHA, Plzeň

Je dlouholetou tradicí, že každá seriózní učebnice matematické analýzy obsahuje kapitolu, v níž je sestrojena množina reálných čísel – nejčastěji na základě Dedekindových řezů. Je to ovšem kapitola, která nepatří do učebnic analýzy, ale do učebnic teoretické aritmetiky. Proti konstruktivnímu postupu mluví i to, že se na samém počátku matematické výuky na vysokých školách jeví jako značně abstraktní a formálně dosti komplikovaný. Důsledkem je potom skutečnost, že se tato partie neprobírá ani na vysokých školách technických (kde se vychází většinou z Fichtengolcovy učebnice [3]) ani na matematicko-fyzikální fakultě Karlovy university (kde se používá Jarníkovy učebnice [4]), ačkoli v obou zmíněných knihách je Dedekindova konstrukce vyložena.

Nejschůdnější cesta pro zavedení reálných čísel je pravděpodobně axiomatická metoda. Příklad tohoto postupu je podán ve vynikající Dieudonnéově knize [2]. V článku budeme analyzovat axiomy definující těleso reálných čísel, přičemž budeme vycházet z předpokladu, že množina $\mathbf{Z}$ celých čísel je už sestrojena (viz např. [5]).

1. GRUPOID, GRUPA, OKRUH

V článku budeme užívat obvyklé množinové symboliky. Množinu skládající se z jediného prvku a označíme (a). Symbolem $M - N$ označujeme *množinový rozdíl*, tj. množinu všech prvků, které leží v M, ale nikoli v N.

Relace R na množině M je určena podmnožinou $\mathscr{R}$ kartézského součinu $M \times M$. Zapisujeme

$$aRb \Leftrightarrow (a, b) \in \mathscr{R}\,, \quad a\bar{R}b \Leftrightarrow (a, b) \notin \mathscr{R}\,.$$

$\bar{R}$ představuje rovněž relaci, zvanou *komplementární* k R.
Řekneme, že relace R je *rovnost* na M, je-li

a) *reflexivní*; aRa pro všechna $a \in M$,
b) *symetrická*; $aRb \Rightarrow bRa$,
c) *tranzitivní*; $aRb,\ bRc \Rightarrow aRc$.

Rovnost většinou značíme symbolem $=$, komplementární relaci $\neq$. Množinou $\mathscr{D}$ (*diagonálou* $M \times M$), skládající se ze všech (a, a), $a \in M$, je určena relace rovnosti, tzv. *základní rovnost* na množině. V dalším textu budeme většinou pracovat s rovnostmi, které nebudou základní.

Operace na množině M je zobrazení množiny $M \times M$ do M. Operace zapisujeme většinou *multiplikativně*

$$(a, b) \to a \,.\, b$$

nebo *aditivně*

$$(a, b) \to a + b \,.$$

Je-li na množině M vedle operace . dána ještě relace R, řekneme, že operace . je *invariantní vzhledem k relaci* R, platí-li

$$aRb,\ cRd \Rightarrow (a \,.\, c)\, R(b \,.\, d) \,.$$

Grupoid je množina G, na které je dána relace rovnosti $=$ a operace ., která je invariantní vzhledem k dané rovnosti. Operace v grupoidu je *asociativní*, když $a \,.\, (b \,.\, c) = (a \,.\, b) \,.\, c$, *komutativní*, když $a \,.\, b = b \,.\, a$. Prvek $e \in G$ je *neutrální prvek* operace ., je-li

$$a \,.\, e = e \,.\, a = a \quad \text{pro všechna} \quad a \in G \,.$$

Prvek $\bar{a} \in G$ je *inverzní* k prvku $a \in G$ (při operaci .), platí-li

$$a \,.\, \bar{a} = \bar{a} \,.\, a = e \,,$$

kde e je neutrální prvek dané operace.

Poznamenejme, že všechny neutrální prvky (pokud existují) jsou si rovny, podobně jsou si rovny všechny inverzní prvky k danému prvku $a \in G$ (pokud ovšem existují).

Grupa je grupoid G s rovností $=$ a operací ., přičemž operace . je asociativní, má neutrální prvek a ke každému prvku $a \in G$ existuje inverzní prvek. V *Abelově* (komutativní) grupě je navíc operace . komutativní.

Grupu G s operací . a neutrálním prvkem e označujeme někdy symbolem $(G, ., e)$.

Množinu G, na níž je definována rovnost $=$ a dvě operace $+$ a . invariantní vzhledem k dané rovnosti, nazveme v tomto článku *okruhem*. (V matematické literatuře se na operace okruhu kladou ještě další podmínky.)

Říkáme, že operace $+$ je *distributivní* vzhledem k operaci ., platí-li

$$a \,.\, (b + c) = a \,.\, b + a \,.\, c \,.$$

Okruhy G, H jsou *izomorfní* $(G \approx H)$, existuje-li vzájemně jednoznačné zobrazení f okruhu G na celý okruh H,*) pro které platí

$$f(a + b) = f(a) + f(b)\,, \quad f(a \,.\, b) = f(a) \,.\, f(b) \,. \tag{1}$$

Relace $\approx$ je reflexívní, symetrická a tranzitivní na třídě okruhů, takže představuje rovnost.

2. USPOŘÁDANÁ TĚLESA

Písmenem **Z** označíme množinu všech celých čísel, jejichž vlastnosti považujeme za známé. Symboly $\mathbf{Z}^+$, $\mathbf{Z}_0^+$ označují po řadě množinu všech celých nezáporných a všech celých kladných čísel.

