Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Vlasta Peřinová

Integrální rovnice s nelineárními funkcionály

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 11 (1966), No. 2, 51--63

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/137242

POKROKY MATEMATIKY, FYZIKY A ASTRONOMIE
ROČNÍK XI – ČÍSLO 2

INTEGRÁLNÍ ROVNICE S NELINEÁRNÍMI FUNKCIONÁLY

VLASTA PEŘINOVÁ, Olomouc

Cílem tohoto článku je seznámit čtenáře s výsledky dosaženými v teorii algebraických integrálních rovnic (v dalším AIR). Tyto rovnice byly studovány od roku 1952 v sérii prací W. SCHMEIDLERA a D. MORGENSTERNA [2–6]. Vedle velkého významu teoretického mají význam v řadě fyzikálních problémů, např. v mechanice, při studiu výboje plynů a v teorii optického zobrazení.

Nelineární integrální rovnice lze v podstatě rozdělit na dva typy:

a) *integrální rovnice Hammersteinova typu*

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b \Gamma(x, y, \varphi(y))\, \mathrm{d}y\,,$$

kde funkce Γ závisí nelineárně na neznámé funkci φ,

b) *integrální rovnice s nelineárními funkcionály*, kam řadíme rovnice studované E. SCHMIDTEM [1], AIR a zobecněné AIR studované U. PIRLEM [7].

Zatímco teorie rovnic Hammersteinova typu je velmi dobře zpracována, např. [8, 9], teorie AIR se teprve rozvíjí. Protože AIR jsou přirozeným zobecněním lineárních integrálních rovnic, usiluje se o přenesení základních výsledků a úvah z teorie lineárních integrálních rovnic na AIR. Touto snahou je převážně určen charakter prací o AIR.

Abychom v dalším mohli ukázat na souvislost s teorií lineárních integrálních rovnic, připomeneme klasifikaci lineárních integrálních rovnic Fredholmova typu. *Nehomogenní integrální rovnicí 2. druhu* nazýváme rovnici

$$y(s) - \lambda \int_a^b K(s, t)\, y(t)\, \mathrm{d}t = f(s)\,, \tag{1}$$

homogenní integrální rovnicí 2. druhu rovnici

$$y(s) - \lambda \int_a^b K(s, t)\, y(t)\, \mathrm{d}t = 0 \tag{2}$$

a 1. druhu rovnici

$$\int_a^b K(s, t)\, y(t)\, \mathrm{d}t = f(s),$$

kde funkce $f(s)$ a jádro $K(s, t)$ jsou dané funkce, $y(s)$ je neznámá funkce.

Nyní zavedeme pojem AIR. *Integrálním polynomem funkce* $y(s)$ rozumíme výraz

$$J[y] = \sum_{k=0}^{m} a_k(s)\, y^{m-k}(s) + \sum_{\alpha+\alpha_1+\ldots+\alpha_\nu \leqq n} \int_a^b \!\!\ldots\! \int K_{\alpha\alpha_1\ldots\alpha_\nu}(st_1 \ldots t_\nu)\,. \tag{3}$$

$$.\, y^{\alpha}(s)\, y^{\alpha_1}(t_1) \ldots y^{\alpha_\nu}(t_\nu)\, \mathrm{d}t_1 \ldots \mathrm{d}t_\nu .$$

m je *vnější stupeň* a největší vyskytující se hodnota součtu $\alpha + \alpha_1 + \ldots + \alpha_\nu = n \geqq 1$ *vnitřní stupeň* integrálního polynomu; $\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_\nu$ jsou nezáporná celá čísla, meze a, b jsou konečné. Rovnice $J[y] = 0$ se nazývá *algebraickou integrální rovnicí.* Tato rovnice zahrnuje v sobě jako zvláštní případ lineární integrální rovnice. Je-li $n = 1$ a $\nu = 1$, obdržíme pro $m = 0$ a $K_{10}(s, t) \equiv 0$ lineární integrální rovnici 1. druhu a pro $m = 1$ rovnici 2. druhu.

1. EXISTENCE KLADNÉHO ŘEŠENÍ AIR

Základní otázkou u každé rovnice je existence řešení. Všimneme si, jak je tato otázka zodpověděna pro AIR. Vzhledem k fyzikální aplikaci se zabýváme existencí kladného reálného řešení. K důkazu existence řešení použitá iterační metoda je vhodná i pro numerický výpočet.

Obecnou AIR, kterou zkráceně zapíšeme ve tvaru

$$J[y] = P[y] + K[y] = f(s), \tag{1.1}$$

kde

$$P[y] = \sum_{k=0}^{m} a_k(s)\, y^{m-k}(s),$$

$$K[y] = \sum_{\alpha+\alpha_1+\ldots+\alpha_\nu \leqq n} \int_a^b \!\!\ldots\! \int K_{\alpha\alpha_1\ldots\alpha_\nu}(st_1 \ldots t_\nu)\, y^{\alpha}(s)\, y^{\alpha_1}(t_1) \ldots y^{\alpha_\nu}(t_\nu)\, \mathrm{d}t_1 \ldots \mathrm{d}t_\nu,$$

