Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

K. Mison; Zdeněk Pírko

Hmotová optimalizace složených raket

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 13 (1968), No. 2, 69--83

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/137235

POKROKY MATEMATIKY, FYZIKY A ASTRONOMIE
ROČNÍK XIII — ČÍSLO 2

HMOTOVÁ OPTIMALIZACE SLOŽENÝCH RAKET

KAREL MIŠOŇ, ZDENĚK PÍRKO, Praha

V článku se sledují různá hlediska pro dosažení minimální celkové startovací hmoty složené rakety při pevně předepsané hodnotě její rychlosti na konci aktivní periody ve svobodném prostředí. Prvé čtyři odstavce jsou věnovány raketě dvoustupňové, další tři trojstupňové. Teprve v dalších šestnácti odstavcích je řešen obecný případ n-stupňové rakety. Jednotlivá pojetí uvádějí výsledky pro případ různých výtokových rychlostí v jednotlivých stupních i jejich specializaci pro společnou hodnotu výtokové rychlosti ve všech stupních.

Některá řešení jsou provedena užitím koeficientů (GOLDSMITHOVÝCH, COLEMANOVÝCH, WILLIAMSOVÝCH), jejichž opodstatnění poskytuje technická praxe. Pokud vede konkrétní určení k pracným numerickým výpočtům vyžadujícím řešení transcendentní rovnice, je připojen alespoň schematický nomogram ukazující způsob praktického řešení. Uvádí se možnost různých voleb extremálních funkcí a zvláště je vyzdvižena optimálnost idemparametrových raket. Na dvou místech v textu jsou vřazeny ilustrativní numerické příklady.

Poslední odstavec, věnovaný ekonomické optimalizaci dvoustupňové rakety, se vymyká tematice vytknuté nadpisem článku. Je uveden jen proto, aby se stručně naznačil celý okruh otázek, jež zřejmě nelze v praxi podceňovat.

Článek dodržuje důsledně označení užité v [10], [11], [12].

Sestavení:

12. M-optimalizace n-stupňové rakety; $\ln P$ = extrém
13. Specializace U_i = idem
14. Specializace U_i, q_i = idem
15. M-optimatizace n-stupňové rakety; $\Lambda = 1/P$ = extrém
16. Charakteristická vlastnost M-optimalizace
17. Změna optimálního P ze změny jednoho λ_i
18. Lineární vazby mezi charakteristikami a parametry; WILLIAMSOVY koeficienty
19. M-optimalizace složené rakety; $\lambda_i = \mu_i - \nu_i \xi_i$
20. Specializace U_i = idem
21. Optimálnost idemparametrových raket
22. M-optimálnost σ-idemparametrové rakety
23. M-optimalizace s n-optimalizací
24. Ekonomicko-optimální dvoustupňová raketa.

1. M-OPTIMALIZACE DVOUSTUPŇOVÉ RAKETY

Optimalizační úlohy předchozího článku*) hledaly k předem daným hodnotám M, Z (přesněji k jejich předepsanému poměru $P = M/Z$) a k dalším zvoleným hodnotám (totiž k strukturním parametrům q_i) maximální charakteristické rychlosti. V praxi je často významná také právě obrácená úloha, tj. k požadované charakteristické rychlosti (tedy k a priori dané hodnotě V_n a ovšem k dalším vybraným hodnotám) vyhledat optimální (tj. minimální) úhrnnou hmotu M. Takto definovanou raketu nazveme M-optimální.

Zatím uvažujeme dvoustupňovou raketu:
k požadované charakteristické rychlosti

$$V_2 = U_1 \ln (M_1/K_1) + U_2 \ln (M_2/K_2)\,, \tag{1,1}$$

kde

$$M_i = K_i + E_i\,; \quad i = 1, 2\,,$$
$$K_1 = S_1 + M_2\,, \quad K_2 = S_2 + Z\,, \quad M_1 \equiv M\,,$$

je vyhledat minimální úhrnnou hmotu M.

Ze čtveřice volitelných podmínek nutných k úplnému určení relativního rozdělení hmot dvojstupňové rakety**) jsme zatím vyčerpali dvě: předpis charakteristické rychlosti V_2 a požadavek minimálního M. Volbu zbývajících podmínek provedeme několika způsoby:

a) požadavkem jisté vazby mezi hmotovými charakteristikami S_i, M_i, E_i (odst. 2, 3),

---

*) Pokroky MFA *12* (1967), 341.