Těleso T je aspoň dvouprvkový okruh, jehož operace $+$ resp. $.$ se nazývají *sčítání*, resp. *násobení*. Platí v něm:

(T1) $(T, +, 0)$ je Abelova grupa.
(T2) $(T - (0), ., 1)$ je Abelova grupa.
(T3) Sčítání je distributivní vzhledem k násobení.

0, 1 jsou po řadě *nulový* a *jednotkový prvek*. Inverzní prvek k $a \in T$ při operaci $+$ se označuje $-a$, inverzní prvek k $a \in T - (0)$ při operaci $.$ označujeme a^{-1}.

Těleso T je *uspořádané*, obsahuje-li vlastní podmnožinu T^+ (tj. neprázdnou a různou od T), pro kterou platí:

(U1) Pro každé $a \in T$ je buď $a \in T^+$, nebo $-a \in T^+$.
(U2) Je-li $a, b \in T^+$, potom $a + b \in T^+$, $a . b \in T^+$.

Prvky množiny T^+ se nazývají *nezáporné* prvky. Snadno zjistíme, že $0 \in T^+$, $1 \in T^+$, $-1 \notin T^+$. Pro $a \neq 0$ je nejvýše jeden z prvků a, $-a$ obsažen v T^+. Množinu $T^+ - (0)$ označíme T_0^+ a její prvky nazveme *kladnými*. Relaci uspořádání definujeme známým způsobem

$$a \geqq b \Leftrightarrow a - b \in T^+ , \quad a > b \Leftrightarrow a - b \in T_0^+ .$$

Místo $a \geqq b$ píšeme rovněž $b \leqq a$, místo $a > b$ také $b < a$. Je patrno, že $a > b$, právě když $a \geqq b$ a $a \neq b$.

Označíme-li R relaci $>$, je komplementární relací $\bar{R}$ relace $\leqq$. Relace R je

a) *antireflexivní*; $a\bar{R}a$ pro všechna $a \in T$,
b) *antisymetrická*; $aRb \Rightarrow b\bar{R}a$,
c) *tranzitivní.*

Relace $\bar{R}$ je *souvislá*, tj. pro každou dvojici $a, b \in T$ platí aspoň jeden ze vztahů $a\bar{R}b$, $b\bar{R}a$.

Sčítání je invariantní k R i k $\bar{R}$ na celém T, kdežto násobení je invariantní k R na $T_0{}^+$ a k $\bar{R}$ na T^+.

2.1. Věta. *Každé uspořádané těleso T obsahuje ve smyslu izomorfismu* **Z** *jako podmnožinu.***)

---

*) Vzájemná jednoznačnost se míní vzhledem k rovnostem na G a H. Označíme-li $\tilde{G}$, resp. $\tilde{H}$ množinu, jejíž prvky jsou třídy sobě rovných prvků v G, resp. v H, potom je f vzájemně jednoznačné zobrazení $\tilde{G}$ na celé $\tilde{H}$.

**) Jinými slovy řečeno tvrdíme, že v uspořádaném tělese T existuje nějaký okruh $Z' \subset T$ izomorfní se Z.

Důkaz. Definujme zobrazení f množiny $\mathbf{Z}$ do tělesa T:

$$f(p) = \begin{cases} 1 + \ldots + 1 \in T(p \text{ sčítanců}),\ p > 0, \\ 0,\ p = 0, \\ -f(-p),\ p < 0. \end{cases}$$

Je zřejmé, že pro zobrazení f platí (1) a že $f(p) \neq 0$ pro $p \neq 0$. Potom je f vzájemně jednoznačné zobrazení množiny $\mathbf{Z}$ na $f(\mathbf{Z})$, neboť pro $p \neq q$ je

$$f(p) = f(q) + f(p - q) \neq f(q) .$$

To znamená, že $f(\mathbf{Z}) \approx \mathbf{Z}$.

Podtěleso T_1 tělesa T je množina, pro kterou $T_1 \subset T$ a která je sama tělesem při stejných operacích jako v T. Řekneme, že T_1 je *minimální těleso s vlastností* V, jestliže T_1 je podtělesem (ve smyslu izomorfismu) každého tělesa T s vlastností V.

2.2. Definice. Minimální uspořádané těleso se nazývá *těleso racionálních čísel* a označuje se $\mathbf{Q}$.

Dokažme, že tato definice má smysl, tj. že takové těleso $\mathbf{Q}$ skutečně existuje.

Na množině všech dvojic tvaru

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix},$$

kde $a \in \mathbf{Z}$, $b \in \mathbf{Z} - (0)$, definujeme rovnost předpisem

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \Leftrightarrow ad - bc = 0 .$$

Reflexívnost, symetričnost a tranzitivnost této relace si čtenář ověří sám. Množinu všech těchto dvojic s právě definovanou rovností označíme $\tilde{\mathbf{Q}}$. Na $\tilde{\mathbf{Q}}$ definujeme sčítání a násobení předpisem

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \doteq \begin{bmatrix} a \,.\, d + b \,.\, c \\ b \,.\, d \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \,.\, c \\ b \,.\, d \end{bmatrix}.$$

Přenechávám čtenáři rovněž důkaz, že takto definované operace jsou invariantní vzhledem k zavedené rovnosti a že $\tilde{\mathbf{Q}}$ je těleso s nulovým prvkem $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ a jednotkovým prvkem $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Uspořádání do $\tilde{\mathbf{Q}}$ zavedeme pomocí množiny $\tilde{\mathbf{Q}}^+$,

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \in \tilde{\mathbf{Q}}^+ \Leftrightarrow a \,.\, b \in \mathbf{Z} .$$

Buď nyní T libovolné uspořádané těleso. Podle 2.1 obsahuje jako podmnožinu $\mathbf{Z}$.