řešíme za následujících předpokladů: Koeficienty $a_k(s)$ a jádra $K_{\alpha\alpha_1\ldots\alpha_\nu}(st_1 \ldots t_\nu)$ jsou reálné a spojité v definičních oborech, koeficienty $a_k(s)$ jsou zvoleny tak, že platí $P'[y] > 0$ pro $y > 0$, $f(s) > 0$ je spojitá funkce a je položeno $a_0(s) \equiv 1$, $a_m(s) \equiv 0$. Rovnice

$$P[y] = f(s) \tag{1.2}$$

má potom v $\langle a, b\rangle$ právě jedno reálné spojité řešení $y^*(s) > 0$ ($P[y]$ je rostoucí funkcí y a $P[0] = 0$). Pro další úvahy přepíšeme rovnici (1.1) ve vhodnějším tvaru, který získáme rozkladem členu $K[y]$. Označíme-li

$$\max_{s,t_1,\ldots,t_\nu} \left(K_{\alpha\alpha_1\ldots\alpha_\nu}(st_1 \ldots t_\nu), 0\right) = M_{\alpha\alpha_1\ldots\alpha_\nu} \geqq 0\,,$$

$$M_{\alpha\alpha_1\ldots\alpha_\nu} - K_{\alpha\alpha_1\ldots\alpha_\nu}(st_1 \ldots t_\nu) = L_{\alpha\alpha_1\ldots\alpha_\nu}(st_1 \ldots t_\nu) \geqq 0\,,$$

$$\sum_{\alpha+\alpha_1+\ldots+\alpha_\nu\leqq n} \int_a^b \ldots \int L_{\alpha\alpha_1\ldots\alpha_\nu}(st_1 \ldots t_\nu)\, y^{\alpha}(s)\, y^{\alpha_1}(t_1) \ldots y^{\alpha_\nu}(t_\nu)\, \mathrm{d}t_1 \ldots \mathrm{d}t_\nu = $$
$$= L[y]\,,$$

$$\sum_{\alpha+\alpha_1+\ldots+\alpha_\nu\leqq n} M_{\alpha\alpha_1\ldots\alpha_\nu} \int_a^b \ldots \int y^{\alpha}(s)\, y^{\alpha_1}(t_1) \ldots y^{\alpha_\nu}(t_\nu)\, \mathrm{d}t_1 \ldots \mathrm{d}t_\nu = M[y]\,,$$

můžeme rovnici (1.1) psát ve tvaru

(1.3) $$P[y] - L[y] + M[y] = f(s)\,.$$

Rovnici (1.3) řešíme nejdříve v případě $M[y] \equiv 0$. K řešení rovnice

(1.4) $$P[y] = f(s) + L[y]$$

použijeme Schmeidlerovy iterační metody shora (sestrojená posloupnost funkcí konverguje k řešení shora). Za počáteční funkci vezmeme takovou spojitou funkci $y_0(s) > 0$, pro kterou platí $P[y_0] > f(s) + L[y_0]$ pro $s \in \langle a, b\rangle$. Taková funkce vždy existuje pro $m > n$. Potom položíme $P[y_1] = f(s) + L[y_0] < P[y_0]$ a z toho jednoznačně určíme funkci $y_1(s)$. Protože $P[y_1] < P[y_0]$, je $y_1(s) < y_0(s)$; rovněž platí $y_1(s) > y^*(s)$ v celém intervalu, protože $L[y_0] > 0$. Obecně položíme

(1.5) $$P[y_{\varkappa+1}] = f(s) + L[y_\varkappa] \quad (\varkappa = 0, 1, 2, \ldots)\,.$$

Jestliže určíme $y_0, y_1, \ldots, y_\varkappa$, je vztahem (1.5) jednoznačně určeno také $y_{\varkappa+1}(s)$ a zároveň platí

$$y_0(s) > y_1(s) > \ldots > y_{\varkappa+1}(s) > y^*(s)\,.$$

Takto vytvořená monotonně klesající zdola omezená posloupnost spojitých funkcí konverguje pro všechna s k limitní funkci $y(s)$. Funkce $y(s)$ je podle Lebesgueovy věty L-integrovatelná na $\langle a, b\rangle$ a pro všechna s platí $L[y_\varkappa] \to L[y]$; z toho plyne (přechodem k limitě pro $\varkappa \to \infty$ ve vztahu (1.5)), že $y(s)$ je hledaným kladným řešením rovnice (1.4). Jak ukazují příklady, není funkce $y(s)$ obecně spojitá. V [7] je uvedena postačující podmínka spojitosti řešení pro zobecněné AIR (definice těchto rovnic je dána v závěru tohoto článku). Obdobná postačující podmínka platí i pro rovnici (1.4).

Nyní řešíme rovnici (1.3) pro $M[y] \not\equiv 0$. Abychom převedli řešení této rovnice na předchozí případ, nahradíme koeficienty při $y^\alpha(s)$ v $M[y] = \sum_{\alpha=0}^{n-1} y^\alpha(s)\, M_\alpha[y]$,

$$(M_\alpha[y] = \sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_\nu \leqq n-\alpha} M_{\alpha\alpha_1\ldots\alpha_\nu} \int_a^b \ldots \int y^{\alpha_1}(t_1) \ldots y^{\alpha_\nu}(t_\nu)\, \mathrm{d}t_1 \ldots \mathrm{d}t_\nu,\ M_n[y] \equiv 0)\,,$$

které ještě závisejí na neznámé funkci, nezápornými konstantami $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$. Označíme-li $\sum_{\alpha=1}^{n-1} \lambda_\alpha y^\alpha(s) = Q[y; \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}]$, přepíšeme rovnici (1.3) ve tvaru

$$P[y] + Q[y; \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}] = f(s) - \lambda_0 + L[y]\,, \tag{1.6}$$

kde předpokládáme $\lambda_0 < f(s)$ pro všechna s. Protože jsou splněny předpoklady Schmeidlerovy iterační metody, lze pomocí ní sestrojit kladné řešení rovnice (1.6) (za počáteční funkci lze zároveň vzít $y_0(s)$ z předchozího případu), které označíme $y(s; \lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1})$ nebo krátce $y(s; \lambda)$. Řešení $y(s; 0, 0, \ldots, 0)$ je totožné s řešením $y(s)$ rovnice (1.4).

Nyní po nalezení $y(s; \lambda)$ určíme konstanty $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ ze vztahů

$$M_\alpha[y(s; \lambda)] = \lambda_\alpha,\ (\alpha = 0, 1, \ldots, n-1)\,. \tag{1.7}$$

Za tím účelem předpokládáme ještě, že existují nezáporné konstanty $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$ takové, že právě určená funkce $y(s; \lambda)$ vyhovuje nerovnostem

$$M_\alpha[y(s; 0, \ldots, 0, c_\alpha, 0, \ldots, 0)] \leqq c_\alpha,\ (\alpha = 0, 1, \ldots, n-1) \tag{1.8}$$

a platí $f(s) - c_0 > 0$ pro všechna s.