**) Srv. začátek prvního odstavce článku: Pokroky MFA *12* (1967), 341.

b) vazbou mezi S_i, M_i (odst. 4),

c) vazbou mezi S_i, E_i (odst. 7).

Požadavek předpisu řeckých strukturních parametrů ε_i probereme na trojstupňové raketě (odst. 5) a obecný případ n-stupňové rakety vyšetříme pro předepsané hodnoty latinských strukturních parametrů q_i (odst. 8).

2. GOLDSMITHOVY KOEFICIENTY σ_{ij}

Strukturní hmota jednotlivých stupňů je tvořena jednak hmotou konstrukce (včetně hmoty prázdných nádrží) – a praxe ukazuje, že tato část je úměrná energetické hmotě tohoto stupně –, jednak hmotou raketového motoru – a praxe ukazuje, že tato část je úměrná počáteční hmotě příslušné subrakety, tj.

$$S_i = \sigma_{i1}E_i + \sigma_{i2}M_i \; ; \quad i = 1, 2 \, , \tag{2,1}$$

kde $\sigma_{i,k}$ jsou jisté konstanty (GOLDSMITHOVY koeficienty). Po dosazení do (1,1) získáme

$$V_2 = U_1 \ln \left(M_1/(\sigma_{11}E_1 + \sigma_{12}M_1 + M_2)\right) + U_2 \ln \left(M_2/(\sigma_{21}E_2 + \right. \\ \left. + \sigma_{22}M_2 + Z)\right) . \tag{2,2}$$

Považujeme tuto rovnici za implicitní určení závislosti $M_1 \equiv M_1(M_2)$ a z toho důvodu vyjádříme oba jmenovatele (rovné $K_{1,2}$) v závislosti na $M_{1,2}$ (bez přítomnosti energetických charakteristik $E_{1,2}$, které jsou na $M_{1,2}$ také závislé).

K tomu cíli píšeme

$$K_1 = S_1 + M_2 = \sigma_{11}E_1 + \sigma_{12}M_1 + M_2 = \sigma_{11}(M_1 - K_1) + \sigma_{12}M_1 + M_2$$

$$K_2 = S_2 + Z = \sigma_{21}E_2 + \sigma_{22}M_2 + Z = \sigma_{21}(M_2 - K_2) + \sigma_{22}M_2 + Z \, ,$$

takže

$$K_1 = ((\sigma_{11} + \sigma_{12})\, M_1 + M_2)/(1 + \sigma_{11})$$

$$K_2 = ((\sigma_{21} + \sigma_{22})\, M_2 + Z)/(1 + \sigma_{21}) \, .$$

S těmito hodnotami nabývá (2) tvaru

$$V_2 = U_1 \ln M_1 + U_2 \ln M_2 - U_1 \ln (\sigma_1 M_1 + M_2) - U_2 \ln (\sigma_2 M_2 + Z) + \\ + U_1 \ln (1 + \sigma_{11}) + U_2 \ln (1 + \sigma_{21}) \, , \tag{2,3}$$

kde jsme pro stručnost položili

$$\sigma_i = \sigma_{i1} + \sigma_{i2} \; ; \quad i = 1, 2 \, .$$

Při a priori daných $V_2, Z, U_i, \sigma_{i1}, \sigma_{i2}$; $i = 1, 2$ jde zřejmě o implicitní zadání $M_1 \equiv \equiv M_1(M_2)$, jak jsme výše připomněli. Pro postižení optima derivujeme $\mathrm{d}/\mathrm{d}M_2$ kladouce ihned podmínku extrému $\mathrm{d}M_1/\mathrm{d}M_2 = 0$

$$0 = U_2/M_2 - U_1/(\sigma_1 M_1 + M_2) - U_2\sigma_2/(\sigma_2 M_2 + Z)\,.$$

Pro užitečný parametr $p_2 = M_2/Z$ druhé subrakety dostaneme odtud snadnou úpravou výraz

$$M_2/Z = (U_2 - U_1 + U_2\sigma_1 M_1/M_2)/(U_1\sigma_2)\,, \tag{2,4}$$

v němž jsou obě hledané veličiny $M_{1,2}$ soustředěny do zlomků M_2/Z, M_1/M_2. Tato podmínka vede patrně k minimu funkce $M_1 \equiv M_1(M_2)$ zadané rovnicí (3).