Zobrazení f, pro které

$$f\left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\right) = a \, . \, b^{-1} \in T\,,$$

je izomorfismus tělesa $\tilde{\mathbf{Q}}$ na $f(\tilde{\mathbf{Q}}) \subset T$, takže $\tilde{\mathbf{Q}}$ je podtělesem v T. $\tilde{\mathbf{Q}}$ je tedy minimální uspořádané těleso, $\tilde{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q}$.

3. KONVERGENCE V TĚLESE, SUPREMUM, ŘEZ

V celém paragrafu bude T označovat některé uspořádané těleso. Je-li $X \subset T$, označíme symbolem $-X$ množinu těch $-x \in T$, pro které $x \in X$. Jsou-li A, B dvě podmnožiny tělesa T, píšeme $A \leqq B$, platí-li pro každý prvek $a \in A$ a každý prvek $b \in B$ relace $a \leqq b$.

$X \subset T$ je *shora omezená*, existuje-li $a \in T$ (*horní hranice* množiny X), že platí

$$X \leqq (a)\,.$$

$X \subset T$ je *zdola omezená*, je-li $-X$ shora omezená. *Dolní hranicí* X je každý prvek a, pro který je $-a$ horní hranicí $-X$. Množina X je *omezená*, je-li omezená shora i zdola.

Horní hranice $a \in T$ množiny $X \subset T$ se nazývá *supremum množiny* X ($\sup X$), jestliže pro každé $\varepsilon \in T_0^+$ existuje $x \in X$, že $x > a - \varepsilon$.

Infimum množiny $X \subset T$ je prvek a, definovaný rovností $a = -\sup(-X)$; označení $a = \inf X$. Je-li $\sup X \in X$, píšeme $\sup X = \max X$, je-li $\inf X \in X$, píšeme $\inf X = \min X$. Každá podmnožina $X \subset T$ o konečném počtu prvků má $\max X$ i $\min X$.

V T definujeme *absolutní hodnotu* vzorcem

$$|a| = \max(a, -a)\,.$$

Snadno ověříme, že pro absolutní hodnotu platí

$$|0| = 0\,, \quad a \neq 0 \Rightarrow |a| \neq 0\,,$$

$$|a + b| \leqq |a| + |b|\,, \quad |a \, . \, b| = |a| \, . \, |b|\,.$$

Řekneme, že prvek $a \in T$ je *limitou posloupnosti* $[a_n]$ prvků z tělesa T, jestliže pro každé $\varepsilon \in T_0^+$ existuje $n_0 \in \mathbf{Z}_0^+$, že

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \text{pro všechna } n > n_0\,.$$

Má-li posloupnost $[a_n]$ limitu a, píšeme $a_n \to a$ a takovou posloupnost nazýváme *konvergentní*. Je-li $[a_n]$ *neklesající*, tj. $a_{n+1} \geqq a_n$ pro všechna $n \in \mathbf{Z}_0^+$, a je-li $a_n \to a$, zavádíme označení $a_n \nearrow a$. Analogicky, má-li *nerostoucí* posloupnost $[a_n]$ ($a_{n+1} \leqq a_n$ pro všechna $n \in \mathbf{Z}_0^+$) limitu a, píšeme $a_n \searrow a$.

Posloupnost $[a_n]$ prvků z T se nazývá *cauchyovská*, jestliže pro každé $\varepsilon \in T_0^+$ existuje $n \in \mathbf{Z}_0^+$, že platí

$$|a_n - a_{n+p}| < \varepsilon \quad \text{pro všechna } p \in \mathbf{Z}_0^+ .$$

Prvek $a \in T$ je *hromadný prvek* množiny $X \subset T$, platí-li: pro každé $\varepsilon \in T_0^+$ existuje nekonečně mnoho různých prvků $x \in X$, že $a - \varepsilon \leqq x \leqq a + \varepsilon$.

Řez v tělese T se definuje pomocí dvou vlastních podmnožin A, $A' \subset T$, pro něž

a) $A \cup A' = T$, $A \cap A' = \emptyset$,
b) $A \leqq A'$.

Řez označujeme symbolem A/A'.

Mezera v tělese T je řez A/A', pro který neexistuje ani max A ani min A'. Uspořádané těleso T se nazývá *spojité*, neobsahuje-li mezery.

Je-li $a, b \in T$, $a < b$, můžeme definovat *interval* $\langle a, b\rangle$ jako množinu všech prvků $x \in T$, pro něž

$$a \leqq x \leqq b .$$

V každém intervalu leží nekonečně mnoho prvků tělesa T. *Délkou intervalu* $I = \langle a, b\rangle$ rozumíme prvek $b - a$, označení $|I|$.

3.1. Věta. *V uspořádaném tělese T platí:*

a) Konvergentní posloupnost je cauchyovská.

b) Cauchyovská posloupnost je omezená.

c) Limita konvergentní posloupnosti je jejím hromadným prvkem.

d) Má-li cauchyovská posloupnost hromadný prvek, pak je limitou této posloupnosti.

e) $\varepsilon_n \to 0$, $|a_n - a| \leqq \varepsilon_n \Rightarrow a_n \to a$.

f) $\varepsilon_n \to 0$, $[a_n]$ *omezená* $\Rightarrow \varepsilon_n a_n \to 0$.

g) $a_n \nearrow a \Rightarrow a_n \leqq a$ *pro všechna* $n \in \mathbf{Z}_0^+$.

h) $a_n \leqq b_n$, $a_n \to a$, $b_n \to b \Rightarrow a \leqq b$.

i) Je-li $[I_n]$ *posloupnost do sebe vložených intervalů* ($I_n \supset I_{n+1}$ *pro všechna* $n \in \mathbf{Z}_0^+$), *při čemž* $|I_n| \to 0$, *je průnikem všech intervalů* I_n *prázdná nebo jednobodová množina.*

j) Je-li A/A' *řez v* T, $c =$ max A *nebo* $c =$ min A', *potom* c *je horní hranicí* A *a dolní hranicí* A'. *Dále platí*

$$a \in A,\, x \leqq a \Rightarrow x \in A ,$$

$$a' \in A',\, x' \geqq a' \Rightarrow x' \in A' .$$

k) Neklesající shora omezená posloupnost $[a_n]$ *má nejvýš jeden hromadný* *prvek. Je-li a hromadný prvek* $[a_n]$, *potom*

$$a = \sup [a_n], \quad a_n \to a .$$

Analogické tvrzení platí pro nerostoucí zdola omezenou posloupnost; místo suprema vystupuje infimum.