Uvažujme v n-rozměrném prostoru $(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1})$ obor $\Lambda = \{0 \leqq \lambda_0 \leqq \leqq c_0, \ldots, 0 \leqq \lambda_{n-1} \leqq c_{n-1}\}$. Abychom mohli řešit (1.7) vzhledem k λ, musí být funkce $y(s; \lambda)$ spojitá vzhledem k λ. Uvedeme proto doplňující postačující podmínky, za kterých lze dokázat jednoznačnost kladného řešení $y(s; \lambda)$ pro všechna λ z oboru Λ, ze které plyne spojitost $y(s; \lambda)$ podle λ. Jde o tyto podmínky:

a) Uvnitř oboru Λ nechť se dá najít funkce $\bar{y}(s)$, pro kterou platí $0 < \bar{y}(s) < y(s; \lambda)$ pro všechna kladná řešení $y(s; \lambda)$ a nechť

$$R'[y(s; \lambda)] = P'[y(s; \lambda)] + Q'[y(s; \lambda);\ \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}] > R'[\bar{y}(s)]$$

a současně $R'[\bar{y}(s)] > L'[y_0]$, kde

$$L'[y] = \sum_{\alpha+\alpha_1+\ldots+\alpha_\nu \leqq n} \int_a^b \ldots \int L_{\alpha\alpha_1\ldots\alpha_\nu}(st_1 \ldots t_\nu)\, \alpha y^{\alpha-1}(s)\ \ y^{\alpha_1}(t_1) \ldots y^{\alpha_\nu}(t_\nu)\, \mathrm{d}t_1 \ldots \mathrm{d}t_\nu\,.$$

b) Nechť

$$\max \iint_a^b \frac{K(s, t; y_0(s), y_0(t))}{R'[\bar{y}] - L'[y_0]}\, y(s)\, y(t)\, \mathrm{d}s\, \mathrm{d}t < 1$$

pro všechny funkce $y(s) > 0$ s $\int_a^b y^2(s)\,ds = 1$, kde

$$K(s,t; y(s), y(t)) = \sum_{k=1}^{\nu} \sum_{\alpha+\alpha_1+\ldots+\alpha_\nu \leq n} \int_a^b \ldots \int L_{\alpha\alpha_1\ldots\alpha_\nu}(st_1 \ldots t_\nu)\, y^\alpha(s)\, y^{\alpha_1}(t_1) \ldots$$
$$\ldots \alpha_k y^{\alpha_k - 1}(t) \ldots y^{\alpha_\nu}(t_\nu)\, dt_1 \ldots dt_{k-1}\, dt\, dt_{k+1} \ldots dt_\nu\,.$$

Využije-li se toho, že funkce $y(s; \lambda)$ je vzhledem k λ nerostoucí, lze za předpokladů (1.8), a), b) dokázat, že existuje soustava konstant $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ splňující vztahy (1.7). K ní náležející funkce $y(s; \lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1})$ vyhovuje integrální rovnici (1.3). Obdržený výsledek shrnuje tato věta:

AIR (1.3), kde je $P'[y] > 0$ pro $y > 0$, má v intervalu $\langle a, b \rangle$ právě jedno spojité kladné řešení $y(s)$, když existují nezáporné konstanty $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$ takové, že platí (1.8), když jsou splněny předpoklady a), b) a existuje funkce $y_0(s) > 0$, pro kterou platí $P[y_0] > f(s) + L[y_0]$.

Tyto výsledky platí až na některé odchylky i pro *Volterrovu AIR*. Podrobněji o tom viz [2].

2. ZOBECNĚNÁ JENTZSCHOVA VĚTA

Z teorie lineárních integrálních rovnic je známo, že řešitelnost lineárních integrálních rovnic (1) a (2) závisí na hodnotách parametru λ. Speciálně homogenní rovnice (2) je netriviálně řešitelná jen pro určité hodnoty λ, které nazýváme *vlastními hodnotami jádra* $K(s, t)$, a funkce $y(s)$, které přísluší této hodnotě, nazýváme *vlastními funkcemi uvedeného jádra*. Existencí kladné reálné vlastní hodnoty se zabývá Jentzschova věta, podle které kladné jádro $K(s, t)$, které patří do L_2 (prostor v 2. mocnině lebesgueovsky integrovatelných funkcí) a je rovno nule nejvýše na množině míry nula, má vždy kladnou reálnou vlastní hodnotu, která je jednoduchá a menší než absolutní hodnoty ostatních vlastních hodnot; příslušná vlastní funkce má v celém oboru stejné znamení.

Nyní si všimneme, jak lze pojem vlastní hodnoty a vlastní funkce a uvedenou Jentzschovu větu zobecnit na AIR. Nejdříve uvedeme zobecněnou Jentzschovu větu pro libovolný totálně spojitý operátor a potom ukážeme, jak se dá aplikovat na AIR.

Zobecněná Jentzschova věta: **Buď $\boldsymbol{A}$ (ne nutně lineární) totálně spojitý operátor v L_1^+. Podprostor kladných funkcí L_1^+ z L_1 je zobrazen operátorem $\boldsymbol{A}$ do sebe (L_1 je prostor lebesgueovsky integrovatelných funkcí). Nechť pro $\varphi(s) \geqq 0$ s normou $\|\varphi\| = C$ platí $\|\boldsymbol{A}\varphi\| \geqq \varepsilon > 0$. Potom existují vlastní hodnota $\lambda > 0$ a vlastní funkce $\varphi(s) \geqq 0$ takové, že $\lambda\varphi = \boldsymbol{A}\varphi$, $\|\varphi\| = C$.**

Důkaz se opírá o Brouwerovu-Schauderovu větu o invariantním bodu: Jestliže spojitý operátor $\boldsymbol{B}$ transformuje konvexní množinu $\mathfrak{X}$ Banachova prostoru do kompaktní části množiny $\mathfrak{X}$, pak existuje takový bod $x \in \mathfrak{X}$, že $\boldsymbol{B}x = x$.