Optimální poměr M_1/M_2, popř. M_2/Z (tj. užitečné parametry první a druhé subrakety) obdržíme řešením rovnic (3) a (4). Vyloučením užitečného zatížení Z z obou rovnic

$$V_2 = U_1 \ln M_1 + U_2 \ln M_2 - U_1 \ln(\sigma_1 M_1 + M_2) - U_2 \ln(\sigma_2 M_2 + \\ + U_1\sigma_2 M_2/(U_2 - U_1 + U_2\sigma_1 M_1/M_2)) + U_1 \ln(1 + \sigma_{11}) + U_2 \ln(1 + \sigma_{21})$$

dostáváme pro hledaný parametr M_1/M_2 $(= p_1)$ transcendentní rovnici

$$V_2 = -U_1 \ln \sigma_1 - U_1 \ln(1 + M_2/(\sigma_1 M_1)) - U_2 \ln \sigma_2 - U_2 \ln U_2(1 + \\ + \sigma_1 M_1/M_2) + U_2 \ln(U_2 - U_1 + U_2\sigma_1 M_1/M_2) + U_1 \ln(1 + \sigma_{11}) + \\ + U_2 \ln(1 + \sigma_{21})\,.$$

Soustředíme-li konstantní členy rovnice na levé straně

$$-V_2/U_1 + \ln((1 + \sigma_{11})/\sigma_1) + U_2/U_1 \ln((1 + \sigma_{21})/\sigma_2) = \\ = \ln(1 + M_2/(\sigma_1 M_1)) + U_2/U_1 \ln(1 + \sigma_1 M_1/M_2) - U_2/U_1 \ln(1 + \\ + \sigma_1 M_1/M_2 - U_1/U_2)$$

a zavedeme-li pro stručnost

$$\left.\begin{aligned} \mu &= U_2/U_1\,, \\ y &= -V_2/U_1 + \ln((1 + \sigma_{11})/\sigma_1) + \mu \ln((1 + \sigma_{21})/\sigma_2)\,, \\ x &= M_2/(\sigma_1 M_1)\,, \end{aligned}\right\} \tag{2,5}$$

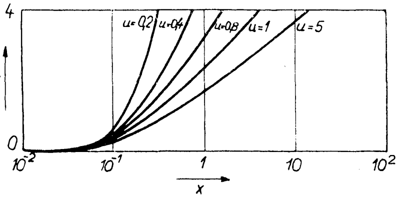
zjednoduší se rovnice na tvar

$$y = (1 + \mu)\ln(1 + x) - \mu \ln(1 + (1 - 1/\mu)\,x)\,. \tag{2,6}$$

Odtud plyne možnost grafického určení vyšetřované M-optimální rakety:

Připojený grafikon závislostí $y \equiv y(x)$ s μ-izopletami (obr. 1) dovoluje k vypočteným hodnotám y, μ odečíst odpovídající x a z jeho hodnoty získat poměr $M_2/M_1 = x\sigma_1$.

Např.: Pro $U_1 = 3050\,\mathrm{ms}^{-1}$, $\sigma_{11} = 0{,}15$, $\sigma_{12} = 0{,}05$ $(\sigma_1 = 0{,}2$; startovací stupeň s klasickým raketovým motorem), $U_2 = 7600\,\mathrm{ms}^{-1}$, $\sigma_{12} = 0{,}25$, $\sigma_{22} = 0{,}15(\sigma_2 = 0{,}4$; nosný stupeň s perspektivním motorem) a pro požadavek $V_2 = 7650\,\mathrm{ms}^{-1}$ (zhruba první kosmická rychlost) vypočteme $y \approx 2,1$. Z grafu pro $\mu \approx 2{,}5$ odečteme $x \approx 2{,}5$. S touto hodnotou vypočteme $M_1/M_2 \approx 2$, dále z (4) $M_2/Z \approx 6{,}2$, a tedy úhrnný užitečný parametr $P = M/Z = M_1/Z \approx 12$.



Obr. 1. Nomogram k M-optimalizaci dvoustupňové rakety v GOLDSMITHOVÝCH koeficientech.