Důkaz této věty, která má pomocný charakter, přenechávám čtenáři.

4. ARCHIMÉDOVSKY USPOŘÁDANÁ TĚLESA

(I) Archimédův axióm. *Buď T uspořádané těleso, a, b* $\in T$, $a > 0$. *Potom existuje* $n \in \mathbf{Z}_0^+ \subset T$, *že platí*

$$n \,.\, a > b .$$

Uspořádané těleso T, v němž platí Archimédův axióm, se nazývá *archimédovsky uspořádané.*

4.1. Věta. *Těleso racionálních čísel je archimédovsky uspořádané.*
Důkaz. Označme opět $\tilde{\mathbf{Q}}$ model tělesa racionálních čísel, který jsme sestrojili na konci § 5. Buď

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} > \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \in \tilde{\mathbf{Q}} .$$

Máme nalézt celé kladné číslo n, aby platilo

$$\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} > \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} .$$

Tato nerovnost je ekvivalentní se vztahem

$$\begin{bmatrix} n \,.\, a \,.\, d - b \,.\, c \\ b \,.\, d \end{bmatrix} \in \tilde{\mathbf{Q}}^+ ,$$

a tedy s relací

$$n \,.\, a \,.\, b \,.\, d^2 > b^2 \,.\, c \,.\, d .$$

Uspořádání v množině $\mathbf{Z}$ je zřejmě archimédovské. Protože $a \,.\, b \,.\, d^2 > 0$, existuje $n \in \mathbf{Z}_0^+$ splňující poslední nerovnost.

Nyní dokážeme důležitou větu, která platí v archimédovsky uspořádaných tělesech.

4.2. Věta. *Buď T archimédovsky uspořádané těleso. Potom:*

a) $n^{-1} \to 0$, $2^{-n} \to 0$ *v* T.

b) Je-li a hromadný prvek posloupnosti $[a_n] \subset T$, *existuje vybraná posloupnost* $[a_{n_k}]$, *že* $a_{n_k} \to a$.

c) Neklesající shora omezená (resp. nerostoucí zdola omezená) posloupnost $[a_n] \subset T$ *je cauchyovská.*

Důkaz. *a*) Buď $\varepsilon \in T_0^+$. Podle (I) existuje $p \in \mathbf{Z}_0^+$, že $p > \varepsilon^{-1}$. Pro všechna celá $n > p$ je

$$n^{-1} < p^{-1} < \varepsilon .$$

Indukcí se dokáže, že pro $n > 1$ platí $2^n > n$. Potom $2^{-n} < n^{-1}$ a užijeme 3.1.*e)*.

b) V každém intervalu $\langle a - n^{-1}, a + n^{-1} \rangle$, $n \in \mathbf{Z}_0^+$, existuje nekonečně mnoho členů posloupnosti $[a_n]$. Buď n_1 nejmenší index, pro který $a_{n_1} \in \langle a - 1, a + 1 \rangle$. Je-li už znám index n_k, označme n_{k+1} nejmenší index následující za n_k, pro který $a_{n_{k+1}} \in \langle a - (k + 1)^{-1}, a + (k + 1)^{-1} \rangle$. $[a_{n_k}]$ je tedy vybraná posloupnost z $[a_n]$, $|a_{n_k} - a| < k^{-1}$. Z 4.2.*a)* a 3.1.*e)* plyne $a_{n_k} \to a$.

c) Buď $[a_n]$ neklesající shora omezená posloupnost s horní hranicí $a \in T$. Pro nepřímý důkaz předpokládejme, že existuje vybraná posloupnost, kterou pro jednoduchost označme opět $[a_n]$, a prvek $\varepsilon \in T_0^+$, že platí

$$|a_n - a_m| \geqq \varepsilon \quad \text{pro všechna celá kladná } m \neq n .$$

Podle Archimédova axiómu existuje $p \in \mathbf{Z}_0^+$, že $p \,.\, \varepsilon > a - a_1$. Dále

$$a_{p+1} - a_1 = (a_{p+1} - a_p) + (a_p - a_{p-1}) + \ldots + (a_2 - a_1) \geqq$$
$$\geqq p \,.\, \varepsilon > a - a_1 ,$$

takže $a_{p+1} > a$, což je spor.

Nyní sestrojíme nearchimédovsky uspořádané těleso $P = \mathbf{Q}(\omega)$ a ukážeme, že v něm neplatí věta 4.2.