Uvažujme operátor $\boldsymbol{M}\varphi = C\,\boldsymbol{A}\varphi/\|\boldsymbol{A}\varphi\|$. Operátor $\boldsymbol{M}$ zobrazuje podmnožinu funkcí φ s $\|\varphi\| = C$ z L_1^+ do sebe. Protože je tato množina konvexní a operátor $\boldsymbol{M}$ je v důsledku totální spojitosti operátoru $\boldsymbol{A}$ totálně spojitý, jsou splněny předpoklady Brouwerovy-Schauderovy věty a existuje funkce φ taková, že $\varphi = \boldsymbol{M}\varphi$, tj. $\lambda\varphi = \boldsymbol{A}\varphi$, položíme-li $\lambda = \|\boldsymbol{A}\varphi\|/C$.

Nyní uvažujme AIR s kladnými spojitými jádry tvaru

$$\mu y^n(s) = \mathscr{L}[y] + f(s), (f(s) > 0), \tag{2.1}$$

kde

$$\mathscr{L}[y] = \sum_{\alpha_1 + \ldots + \alpha_\nu \leqq n} \int_a^b \ldots \int L_{\alpha_1 \ldots \alpha_\nu}(st_1 \ldots t_\nu)\, y^{\alpha_1}(t_1) \ldots y^{\alpha_\nu}(t_\nu)\, \mathrm{d}t_1 \ldots \mathrm{d}t_\nu\,.$$

$$(L_{\alpha_1 \ldots \alpha_\nu}(st_1 \ldots t_\nu) > 0)$$

Homogenní součástí n-tého řádu (zobecnění pojmu homogenní lineární integrální rovnice) rovnice (2.1) nazveme rovnici

$$\mu y^n(s) = \mathscr{L}_n[y]\,, \tag{2.2}$$

kde

$$\mathscr{L}_n[y] = \sum_{\alpha_1 + \ldots + \alpha_\nu = n} \int_a^b \ldots \int L_{\alpha_1 \ldots \alpha_\nu}(st_1 \ldots t_\nu)\, y^{\alpha_1}(t_1) \ldots y^{\alpha_\nu}(t_\nu)\, \mathrm{d}t_1 \ldots \mathrm{d}t_\nu\,.$$

Hodnotu μ, pro kterou existuje netriviální normované řešení rovnice (2.2), nazveme *vlastní hodnotou*, příslušné řešení $y(s)$ *vlastní funkcí* pro rovnici (2.2). Položíme-li $\boldsymbol{A}y = \sqrt[n]{\mathscr{L}_n[y]}$ a předpokládáme-li, že se v $\mathscr{L}_n[y]$ vyskytuje člen tvaru $\int_a^b L(s, t)\,.$ $.\,y^n(t)\,\mathrm{d}t$ $(L(s, t) > 0)$, dokážeme analogicky jako výše platnost zobecněné Jentzschovy věty pro operátor $\boldsymbol{A}y$. To znamená, že existují taková hodnota $\mu_0 > 0$ a příslušná funkce $y_0(s) > 0$, že platí

$$\mu_0 y_0^n(s) = \mathscr{L}_n[y_0],\ \|y_0\|^n = \int_a^b y_0^n(s)\,\mathrm{d}s = 1,\ \mu_0 = \int_a^b \mathscr{L}_n[y_0]\,\mathrm{d}s\,;$$

tím je dokázána existence kladné vlastní hodnoty a kladné vlastní funkce pro rovnici (2.2).

Dále lze dokázat následující tvrzení:

a) Nechť $\mu > \mu_0, f(s) > 0$. Potom existuje kladné řešení rovnice (2.1). Pro $n = 1$ znamená toto tvrzení, že nemůže existovat větší kladná vlastní hodnota než μ_0.

b) Nechť $|\mu| = \mu_0$, μ je komplexní. Potom existuje jenom triviální řešení rovnice (2.2). Toto tvrzení znamená, že i pro obecné n je μ_0 jednoduchá vlastní hodnota.

Všechny předchozí úvahy se dají aplikovat na obecnější rovnici než je (2.1), a to na rovnici

$$y^n(s) = \mathscr{L}[y] + f(s)\,, \tag{2.3}$$

kde

$$\mathscr{L}[y] = \sum_{\alpha+\alpha_1+\ldots+\alpha_\nu \leqq n} \int_a^b \ldots \int L_{\alpha\alpha_1\ldots\alpha_\nu}(st_1 \ldots t_\nu)\, y^\alpha(s)\, y^{\alpha_1}(t_1) \ldots y^{\alpha_\nu}(t_\nu)\, \mathrm{d}t_1 \ldots \mathrm{d}t_\nu$$

a k ní příslušnou homogenní rovnici

$$y^n(s) = \sum_{\alpha=0}^{n-1} \mathscr{L}_\alpha[y]\, y^\alpha(s)\,,$$

kde

$$\mathscr{L}_\alpha[y] = \sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_\nu = n-\alpha} \int_a^b \ldots \int L_{\alpha\alpha_1\ldots\alpha_\nu}(st_1 \ldots t_\nu)\, y^{\alpha_1}(t_1) \ldots y^{\alpha_\nu}(t_\nu)\, \mathrm{d}t_1 \ldots \mathrm{d}t_\nu\,;$$

jen operátor Ay se zde definuje jako největší kladný kořen rovnice n-tého stupně vzhledem k $z(s)$