3. SPECIALIZACE $U_1 = U_2$

V případě stejných výtokových rychlostí v obou stupních $U_1 = U_2$ se výrazy pro užitečný parametr druhé subrakety (2,4) podstatně zjednoduší na

$$M_2/Z = (\sigma_1/\sigma_2)\, M_1/M_2\,, \quad M_2 = \sqrt{(M_1 Z\, \sigma_1/\sigma_2)} = Z\sqrt{(P\, \sigma_1/\sigma_2)}\,.$$

Při další specializaci $\sigma_1 = \sigma_2$ je na M-optimální dvoustupňové raketě užitečný parametr druhého stupně roven hmotovému poměru jejích subraket.

Podle toho, jde-li o parametr prvého druhu (řecký) nebo o parametr druhého druhu (latinský), jde o poměr hmoty subrakety k složené raketě nebo složené rakety k subraketě.

4. M-OPTIMALIZACE DVOUSTUPŇOVÉ RAKETY; PŘÍPAD $\sigma_{i1} = 0$

Zavedené GOLDSMITHOVY koeficienty σ_{ij}; $i, j = 1, 2$ poskytují pro každý stupeň dvojici technických parametrů. Spokojíme-li se konstruktivně chudším předpokladem úměrnosti strukturní a počáteční hmoty každého stupně

$$S_i = \bar{\sigma}_i M_i\,; \quad i = 1, 2\,,$$

získáme ve srovnání s odst. 2 jednodušší vyjádření. Místo tamních výsledných rovnic nastoupí

$$V_2 = U_1 \ln M_1 + U_2 \ln M_2 - U_1 \ln(\bar{\sigma}_1 M_1 + M_2) - U_2 \ln(\bar{\sigma}_2 M_2 + Z),$$
$$M_2/Z = (U_2 - U_1 + U_2 \bar{\sigma}_2 M_1/M_2)/(U_1 \bar{\sigma}_2),$$
$$x = M_2/(\bar{\sigma}_1 M_1), \quad y = -V_2/U_1 - \ln \bar{\sigma}_1 - (U_2/U_1) \ln \bar{\sigma}_2 .$$

Přechod od σ_{ij} k $\bar{\sigma}_i$ formálně znamená položit

$$\sigma_{i1} \equiv 0, \quad \sigma_{i2} \equiv \bar{\sigma}_i; \quad i = 1, 2. \tag{4,1}$$

5. M-OPTIMALIZACE TROJSTUPŇOVÉ RAKETY; ŘEŠENÍ V M_i

Myšlenku odst. 1 netřeba nijak omezovat na dvoustupňovou raketu. V případě obecné n-stupňové rakety jde o předpis charakteristické rychlosti

$$V_n = \sum_{i=1}^{n} U_i \ln(M_i/K_i).$$

Než přistoupíme k obecnému řešení, probereme v tomto odstavci za účelem prohlédnutí metodiky výpočtů případ trojstupňové rakety $n = 3$. Aby nešlo jen o pouhé rozšíření předchozích výsledků, uvažujeme místo předpisu vazeb GOLDSMITHOVÝMI koeficienty konstrukční zadání řeckých strukturních parametrů ε_i.

Jde tedy o úlohu:

Při předepsané hodnotě

$$V_3 = \sum_{i=1}^{3} U_i \ln(M_i/K_i), \tag{5,1}$$

kde

$$K_i = S_i + M_{i+1}, \quad S_i = \varepsilon_i N_i, \quad N_i = M_i - M_{i+1}; \tag{5,2}$$
$$i = 1, 2, 3: \quad M_4 \equiv Z$$

minimalisovat veličinu $M_1 \equiv M$.