Buď ω libovolný prvek, který neleží v $\mathbf{Q}$. Pro $n \in \mathbf{Z}^+$ je

$$f(\omega) = \sum_{i=0}^{n} a_i \omega^i , \quad a_i \in \mathbf{Q} , \quad a_n \neq 0 ,$$

polynom stupně n v neurčité ω. Koeficient a_n se nazývá *hlavní koeficient* polynomu $f(\omega)$. Polynom $h(\omega) = 0$ je nulový polynom (stupeň se nedefinuje) s hlavním koeficientem 0. Minimální těleso obsahující $\mathbf{Q}$ a prvek ω se skládá z dvojic polynomů

$$(*) \qquad \begin{bmatrix} f(\omega) \\ g(\omega) \end{bmatrix},$$

kde $g(\omega) \neq 0$. Toto těleso označíme $P = \mathbf{Q}(\omega)$; rovnost, součet a součin prvků tohoto tělesa se definuje analogicky jako jsme je definovali při zavedení množiny $\tilde{\mathbf{Q}}$.

Uspořádání v P definujeme pomocí množiny P^+,

$$\begin{bmatrix} f(\omega) \\ g(\omega) \end{bmatrix} \in P^+ ,$$

náleží-li součin hlavních koeficientů polynomů $f(\omega)$ a $g(\omega)$ do $\mathbf{Q}^+$. Dále už budeme označovat dvojice tvaru (*) obvyklým způsobem $f(\omega) \,.\, (g(\omega))^{-1}$.

4.3. *Těleso P není archimédovsky uspořádáno.*

Důkaz. Polynom $\omega - n$ náleží do P_0^+ pro všechna celá kladná n, takže je $\omega > n$ pro všechna $n \in \mathbf{Z}_0^+$.

Pro všechna $n \in \mathbf{Z}_0^+$ je $\omega > 2^n$, tj. $2^{-n} > \omega^{-1}$ a neplatí $2^{-n} \to 0$. Protože je $n^{-1} > 2^{-n}$, neplatí ani $n^{-1} \to 0$. 0 je hromadný prvek posloupnosti $[n^{-1}]$, $n \in \mathbf{Z}_0^+$. Protože $n^{-1} > \omega^{-1}$, nedá se vybrat z $[n^{-1}]$ žádná posloupnost konvergující k 0.

Konečně je $[n^{-1}]$ klesající, zdola omezená. Pro celá kladná $m \neq n$ platí

$$|n^{-1} - m^{-1}| > \omega^{-1} ,$$

a $[n^{-1}]$ tedy není cauchyovská. Tím je dokázáno:

4.4. *V tělese P neplatí věta* 4.2.

5. CANTORŮV AXIÓM A AXIÓM ÚPLNOSTI

T v tomto paragrafu označuje archimédovsky uspořádané těleso.

(II) Cantorův axióm. *Každá posloupnost uzavřených do sebe vložených intervalů I_n z T má neprázdný průnik.*

(II_1) Axióm úplnosti. *Každá cauchyovská posloupnost prvků z T má v T limitu.*

Kterýkoliv z těchto axiómů nám dá možnost definovat těleso reálných čísel. Nejprve dokažme následující fakt.

5.1. Věta. *Axiómy* (II) *a* (II_1) *jsou v archimédovsky uspořádaném tělese T ekvivalentní.*

Důkaz. (II) $\Rightarrow$ (II_1). Buď $[c_n]$ cauchyovská posloupnost prvků z T. Označme X množinu všech jejích členů. Množina X je podle 3.1.*b)* omezená, takže pro nějaká $a_0, b_0 \in T$ platí

$$[\![\quad (a_0) \leqq X \leqq (b_0) \,.$$

Sestrojíme posloupnost intervalů $[I_n]$, $I_n = \langle a_n, b_n \rangle$, z nichž každý obsahuje nekonečně mnoho prvků množiny X. Obsahuje-li interval $\langle a_n, (a_n + b_n) . 2^{-1} \rangle$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$) nekonečně mnoho prvků množiny X, označme ho $\langle a_{n+1}, b_{n+1} \rangle$. V opačném případě takto označme interval $\langle (a_n + b_n) \,.\, 2^{-1}, b_n \rangle$. Posloupnost $[I_n]$ splňuje podmínky Cantorova axiómu a platí $|I_n| = (b_0 - a_0) \,.\, 2^{-n}$, $|I_n| \to 0$

(4.2.*a)*, 3.1.*e)*). Průnikem všech I_n je tedy podle 3.1.*i)* jednobodová množina (c). Protože každý I_n obsahuje nekonečně mnoho prvků množiny X, je c hromadný prvek X.⟧ (Na tu část důkazu, která je uvedena v závorkách ⟦ ⟧ se odvoláme v důkaze věty **6.1.**)

Podle 3.1.*d)* je $c_n \to c$.

$(\mathrm{II}_1) \Rightarrow (\mathrm{II})$. Buď $I_n = \langle a_n, b_n \rangle$ posloupnost intervalů v T splňující předpoklady Cantorova axiómu. Posloupnost $[a_n]$, resp. $[b_n]$ je neklesající, resp. nerostoucí a omezená, takže podle 4.2.*c)* je cauchyovská. Podle (II_1) existují $a, b \in T$, že $a_n \nearrow a$, $b_n \searrow b$. Podle 3.1.*g)*, *h)* je

$$a_n \leqq a \leqq b \leqq b_n\,, \quad n \in \mathbf{Z}_0^+\,,$$

takže průnik všech I_n je neprázdný.

5.2. Definice. Uspořádané těleso, v němž platí axiómy (I), (II), se nazývá *těleso reálných čísel* a označuje se **R**.

Vzhledem k 5.1. je možno ekvivalentně definovat **R** jako uspořádané těleso, v němž platí axiómy (I) a (II_1). Těleso **R** nyní skutečně sestrojíme jistým rozšířením tělesa **Q** tak, aby v tomto rozšířeném tělese platil axióm (II_1). Tato konstrukce pochází od Cantora a v naší matematické literatuře je podrobně vyložena v knize [1].