$$z^n(s) = \sum_{\alpha=0}^{n-1} z^\alpha(s)\, \mathscr{L}_\alpha[y]\,.$$

3. VĚTA O ALTERNATIVĚ

Vzájemnou souvislost mezi řešitelností lineárních integrálních rovnic (1) a (2) vyjadřuje věta o alternativě: Má-li rovnice (2) jen triviální řešení, má rovnice (1) jedno a jen jedno řešení. Má-li rovnice (2) netriviální řešení, rovnice (1) buď vůbec nemá řešení, nebo má nekonečně mnoho řešení, a to tehdy a jen tehdy, je-li $f(s)$ ortogonální ke všem vlastním funkcím asociované homogenní rovnice

$$z(s) - \lambda \int_a^b K(t, s)\, z(t)\, \mathrm{d}t = 0\,.$$

Protože u AIR se naskýtá stejná otázka o souvislosti řešitelnosti homogenní a nehomogenní rovnice, rozšíříme uvedenou větu o alternativě za určitých předpokladů na AIR. Uvažujeme algebraickou rovnici

$$z^n(s) - A_n(z, y) - \sum_{\beta=0}^{n-1} A_\beta(z, y) \equiv P(z, y) = 0\,, \tag{3.1}$$

kde

$$A_\beta(z, y) = \sum_{\alpha+\alpha_1+\ldots+\alpha_\nu=\beta} z^\alpha(s) \int_a^b \ldots \int K_{\alpha\alpha_1\ldots\alpha_\nu}(st_1 \ldots t_\nu)\, y^{\alpha_1}(t_1) \ldots y^{\alpha_\nu}(t_\nu)\, \mathrm{d}t_1 \ldots \mathrm{d}t_\nu\,;$$

$$(\beta = 0, 1, \ldots, n)$$

jádra $K_{\alpha\alpha_1\ldots\alpha_\nu}(st_1 \ldots t_\nu)$ jsou reálná a spojitá vzhledem ke všem proměnným. Pro $\alpha < n$ a $\alpha_1 = \ldots \alpha_\nu = 0$ představují jádra $K_{\alpha\alpha_1\ldots\alpha_\nu}$ spojité funkce s, $K_{n0\ldots0} \equiv 0$. Položíme-li v (3.1) $z = y$, obdržíme AIR pro funkci $y(s)$.

V rovnici (3.1) jsou koeficienty při $z^\alpha(s)$ závislé na volbě spojité funkce $y(s)$ stejně jako z těchto koeficientů vytvořený diskriminant rovnice (3.1) vzhledem k z, který označíme $D(y)$. Položíme-li všechny funkční koeficienty v $A_0, \ldots, A_{n-1}$ rovny nule, obdržíme z diskriminantu $D(y)$ diskriminant D_0 homogenní součásti $P_0(z, y)$ členů n-tého řádu rovnice (3.1). D_0 je pro $n > 1$ a $y = 0$ roven nule.

Předpokládáme, že pro každou reálnou spojitou funkci $y(s)$ kromě $y \equiv 0$ je $D_0 \neq 0$ pro každé s a že diskriminant $D(y)$ je různý od nuly pro všechny reálné spojité funkce $y(s)$ a také pro $y \equiv 0$. Obě podmínky označíme krátce jako *diskriminantní podmínku.*

Dále předpokládáme, že rovnice $P(z, 0) = 0$ má aspoň jedno reálné řešení $z(s)$. V důsledku diskriminantní podmínky $D(y) \neq 0$ je tento předpoklad splněn pro libovolnou reálnou spojitou funkci $y(s)$. Tento požadavek na $P(z, y)$ označíme jako *podmínku reálnosti.* Jako důsledek obou podmínek lze dokázat, že i rovnice $P_0(z, y) = 0$ má vždy reálné řešení z pro reálné y. O tento důsledek se opírá důkaz věty o alternativě.

Pro $n = 1$ jsou diskriminantní podmínka a podmínka reálnosti vždy splněny.

Nyní zformulujeme větu o alternativě: Jsou-li pro rovnici (3.1) splněny diskriminantní podmínka a podmínka reálnosti, pak pro AIR

$$y^n(s) - A_n(y, y) = \sum_{\beta=0}^{n-1} A_\beta(y, y) \tag{3.2}$$

nastane právě jedna z těchto možností:

a) rovnice (3.2) má (ne nutně reálné) spojité řešení $y(s)$;

b) homogenní rovnice

$$y^n(s) - A_n(y, y) = 0 \tag{3.3}$$

má od nuly různé spojité řešení.

Jak už bylo uvedeno, je pro $n = 1$ v případě řešitelnosti homogenní rovnice obecně nehomogenní rovnice neřešitelná, ale za dodatečné podmínky nakladené na pravou stranu lze nehomogenní rovnici řešit. Pro $n > 1$ je tato otázka otevřena.

Důkaz věty o alternativě je proveden v [4] za následujícího doplňkového předpokladu: Rovnice

$$(\mu y(s))^n - A_n(\mu y, y) = 0$$

má reálná řešení $y \not\equiv 0$ nejvýše pro $\mu < 1$.

Věta o alternativě byla W. Schmeidlerem rozšířena v [6] i na případ komplexních funkcí. Uvedeme jen základní výsledky.

Uvažujme integrální polynom

$$Q(z, y) = z^n(s) + \sum_{\alpha=0}^{n-1} (a_\alpha(s) + b_\alpha(s; y))\, z^\alpha(s)\,, \tag{3.4}$$

kde

$$b_\alpha(s; y) = \sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_\nu \leqq n-\alpha} \int \ldots \int K_{\alpha\alpha_1\ldots\alpha_\nu}(st_1 \ldots t_\nu)\, y^{\alpha_1}(t_1) \ldots y^{\alpha_\nu}(t_\nu)\, \mathrm{d}t_1 \ldots \mathrm{d}t_\nu\,,$$

z něhož pro $y = z$ dostaneme integrální rovnici

$$Q(z, z) \equiv Q(z) = 0\,. \tag{3.5}$$

Homogenní součástí n-tého řádu $Q_n(z)$ výrazu $Q(z)$ rozumíme výraz

$$Q_n(z) = z^n(s) + \sum_{\alpha=0}^{n-1} z^\alpha(s) \sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_\nu = n-\alpha} \int \ldots \int K_{\alpha\alpha_1\ldots\alpha_\nu}(st_1 \ldots t_\nu)\, z^{\alpha_1}(t_1) \ldots \\ \ldots z^{\alpha_\nu}(t_\nu)\, \mathrm{d}t_1 \ldots \mathrm{d}t_\nu\,. \tag{3.6}$$