Rovnice (1) s užitím (2) poskytuje závislost

$$V_3 = U_1 \ln M_1 + U_2 \ln M_2 + U_3 \ln M_3 - U_1 \ln(\varepsilon_1 M_1 + (1 - \varepsilon_1) M_2) - \\ - U_2 \ln(\varepsilon_2 M_2 + (1 - \varepsilon_2) M_3) - U_3 \ln(\varepsilon_3 M_3 + (1 - \varepsilon_3) Z), \tag{5,3}$$

která při daných hodnotách $V_3, Z, U_i, \varepsilon_i$; $i = 1, 2, 3$ obsahuje triádu proměnných M_i; $i = 1, 2, 3$. Nutné podmínky sledovaného extrému

$$\partial M_1/\partial M_2 = \partial M_1/\partial M_3 = 0$$

vyjádříme stanovením parciálních diferenciálů $\mathrm{d}M_i$ z rovnic

$$(\partial V_3/\partial M_1)\,\mathrm{d}M_1 + (\partial V_3/\partial M_2)\,\mathrm{d}M_2 = 0\,,$$

$$(\partial V_3/\partial M_1)\,\mathrm{d}M_1 + (\partial V_3/\partial M_3)\,\mathrm{d}M_3 = 0\,,$$

kde V_3 je dáno pravou stranou rovnice (3). Obdržíme tak

$$\left(\frac{U_1}{M_1} - \frac{U_1\varepsilon_1}{\varepsilon_1 M_1 + (1-\varepsilon_1)\,M_2}\right)\mathrm{d}M_1 + \left(\frac{U_2}{M_2} - \frac{U_1(1-\varepsilon_1)}{\varepsilon_1 M_1 + (1-\varepsilon_1)\,M_2} - \right.$$

$$\left. - \frac{U_2\varepsilon_2}{\varepsilon_2 M_2 + (1-\varepsilon_2)\,M_3}\right)\mathrm{d}M_2 = 0\,,$$

$$\left(\frac{U_1}{M_1} - \frac{U_1\varepsilon_1}{\varepsilon_1 M_1 + (1-\varepsilon_1)\,M_2}\right)\mathrm{d}M_1 + \left(\frac{U_3}{M_3} - \frac{U_2(1-\varepsilon_2)}{\varepsilon_2 M_2 + (1-\varepsilon_2)\,M_3} - \right.$$

$$\left. - \frac{U_3\varepsilon_3}{\varepsilon_3 M_3 + (1-\varepsilon_3)\,Z}\right)\mathrm{d}M_3 = 0\,.$$

I lze psát podmínky extrému

$$\left(\frac{1}{M_2} - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_2 M_2 + (1-\varepsilon_2)\,M_3}\right)U_2 - \frac{1-\varepsilon_1}{\varepsilon_1 M_1 + (1-\varepsilon_1)\,M_2}U_1 = 0\,,$$

$$\left(\frac{1}{M_3} - \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_3 M_3 + (1-\varepsilon_3)\,Z}\right)U_3 - \frac{1-\varepsilon_2}{\varepsilon_2 M_2 + (1-\varepsilon_2)\,M_3}U_2 = 0$$

čili

$$\left.\begin{aligned}&(1-\varepsilon_2)\,U_2M_3(\varepsilon_1M_1 + (1-\varepsilon_1)\,M_2) - (1-\varepsilon_1)\,U_1M_2(\varepsilon_2M_2 + (1-\varepsilon_2)\,M_3) = 0\,,\\&(1-\varepsilon_3)\,U_3Z(\varepsilon_2M_2 + (1-\varepsilon_2)\,M_3) - (1-\varepsilon_2)\,U_2M_3(\varepsilon_3M_3 + (1-\varepsilon_3)\,Z) = 0\,.\end{aligned}\right\} \tag{5,4}$$

Obě závislosti vedou patrně k minimu funkce $M_1 \equiv M_1(M_2, M_3)$ určené implicitně rovnicí (3).

Optimální poměry M_1/M_2, M_2/M_3, popř. M_3/Z obdržíme řešením transcendentní soustavy (3) (4). Lze použít tohoto iterativního postupu:

Za účelem řešení podle M_2/M_3, M_3/Z přepíšeme (4) do tvaru

$$(1-\varepsilon_2)\,U_2(\varepsilon_1M_1/M_2 + 1 - \varepsilon_1)\,M_3/M_2 - (1-\varepsilon_1)\,U_1(\varepsilon_2 + (1-\varepsilon_2)\,M_3/M_2) = 0,$$

$$(1-\varepsilon_3)\,U_3(\varepsilon_2M_2/M_3 + 1 - \varepsilon_2)\,Z/M_3 - (1-\varepsilon_2)\,U_2(\varepsilon_3 + (1-\varepsilon_3)\,Z/M_3) = 0\,.$$