Symbolem $\tilde{\mathbf{R}}$ označíme množinu všech cauchyovských posloupností racionálních čísel. Rovnost v $\tilde{\mathbf{R}}$ definujeme následujícím způsobem

$$[a_n] = [b_n] \Leftrightarrow a_n - b_n \to 0\,.$$

Čtenář si snadno ověří, že tato relace mezi posloupnostmi z $\tilde{\mathbf{R}}$ je reflexívní, symetrická a tranzitivní.

Součet, resp. součin definujeme rovnostmi

$$[a_n] + [b_n] = [a_n + b_n]\,, \quad \text{resp. } [a_n] \cdot [b_n] = [a_n \cdot b_n]\,;$$

nejprve ověříme, že součtem, resp. součinem cauchyovských posloupností racionálních čísel je opět cauchyovská posloupnost, a dále, že obě operace jsou invariantní vzhledem k zavedené rovnosti.

Množina $\tilde{\mathbf{R}}$ s právě definovanými operacemi tvoří těleso, nulový prvek v $\tilde{\mathbf{R}}$ představuje posloupnost $[a_n]$, pro kterou platí $a_n \to 0$. Uspořádání v $\tilde{\mathbf{R}}$ je určeno podmnožinou $\tilde{\mathbf{R}}^+$, která obsahuje nulový prvek tělesa $\tilde{\mathbf{R}}$ a dále všechny prvky $[a_n]$, pro něž existuje celé kladné p a kladné racionální r, že $a_n \geqq r$ pro všechna $n > p$. $\tilde{\mathbf{R}}$ tedy obsahuje **Q** jako podtěleso; racionální číslo a je v $\tilde{\mathbf{R}}$ obsaženo např. ve tvaru $[a] = [a, a, a, \ldots]$. Jednotkovým prvkem tělesa $\tilde{\mathbf{R}}$ je $[1] = [1, 1, 1, \ldots]$.

5.3. *V* $\tilde{\mathbf{R}}$ *platí Archimédův axióm.*

Důkaz. Buď $[a_n] \in \tilde{\mathbf{R}}_0^+$, $[b_n] \in \tilde{\mathbf{R}}$. Máme nalézt celé kladné p, aby platilo

$$[p] \cdot [a_n] > [b_n]\,.$$

Podle 3.1.*b)* je $c \leqq b_n \leqq d$ pro nějaká $c, d \in \mathbf{Q}$. Dále je $a_n \geqq s > 0$ pro všechna $n > k$. V $\mathbf{Q}$ platí podle 4.1. Archimédův axióm, takže existuje $p \in \mathbf{Z}_0^+$, pro něž $p \,.\, s > d$. Potom pro všechna $n > k$ je

$$p \,.\, a_n - b_n \geqq p \,.\, s - d = r > 0\,,$$

tj. $[p] \,.\, [a_n] - [b_n] \in \tilde{\mathbf{R}}_0^+$.

Než dokážeme platnost axiómu (II_1) v tělese $\tilde{\mathbf{R}}$, odvodíme pomocné tvrzení o aproximaci prvků tělesa $\tilde{\mathbf{R}}$ racionálními čísly.

5.4. *Pro každý prvek* $[a_n] \in \tilde{\mathbf{R}}$ *a každé* $\varepsilon \in \mathbf{Q}_0^+$ *existuje* $a \in \mathbf{Q}$, *že platí*

$$|[a_n] - [a]| < [\varepsilon]\,.$$

Důkaz. Posloupnost $[a_n]$ je cauchyovská. Pro dané $\varepsilon \in \mathbf{Q}_0^+$ existuje tedy celé kladné k, že

$$|a_n - a_k| < \varepsilon \,.\, 2^{-1} \quad \text{pro všechna } n > k\,.$$

Označme $a = a_k$. Platí $\varepsilon - |a_n - a| > \varepsilon \,.\, 2^{-1}$ pro $n > k$, takže $[\varepsilon - |a_n - a|] \in \tilde{\mathbf{R}}_0^+$. Snadno ověříme, že $|[c_n]| = [|c_n|]$ pro libovolnou posloupnost $[c_n] \in \tilde{\mathbf{R}}$; odtud plyne

$$[\varepsilon] - |[a_n] - [a]| \in \tilde{\mathbf{R}}_0^+\,.$$

5.5. *V* $\tilde{\mathbf{R}}$ ***platí axióm úplnosti.***

Důkaz. Označujme na chvíli prvky tělesa $\tilde{\mathbf{R}}$ řeckými písmeny, např. $\beta = [b_n]$. Buď $[\alpha_n]$ cauchyovská v $\tilde{\mathbf{R}}$. Podle 5.4. existuje pro každé celé kladné n takové racionální a_n, že platí

$$\alpha_n - n^{-1} < a_n < \alpha_n + n^{-1}\,.$$

Potom posloupnost $[a_n] = [a_n - \alpha_n] + [\alpha_n]$ je cauchyovská posloupnost racionálních čísel. Dále $n^{-1} \to 0$ v $\tilde{\mathbf{R}}$ (5.3. a 4.2.*a)*), takže $a_n - \alpha_n \to 0$ v $\tilde{\mathbf{R}}$ a prvek $\alpha = [a_n] \in \mathbf{R}$ je limitou posloupnosti $[\alpha_n]$.

Těleso $\tilde{\mathbf{R}}$ splňuje axiómy (I) a (II_1), podle 5.1. tedy i (II), takže $\tilde{\mathbf{R}} = \mathbf{R}$.

6. AXIÓMY SPOJITOSTI

T v tomto paragrafu označuje některé uspořádané těleso.

V § 5 jsme množinu $\mathbf{R}$ reálných čísel definovali jako uspořádané těleso, v němž platí axiómy (I) a (II). Naším cílem bude nyní podat důkaz, že $\mathbf{R}$ je možno ekvivalentně definovat jako uspořádané spojité těleso.