Předpokládáme, že koeficienty $a_\alpha(s)$, jádra $K_{\alpha\alpha_1\ldots\alpha_\nu}(st_1 \ldots t_\nu)$ a funkce y, z jsou komplexní funkce reálné proměnné a $K_{\alpha 0\ldots 0} \equiv 0$. Proměnné $s, t_1, \ldots, t_\nu$ probíhají stejný konečný jedno- nebo vícerozměrný obor a $\int \mathrm{d}s = 1$. Potom platí následující věty:

Věta 1: Nechť jsou koeficienty a jádra pro integrální polynom (3.4) spojité podle všech proměnných. $\mu_0 \geqq 0$ buď minimum integrálu $J(z) = \int |Q(z)|^2\, \mathrm{d}s$ pro všechny po částech spojité funkce $z(s)$.$Q_n(z)$ nechť splňuje pro tato $z(s)$ podmínku

$$\|Q_n(z)\| > \mu \|z^n\|, (\mu > 0)\,; \tag{3.7}$$

dále nechť diferenciál $\mathrm{d}Q(z, \zeta) = A(s; z)\, \zeta(s) + \int K(s, t; z)\, \zeta(t)\, \mathrm{d}t$,
kde

$$A(s; z) = n z^{n-1}(s) + \sum_{\alpha=0}^{n-1} \alpha[a_\alpha(s) + b_\alpha(s; z)]\, z^{\alpha-1}(s)\,,$$

$$K(s, t; z) = \sum_{\alpha=0}^{n-1} c_\alpha(s, t; z)\, z^\alpha(s)\,,$$

$$c_\alpha(s, t; z) = \sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_\nu \leqq n-\alpha} \int \ldots \int [\alpha_1 K_{\alpha\alpha_1\ldots\alpha_\nu}(stt_2 \ldots t_\nu)\, z^{\alpha_2}(t_2) \ldots \\ \ldots z^{\alpha_\nu}(t_\nu)\, z^{\alpha_1-1}(t) + \ldots + \alpha_\nu K_{\alpha\alpha_1\ldots\alpha_\nu}(st_1 \ldots t_{\nu-1}t)\, z^{\alpha_1}(t_1) \ldots \\ \ldots z^{\alpha_{\nu-1}}(t_{\nu-1})\, z^{\alpha_\nu-1}(t)]\, \mathrm{d}t_1 \ldots \mathrm{d}t_\nu\,,$$

splňuje pro každou po částech spojitou funkci $\zeta(s)$ podmínku

$$\|A(s; z)\, \zeta(s) + \int K(t, s; z)\, \zeta(t)\, \mathrm{d}t\| > K \|\zeta\| \tag{3.8}$$

s pevně zvolenou konstantou $K > 0$ a nechť platí

$$|A(s; z)| > \delta > 0 . \tag{3.9}$$

Podmínky (3.8) a (3.9) nechť platí pro po částech spojité funkce $z(s)$, pro které $J(z) \leqq \mu_0 + \varepsilon$. Potom je $\mu_0 = 0$ a existuje spojitá funkce $z_0(s)$, pro kterou $Q(z_0) = 0$.

Věta 2: Nechť pro $Q_n(z)$ a pro určitou posloupnost po částech spojitých funkcí $\{z_\alpha(s)\}$, pro které $\int |z_\alpha|^{2n} \, ds = \|z_\alpha^n\|^2 = 1$ $(\alpha = 1, 2, \ldots)$, platí

$$\|Q_n(z_\alpha)\| \to 0 \quad \text{pro} \quad \alpha \to \infty \tag{3.10}$$

a nechť předpoklad

$$|A_n(s; z)| > \delta > 0 , \tag{3.11}$$

kde

$$A_n(s; z) = nz^{n-1}(s) + \sum_{\alpha=0}^{n-1} \alpha z^{\alpha-1}(s) \sum_{\alpha_1 + \ldots + \alpha_\nu = n - \alpha} \int \ldots \int K_{\alpha\alpha_1 \ldots \alpha_\nu}(st_1 \ldots t_\nu) \, z^{\alpha_1}(t_1) \ldots$$
$$\ldots z^{\alpha_\nu}(t_\nu) \, dt_1 \ldots dt_\nu$$

platí pro všechny funkce $z(s)$ s $\|z^n\| = 1$, pro které je $\int |Q_n(z)|^2 \, ds \leqq \varepsilon$. Potom existuje spojitá funkce $z_0(s)$ $(\|z_0^n\| = 1)$, pro kterou $Q_n(z_0) = 0$.

Nyní vymezíme třídu $\mathfrak{C}$ integrálních polynomů $Q(z)$ touto definicí: Jestliže pro $Q_n(z)$ platí podmínka (3.7), musejí být pro diferenciál $dQ(z, \zeta)$ splněny podmínky (3.8) a (3.9). Jestliže pro $Q_n(z)$ platí podmínka (3.10), musí být splněna podmínka (3.11).

Pro integrální polynomy třídy $\mathfrak{C}$ platí následující věta: V případě platnosti (3.7) má rovnice $Q(z) = 0$ spojité řešení; platí-li (3.10), má rovnice $Q_n(z) = 0$ spojité normované řešení. Oba případy se vylučují a jeden z nich vždy nastane.