Získáme tak

$$\frac{M_2}{M_3} = \frac{1-\varepsilon_2}{\varepsilon_2}\,\frac{U_2 - U_1}{U_1} + \frac{\varepsilon_1(1-\varepsilon_2)}{\varepsilon_2(1-\varepsilon_1)}\,\frac{U_2}{U_1}\,\frac{M_1}{M_2}\,,$$

$$\frac{M_3}{Z} = \frac{1 - \varepsilon_3}{\varepsilon_3} \frac{U_3 - U_2}{U_2} + \frac{\varepsilon_2(1 - \varepsilon_3)}{\varepsilon_3(1 - \varepsilon_2)} \frac{U_3}{U_2} \frac{M_2}{M_3}.$$

Pro numerické řešení vybereme – „vhodně" zvolíme – číselnou hodnotu (M_1/M_2). Podle obou předchozích rovnic pro a apriori dané veličiny U_i, ε_i; $i = 1, 2, 3$ k ní vypočteme poměry (M_2/M_3), (M_3/Z). Odtud stanovíme

$$(M_1/M_2)(M_2/M_3)(M_3/Z) = (M/Z) = (P), \tag{5,5}$$

takže k předepsané hodnotě užitečného zatížení Z známe pro zvolený výběr (M_1/M_2) i veličiny

$$(M_1) = (P) Z, \quad (M_2) = (M_2/M_3)(M_3/Z) Z, \quad (M_3) = (M_3/Z) Z. \tag{5,6}$$

Jejich dosazením do pravé strany (3) vypočteme hodnotu (V_3). Byl-li první výběr (M_1/M_2) dobrý, bude takto nalezená hodnota (V_3) blízká k předem dané hodnotě V_3 a rozdělení (5), (6) blízké k optimálnímu. Objeví-li se mezi (V_3), V_3 nepřijatelný rozdíl, opravíme výběr (M_1/M_2) na $((M_1/M_2))$ a postup opakujeme. Atd. Analogie ke GOLDSMITHOVU diagramu odst. 2 zde neexistuje. Právě popsaný postup je však velmi jednoduchý, vede snadno k uspokojivému výsledku a při citlivém prvním kroku i velmi rychle.

6. SPECIALIZACE U_i, ε_i = idem

Výsledky získané v předchozím odstavci se stanou názorově interpretovatelnějšími v případě ε-idemparametrové (tedy i q-idemparametrové) rakety se stejnými výtokovými rychlostmi ve všech stupních

$$\varepsilon_{1,2,3} = \varepsilon; \quad U_{1,2,3} = U.$$

Závislosti (5,4) se zjednodušují na

$$M_1 M_3 - M_2^2 = M_2 Z - M_3^2 = 0,$$

tj.

$$M_i = \sqrt{(M_{i-1} M_{i+1}}; \quad i = 1, 2, 3; \quad (M_4 \equiv Z),$$

takže

$$M_3/Z = M_1/M_2 = M_2/M_3; \quad M_3 = Z \sqrt[3]{P}.$$

M-optimální ε-idemparametrová (tj. q-idemparametrová) raketa je i p-idemparametrová (tj. i λ-idemparametrová); je to tedy ekviparametrová raketa. Užitečný parametr třetího stupně (latinský $p_3 = M_3/Z$) je roven hmotovému poměru první subrakety (tj. původní rakety) a druhé subrakety a zároveň se rovná hmotovému poměru druhé a třetí subrakety.

To je bezprostřední rozšíření speciálního případu $(\sigma_1 = \sigma_2)$ odst. 3.

7. M-OPTIMALIZACE TROJSTUPŇOVÉ RAKETY; ŘEŠENÍ V N_i. COLEMANOVY KOEFICIENTY

Postup uvedený v obou předchozích odstavcích dává pro M-optimální raketu hodnoty M_i jejích jednotlivých stupňů. M-optimální raketa může být určena i jinak, např. hmotou svých stupňů, tj. hodnotami nosných hmot N_i. Jestliže jsme stanovili optimální M_i, pak pro odpovídající optimální N_i platí

$$N_i = M_i - M_{i+1} \,.$$

Předložený odstavec naznačuje přímý postup k určení optimálních nosných hmot N_i, a to za jistého předpokladu závislosti obou sčítanců $E_i + S_i = N_i$ v každém stupni.