(III) Dedekindův axióm. *Těleso T je spojité.*

(III_1) Weierstrassův axióm. *Každá nekonečná omezená množina v T má aspoň jeden hromadný prvek v T.*

(III_2) Axióm suprema. *Každá neprázdná shora omezená množina v T má v tělese T supremum.*

6.1. Věta. *V uspořádaném tělese T platí axióm* (III_1), *právě když v něm platí současně axiómy* (I) *a* (II).

Důkaz. Nechť nejprve v T platí (I) a (II). Buď X nekonečná omezená množina. Důkaz, že v T platí (III_1), je nyní obsažen doslova v závorkách $[\![\ ]\!]$ v důkazu věty 5.1. Všimněme si ještě, že v tomto důkazu sestrojený prvek c je nejmenším hromadným prvkem množiny X. Tím jsme dokázali důsledek 6.2.

Nechť naopak v T platí axióm (III_1).

$(\mathrm{III}_1) \Rightarrow$ (I). Buďte $a, b \in T$, $a > 0$. Předpokládejme, že

$$n \,.\, a \leqq b \quad \text{pro všechna } n \in \mathbf{Z}_0^+ .$$

Posloupnost $[n \,.\, a]$ je neklesající shora omezená, takže má podle 3.1.*k)* právě jeden hromadný prvek $c = \sup\, [n \,.\, a]$. Podle definice suprema existuje $p \in \mathbf{Z}_0^+$, že $p \,.\, a > c - a$. Odtud plyne $(p + 1) \,.\, a > c$, což je spor.

$(\mathrm{III}_1) \Rightarrow$ (II). Buď $I_n = \langle a_n, b_n \rangle$ posloupnost do sebe vložených intervalů v T. Posloupnost $[a_n]$ je neklesající a shora omezená, $[b_n]$ je nerostoucí a zdola omezená. Podle 3.1.*k)* existují $a, b \in T$, že $a_n \nearrow a$, $b_n \searrow b$. Podle 3.1.*g)*, *h)* platí

$$a_n \leqq a \leqq b \leqq b_n \,.$$

6.2. Důsledek. *Je-li $X \subset T$ omezená a množina X' jejích hromadných prvků je neprázdná, existuje* $\min X'$ (*a také* $\max X'$).

6.3. Věta. *V uspořádaném tělese T jsou axiómy* (III), (III_1) *a* (III_2) *ekvivalentní.*

Důkaz provedeme podle schématu (III) $\Rightarrow (\mathrm{III}_1) \Rightarrow (\mathrm{III}_2) \Rightarrow$ (III). Pro zjednodušení místo implikace (III) $\Rightarrow (\mathrm{III}_1)$ dokážeme (III) $\Rightarrow$ (I) a (III) $\Rightarrow$ (II), což je podle věty 6.1. totéž.

(III) $\Rightarrow$ (I). Buď $a, b \in T$, $a > 0$, a předpokládejme, že $n \,.\, a \leqq b$ pro všechna $n \in \mathbf{Z}_0^+$. Sestrojme nyní množinu A takto: $n \,.\, a \in A$ pro všechna $n \in \mathbf{Z}_0^+$ a s každým $n \,.\, a$ nechť A obsahuje všechna $x \in T$, pro něž $x \leqq n \,.\, a$. Položíme-li $A' = T - A$, je A/A' řez v T. Neexistuje $\max A$, takže podle (III) existuje $c = \min A'$. Podle 3.1.*j)* obsahuje A ta $x \in T$, pro něž $c - a \,.\, 2^{-1} \leqq x < c$, takže existuje $n \in \mathbf{Z}_0^+$, pro které $c - a \,.\, 2^{-1} \leqq n \,.\, a$. Prvek $(n + 1) \,.\, a$ náleží do A a současně $(n + 1) \,.\, a > c$, což odporuje 3.1.*j)*.

(III) $\Rightarrow$ (II). Buď $^{-}I_n = \langle a_n, b_n \rangle$ posloupnost intervalů vyhovující předpokladům Cantorova axiómu. Množina A nechť obsahuje a_n pro všechna $n \in \mathbf{Z}_0^+$ a s každým a_n ta $x \in T$, pro něž $x \leqq a_n$. Položíme-li $A' = T - A$, je A/A' řez v T. Opět existuje $c = \min A'$. Z konstrukce množiny A a z 3.1.*j)* plyne, že

$$a_n \leqq c \leqq b_n \quad \text{pro všechna } n \in \mathbf{Z}_0^+ .$$

$(\mathrm{III}_1) \Rightarrow (\mathrm{III}_2)$. Buď $\emptyset \neq X \subset T$ shora omezená množina v T, $X \leqq (b)$. Existuje-li $a < b$, že $X \cap \langle a, b \rangle = Y$ je podmnožina o konečném počtu prvků, existuje $\max Y = \sup X$. Nechť pro nějaké $a < b$ nemá $Y = X \cap \langle a, b \rangle$ konečný počet prvků. Množina Y' hromadných prvků množiny Y je neprázdná a podle důsledku 6.2. existuje $c = \max Y'$. Je-li $X \leqq (c)$, jsme hotovi. V opačném případě pro jisté $d > c$ je $V = \langle d, b \rangle \cap X$ konečná množina a $\max V = \sup X$.

$(\mathrm{III}_2) \Rightarrow (\mathrm{III})$. Buď A/A' libovolný řez v T. Označme $a = \sup A$. Je-li $a \in A$, potom (III) platí. V opačném případě je $a \in A'$. Předpokládejme, že existuje $b \in A'$, že $b < a$. Potom $x < b$ pro všechna $x \in A$ a prvek a tedy proti předpokladu není $\sup A$. To znamená, že je $a = \min A'$.