4. SYMETRICKÉ AIR

Velmi důležitou třídu lineárních integrálních rovnic představují *symetrické integrální rovnice*, tj. rovnice typu (1) se symetrickým jádrem K, pro které platí $K(s, t) = K(t, s)$. Tyto rovnice mají řadu speciálních vlastností, zvláště pokud jde o vlastní hodnoty. Platí, že každé symetrické L_2 jádro, které není identicky rovno nule, má nejvýše spočetně mnoho vlastních hodnot. Vlastní hodnoty a vlastní funkce symetrické integrální rovnice s reálným jádrem jsou reálné. Vlastní funkce odpovídající různým vlastním hodnotám jsou navzájem ortogonální.

Podobně zavedeme i v případě AIR pojem symetrické rovnice a ukážeme, do jaké míry se dají zobecnit výsledky z lineárních symetrických integrálních rovnic. Symetrickou AIR n-tého stupně rozumíme rovnici

$$(4.1) \quad \varphi(y) \equiv \mu^n y^n(s) - \sum_{\beta=0}^{n-1} \mu^\beta y^\beta(s) \int_a^b \dots \int K_\beta(st_1 \dots t_\nu)\, y^{\beta+1}(t_1) \dots y^{\beta+1}(t_\nu)\, \mathrm{d}t_1 \dots$$

$$\dots \mathrm{d}t_\nu = 0\,,$$

$$(\beta + 1)(\nu + 1) = n + 1$$

kde jádro $K_\beta(st_1 \dots t_\nu)$ je symetrické vzhledem ke všem proměnným. V dalším nechť n je liché číslo. Rovnici (4.1) lze obdržet jako Eulerovu rovnici variačního problému: Najít maximum μ největšího reálného kořene $z_0(y)$ algebraické rovnice

$$(4.2) \quad z^n - \sum_{\beta=0}^{n-1} z^\beta \int_a^b \dots \int K_\beta(st_1 \dots t_\nu)\, y^{\beta+1}(s)\, y^{\beta+1}(t_1) \dots y^{\beta+1}(t_\nu)\, \mathrm{d}s\, \mathrm{d}t_1 \dots$$

$$\dots \mathrm{d}t_\nu = 0$$

za vedlejší podmínky $\int_a^b y^{n+1}(s)\, \mathrm{d}s = \|y\|^{n+1} = 1$. Z tohoto faktu vychází důkaz níže uvedené věty.

Za předpokladu, že jádra K_β jsou reálná a spojitá podle všech proměnných, platí pro rovnici (4.1) tato věta:

Každá symetrická homogenní AIR $\varphi(y) = 0$ lichého stupně n má vlastní hodnotu a k ní příslušnou spojitou vlastní funkci, je-li diskriminant polynomu $\varphi(y)$ pro všechna $y(s)$ s normou 1, pro která platí $z_0(y) \geqq \mu_0 > 0$, svou absolutní hodnotou větší než konstanta $\gamma(\mu_0) > 0$.

Lichost n zajišťuje existenci aspoň jednoho reálného kořene rovnice (4.2). Všechny závěry zůstanou v platnosti pro jakékoliv n, je-li zaručeno, že rovnice (4.2) má aspoň jeden reálný kořen.

Nyní si všimneme mohutnosti množiny vlastních hodnot rovnice (4.1). Jak bylo uvedeno, má lineární symetrická integrální rovnice nejvýše spočetně mnoho vlastních hodnot. Toto tvrzení je možno dokázat asi takto: Buď $\mu_1 \neq 0$ pevná vlastní hodnota, $y_1(s)$ k ní příslušná normovaná vlastní funkce. Buď $\mu \neq \mu_1$ jiná vlastní hodnota a $y(s)$ příslušná vlastní funkce; zavedeme zkrácené označení $\delta\mu = \mu - \mu_1$, $\delta y(s) = y(s) - y_1(s)$ a vyšetřujeme, zda existuje posloupnost hodnot $\mu \neq \mu_1$ a příslušných funkcí $y(s)$ tak, že $\delta\mu \to 0$ a současně $\|\delta y\| \to 0$. Z rovnic pro $y_1(s)$ a $y(s)$

$$\mu_1 y_1(s) = \int_a^b K(s, t)\, y_1(t)\, \mathrm{d}t\,,$$

$$(\mu_1 + \delta\mu)(y_1(s) + \delta y(s)) = \int_a^b K(s, t)(y_1(t) + \delta y(t))\, \mathrm{d}t$$

dostaneme jejich odečtením rovnici

$$\delta\mu y_1(s) + \mu_1 \delta y(s) + \delta\mu \delta y(s) = \int_a^b K(s, t)\, \delta y(t)\, \mathrm{d}t$$

a z té po vynásobení funkcí $y_1(s)$ a integraci vzhledem k symetrii jádra $K(s, t)$ obdržíme

$$\delta\mu\left(1 + \int_a^b y_1(s)\,\delta y(s)\,\mathrm{d}s\right) = 0\,.$$

Je-li $\|\delta y\|$ dosti malé, je závorka různá od nuly, a tedy $\delta\mu = 0$; to je však spor s předpokladem $\mu \neq \mu_1$. Tím je dokázáno, že neexistuje posloupnost s uvažovanými vlastnostmi; neexistuje tedy hromadný bod množiny vlastních hodnot.

Aplikací této úvahy na rovnici (4.1) lze dokázat následující větu: Jsou-li pro rovnici $\varphi(y) = 0$ pro každou vlastní hodnotu a k ní příslušnou normovanou vlastní funkci $y(s)$ splněny podmínky a) diskriminant polynomu $\varphi(y)$ je pro všechna y s normou $\|y\| = \sqrt[n+1]{\left(\int_a^b y^{n+1}(s)\,\mathrm{d}s\right)} = 1$ různý od nuly, b) pro symetrické jádro

$$K(s, t) = \frac{1}{\sqrt{P(s)\,P(t)}} \sum_{\beta=0}^{n-1} (n - \beta)\,\mu^\beta y^\beta(s)\,y^\beta(t) \int_a^b \dots \int K_\beta(st_1 \dots t_{\nu-1}t)\,.$$
$$.\, y^{\beta+1}(t_1) \dots y^{\beta+1}(t_{\nu-1})\,\mathrm{d}t_1 \dots \mathrm{d}t_{\nu-1}\,,$$

kde

$$P(s) = n\mu^n y^{n-1}(s) - \sum_{\beta=0}^{n-1}{}' \beta\mu^\beta y^{\beta-1}(s) \int_a^b \dots \int K_\beta(st_1 \dots t_\nu)\,y^{\beta+1}(t_1) \dots y^{\beta+1}(t_\nu)\,\mathrm{d}t_1 \dots \mathrm{d}t_\nu$$

existuje právě jedno normované řešení (vždy existuje) homogenní lineární integrální rovnice

$$z(s) - \int_a^b K(s, t)\,z(t)\,\mathrm{d}t = 0\,,$$

potom je vlastních hodnot rovnice (4.1) nejvýše spočetně mnoho. Všechny vlastní funkce jsou spojité.