Praxe ukazuje, že lze strukturní hmoty S_i jednotlivých stupňů považovat za lineární funkce jejich energetických hmot E_i:

$$S_i = \alpha_i E_i + \beta_i \,; \quad i = 1, 2, \ldots, n \,,$$

kde α_i, β_i jsou jisté konstanty (Colemanovi součinitelé) diktované konstruktivní stránkou projektu. S vyjádřením Ciolkovského čísel subraket

$$r_i = M_i/K_i = M_i/(M_i - E_i) \,; \quad E_i = N_i - \alpha_i E_i - \beta_i \tag{7,1}$$

platí pro charakteristickou rychlost obecné n-stupňové rakety:

$$V_n = \sum_{i=1}^{n} U_i \ln (M_i/K_i) = \ln \prod_{i=1}^{n} (M_i/K_i)^{U_i} =$$

$$= \ln \prod_{i=1}^{n} \Big((Z + \sum_{j=i}^{n} N_j) / (Z - (N_i - \beta_i)/(1 + \alpha_i) + \sum_{j=i}^{n} N_j) \Big)^{U_i} \,,$$

kde menšenec v posledním jmenovateli

$$E_i = (N_i - \beta_i)/(1 + \alpha_i)$$

je bezprostředním důsledkem (1).

Pro seznámení s metodou výpočtu postačí konkretizace na případ trojstupňové rakety, kdy

$$e^{V_3} = \left(\frac{N_1 + N_2 + N_3 + Z}{N_1 + N_2 + N_3 + Z - (N_1 - \beta_1)/(1 + \alpha_1)} \right)^{U_1} \cdot$$

$$\cdot \left(\frac{N_2 + N_3 + Z}{N_2 + N_3 + Z - (N_2 - \beta_2)/(1 + \alpha_2)} \right)^{U_2} \left(\frac{N_3 + Z}{N_3 + Z - (N_3 - \beta_3)/(1 + \alpha_3)} \right)^{U_3} . \tag{7,2}$$

Jako podmínku extrému položíme

$$\partial V_3/\partial N_1 = \partial V_3/\partial N_2 = \partial V_3/\partial N_3 \,.\text{*)} \tag{7,3}$$

*) Srv. poznámku na konci odstavce.

Snadným pochodem nalezneme

$$\partial V_3/\partial N_1 = U_1(N_2 + N_3 + Z + \beta_1)/\Phi_1\,,$$
$$\partial V_3/\partial N_2 = -U_1(N_1 - \beta_1)/\Phi_1 + U_2(N_3 + Z + \beta_2)/\Phi_2\,,$$
$$\partial V_3/\partial N_3 = -U_1(N_1 - \beta_1)/\Phi_1 - U_2(N_2 - \beta_2)/\Phi_2 + U_3(Z + \beta_3)/\Phi_3\,,$$

kde je pro stručnost zavedeno

$$\Phi_i = (Z + \sum_{j=i}^{3} N_j)\left((1 + \alpha_i)(Z + \sum_{j=i}^{3} N_j) - (N_i - \beta_i)\right); \quad i = 1, 2, 3\,.$$

Dosazením do (3) získáme krátkou úpravou dvojici rovnic

$$\left.\begin{aligned} \frac{U_1(N_2 + N_3 + Z)}{(1 + \alpha_1)(N_1 + N_2 + N_3 + Z)} &= \frac{U_2(\beta_2 + N_3 + Z)}{(1 + \alpha_2)(N_2 + N_3 + Z) - (N_2 - \beta_2)}\,, \\ \frac{U_2(N_3 + Z)}{(1 + \alpha_2)(N_2 + N_3 + Z)} &= \frac{U_3(\beta_3 + Z)}{(1 + \alpha_3)(N_3 + Z) - (N_3 - \beta_3)}\,, \end{aligned}\right\} \quad (7{,}4)$$

které s (2) minimalizují funkci

$$M = N_1 + N_2 + N_3 + Z\,.$$

Numerické stanovení optimálních hodnot $N_{1,2,3}$ je nasnadě: Při daných veličinách $Z, U_i, \alpha_i, \beta_i$; $i = 1, 2, 3$ vyjádříme z druhé rovnice (4) $N_2 \equiv N_2(N_3)$ a s touto závislostí získáme z prvé rovnice $N_1 \equiv N_1(N_3)$. Po dosazení do (2) vznikne relace pro N_3. Odtud získané N_3 dovoluje stanovení $N_{1,2}$ a odpovídající rozdělení hmot $M_{1,2,3}$.