Tím je věta 6.3. úplně dokázána.

V tělese **R**, definovaném v 5.1., platí tedy (III), (III_1) a (III_2) jako věty. Dále je zřejmě možné definovat ekvivalentně **R** jako uspořádané těleso, v němž platí kterýkoliv z axiómů (III), (III_1) nebo (III_2).

7. VHODNÁ SOUSTAVA AXIÓMŮ

Z metodického hlediska je pro zavedení reálných čísel vhodná jistá modifikace definice 5.2.

Rovností na **R** nechť je základní rovnost na množině, čímž se vyhneme požadavku invariance operací. Dále nechť jsou na **R** definovány operace sčítání resp. násobení

$$(a, b) \to a + b \quad \text{resp.} \ (a, b) \to a \, . \, b \, ,$$

pro které platí:

(1) $a + (b + c) = (a + b) + c$,
(2) $a + b = b + a$,
(3) v **R** existuje prvek 0, že $a + 0 = a$ pro všechna $a \in \mathbf{R}$,
(4) ke každému prvku $a \in \mathbf{R}$ existuje prvek $-a \in \mathbf{R}$, že $a + (-a) = 0$,
(5) $a \, . \, (b \, . \, c) = (a \, . \, b) \, . \, c$,
(6) $a \, . \, b = b \, . \, a$,
(7) v **R** existuje prvek $1 \neq 0$, že $a \, . \, 1 = a$ pro všechna $a \in \mathbf{R}$,
(8) pro každý prvek $a \neq 0$ v **R** existuje prvek $a^{-1} \in \mathbf{R}$, že $a \, . \, a^{-1} = 1$,
(9) $a \, . \, (b + c) = a \, . \, b + a \, . \, c$.

Dále nechť **R** obsahuje vlastní podmnožinu $\mathbf{R}^+$, pro kterou platí:

(10) Pro každý prvek $a \in \mathbf{R}$ je buď $a \in \mathbf{R}^+$, nebo $-a \in \mathbf{R}^+$,
(11) $a, b \in \mathbf{R}^+ \Rightarrow a + b \in \mathbf{R}^+, a \, . \, b \in \mathbf{R}^+$.

Uspořádání se definuje jako v § 2, tj.

$$a \geqq b \Leftrightarrow a - b \in \mathbf{R}^+ \, , \quad a > b \Leftrightarrow a \geqq b, a \neq b \, .$$

Uspořádání vyhovuje Archimédovu axiómu:

(12) Pro každé dva prvky $a, b \in \mathbf{R}$, $a > 0$ existuje celé kladné číslo n, že $n \,.\, a > b$.

Množina $\mathbf{R}$ vyhovuje Cantorovu axiómu:

(13) Je-li $[I_n]$ posloupnost do sebe vložených intervalů ($I_{n+1} \subset I_n$ pro všechna $n \in \mathbf{Z}_0^+$), potom je průnik intervalů této posloupnosti neprázdný.

Důkazy vět (III), (III_1), (III_2) a mnoha vět ze základů matematické analýzy, které vycházejí z definice množiny $\mathbf{R}$ soustavou axiómů (1) – (13), mají stejné schéma, tzv. *princip postupného půlení intervalů.* Tento postup je použit např. v důkaze věty 5.1. Zmíněný princip je možno formulovat následujícím způsobem: Buď $\langle c, d\rangle$ nějaký interval v $\mathbf{R}$ a nechť je dán předpis T, který každému intervalu $I = \langle x, y\rangle$ obsaženému v $\langle c, d\rangle$ přiřazuje jednu z polovin

$$\langle x, (x + y) \,.\, 2^{-1}\rangle\,, \quad \langle (x + y) \,.\, 2^{-1}, y\rangle$$

intervalu I. Příslušnou polovinu označme $T(I)$. Je-li nyní $I_0 = \langle a_0, b_0\rangle$ interval obsažený v $\langle c, d\rangle$, můžeme sestrojit posloupnost intervalů $[I_n]$, definovanou rekurentně

$$I_{n+1} = T(I_n)\,, \quad n = 0, 1, 2, \ldots\,.$$

Posloupnost $[I_n]$ vyhovuje předpokladům Cantorova axiómu (13), takže má neprázdný průnik. Pro délky intervalů platí

$$|I_n| = (b_0 - a_0) \,.\, 2^{-n}\,.$$

Protože v $\mathbf{R}$ platí Archimedův axióm (12), je $2^{-n} \to 0$, a tedy i $|I_n| \to 0$, takže posloupnost $[I_n]$ má jednobodový průnik (x). Bod x můžeme nazvat kořenem předpisu T.

Princip postupného půlení intervalu použijeme v důkazech, které mají prokázat existenci bodu o jisté vlastnosti. Volba předpisu T záleží na této vlastnosti. Tímto principem je dokázána řada vět základů matematické analýzy v knize E. ČECHA, *Co je a nač je vyšší matematika*? (JČMF, Praha 1942).

Literatura

[1] ČECH E.: *Čísla a početní výkony*, SNTL, Praha 1954.

[2] DIEUDONNÉ J.: *Foundations of Modern Analysis*, Academic Press, New York and London 1960 (ruský překlad 1964).

[3] FICHTENGOLC G. M.: *Kurs differencialnogo i integralnogo isčislenija*, Tom I, Nauka, Moskva 1966.

[4] JARNÍK V.: *Diferenciální počet I*, NČSAV, Praha 1955.

[5] POSPÍŠIL B.: *Nekonečno v matematice*, JČMF, Praha 1949.