ZÁVĚR

AIR (1.1) lze zobecnit v tom smyslu, že operátory $P[y]$ a $K[y]$ představují nekonečné řady. Zobecnění tohoto druhu bylo dáno U. Pirlem v [7]. Jde o rovnice typu

$$P[y] + K[y] = f(s)\,,$$

kde

$$P[y] = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(s)\,y^n(s)\,,$$

$$K[y] = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\alpha+\alpha_1+\dots+\alpha_n=n} y^\alpha(s) \int_a^b \dots \int K_{\alpha\alpha_1\dots\alpha_\nu}(st_1 \dots t_n)\,y^{\alpha_1}(t_1) \dots y^{\alpha_n}(t_n)\,\mathrm{d}t_1 \dots \mathrm{d}t_n\,.$$

Na tyto rovnice byla aplikována Schmeidlerova iterační metoda shora a v analogii k ní byla rozvinuta iterační metoda zdola (sestrojená posloupnost funkcí konverguje k řešení zdola), což umožňuje při praktickém výpočtu odhadnout rozdíl mezi hledaným řešením a výsledkem určitého iteračního kroku. Byly také řešeny otázky spojitosti řešení.

E. Schmidt v [1] uvažoval ještě obecnější nelineární integrální rovnice. Nejjednodušší takovou rovnicí je rovnice typu

$$B\begin{pmatrix} s \\ u\ v \end{pmatrix} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} u^{\alpha_0}(s)\, v^{\beta_0}(s) \int_a^b \dots \int K(st_1 \dots t_\varrho)\, u^{\alpha_1}(t_1)\, v^{\beta_1}(t_1) \dots$$
$$\dots u^{\alpha_\varrho}(t_\varrho)\, v^{\beta_\varrho}(t_\varrho)\, \mathrm{d}t_1 \dots \mathrm{d}t_\varrho = 0\,,$$

kde $\alpha_0, \beta_0, \dots, \alpha_\varrho, \beta_\varrho$ je libovolný počet dvojic nezáporných celých čísel, která vyhovují podmínkám

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_\varrho = m,\ \beta_0 + \beta_1 + \dots + \beta_\varrho = n,\ \alpha_i + \beta_i \geqq 1\ (i = 1, \dots, \varrho)$$

a $v(s)$ je zadaná funkce. Lze uvažovat i obecnější rovnice typu

$$B\begin{pmatrix} s \\ uv_1v_2 \dots v_n \end{pmatrix} = 0$$

při zadaných funkcích $v_1(s), \dots, v_n(s)$. Pro tyto rovnice byly v [1] řešeny především otázky jednoznačnosti a větvení řešení.

Uvedená teorie byla aplikována v teorii optického zobrazení na rovnici typu

$$u^{2N}(x) = \lambda^{2N} \int_a^b \dots \int K(x, x_1) \dots K(x, x_{2N})\, \gamma(x_1, \dots, x_{2N})\, u(x_1) \dots u(x_{2N})\, \mathrm{d}x_1 \dots$$
$$\dots \mathrm{d}x_{2N}\,,\quad x \in \langle a, b\rangle$$

(K je tzv. rozptylová funkce optické soustavy, γ je stupeň koherence N-tého řádu a $u(x)$ je hledaná amplituda), která je matematickou formulací úlohy o podobnosti mezi předmětem a jeho obrazem a některé výše uvedené výsledky byly fyzikálně interpretovány [10]. Uvedená rovnice se obdrží z AIR $J[y] = 0$ pro $m = 2N$, $a_0(s) \equiv 1$, $a_k(s) \equiv 0$ $(k = 1, \dots, 2N)$, $n = \nu = 2N$,

$$K_{\alpha\alpha_1 \dots \alpha_{2N}}(st_1 \dots t_{2N}) = -\lambda^{2N}\, K(s, t_1) \dots K(s, t_{2N})\gamma(t_1, \dots t_{2N})$$

pro $\alpha = 0$, $\alpha_k = 1$ $(k = 1, \dots, 2N)$, $K_{\alpha\alpha_1 \dots \alpha_{2N}}(st_1 \dots t_{2N}) \equiv 0$ v ostatních případech.

Literatura

[1] Schmidt, E.: Math. Annalen *65* (1908), 370

[2] Schmeidler, W.: Math. Nachrichten *8* (1952), 31

[3] Schmeidler, W.: Math. Nachrichten *10* (1953), 247

[4] Schmeidler, W., Morgenstern, D.: Archiv d. Math. *5* (1954), 452

[5] Schmeidler W.: *Über symmetrische algebraische Integralgleichungen.* Helsinki: 1956

[6] Schmeidler, W.: J. f. reine u. angew. Math. *210* (1962), 105

[7] Pirl, U.: *Positive Lösungen einer nichtlinearen Integralgleichung.* Berlin: 1953

[8] Nazarov, N.: Acta Univ. Asiae Mediae, Series V-a, Math., 33

[9] Tricomi, F. G.: *Integralnyje uravnenija.* IIL, Moskva: 1960

[10] Peřina, J., Peřinová, V.: Optica Acta *12* (1965), 333.