Poznámka.

Poněvadž V_3 je předepsaná hodnota, určitá konstanta, musí vyjádření $V_3 \equiv V_3(N_1, N_2, N_3)$, dané vztahem (2), splňovat

$$dV_3 = (\partial V_3/\partial N_1)\,dN_1 + \partial V_3/\partial N_2)\,dN_2 + \partial V_3/\partial N_3)\,dN_3 = 0\,. \qquad (7{,}5)$$

Protože $M = N_1 + N_2 + N_3 + Z$, kde $Z \equiv$ konst, má být extrémem, platí $dN_1 + dN_2 + dN_3 = 0$, tedy např. $dN_1 = -(dN_2 + dN_3)$. Dosazením do (5) vychází v podmínkách extrému

$$(\partial V_3/\partial N_2 - \partial V_3/\partial N_1)\,dN_2 + (\partial V_3/\partial N_3 - \partial V_3/\partial N_1)\,dN_3 = 0$$

nezávisle na volbě $dN_{2,3}$. Tedy

$$\partial V_3/\partial N_2 - \partial V_3/\partial N_1 = 0\,, \quad \partial V_3/\partial N_3 - \partial V_3/\partial N_1 = 0\,,$$

což je v hlavním textu uvedená podmínka (3).

8. *M*-OPTIMALIZACE SLOŽENÉ RAKETY; OBECNÝ PŘÍPAD
($P = 1/\Lambda =$ extrém)

Pro rozšíření úvah dřívějších odstavců věnovaných M-optimalizaci dvoustupňové a trojstupňové rakety na raketu n-stupňovou volíme poněkud odlišnou cestu.

Nechť jsou programem konstrukce předepsány strukturní parametry q_i (a tím i úhrnný strukturní parametr $Q = \sum_{i=1}^{n} q_i$) a charakteristická rychlost V_n. Relativní rozdělení hmot dodefinujeme požadavkem minimálního (maximálního) latinského (řeckého) úhrnného užitečného parametru $P = M/Z$ ($\Lambda = Z/M$).

Nutné podmínky lokálního extrému

$$P = \sum_{i=1}^{n} p_i = \sum_{i=1}^{n} r_i(q_i - 1)/(q_i - r_i) = \text{extrém}$$

při vazbě

$$V_n = \ln \prod_{i=1}^{n} r_i^{U_i}$$

vyjádříme rovnicemi

$$F(r_1, r_2, \ldots, r_n) = P + \Phi(\ln \prod_{i=1}^{n} r_i^{U_i} - \text{konst}),$$

$\partial F/\partial r_i = 0$; $i = 1, 2, \ldots, n$,
které dávají

$$q_i(q_i - 1)/(q_i - r_i)^2 \prod_{j=1}^{n}{}' (r_j(q_j - 1)/(q_j - r_j)) + \Phi U_i/r_i = 0\,;$$
$$i = 1, 2, \ldots, n\,,$$

kde akcent při multiplikačním symbolu znamená vynechání činitele s indexem $j = i$. Zaměníme-li tu LAGRANGEŮV multiplikátor Φ za $1/\Phi$, obdržíme rovnice

$$U_i/r_i + \Phi q_i(q_i - 1)/(q_i - r_i)^2 \prod_{j=1}^{n}{}' (r_j(q_j - 1)/(q_j - r_j)) = 0\,; \quad i = 1, 2, \ldots, n\,,$$

s nimiž jsme se setkali již dříve*), takže předložená úloha je řešena tam obsaženými parametrickými vazbami**), které patrně vedou k požadovanému minimu optimalizované hmoty M. Pro úhrnný užitečný parametr P platí***)

$$P = \frac{M}{Z} = \frac{q_n - 1}{q_n/r_n - 1} \prod_{i=1}^{n-1} \frac{(q_i - 1)(1 - \mu_i(1 - r_n/q_n))}{\mu_i(1 - r_n/q_n)}\,, \tag{8,1}$$

*) Srv. Pokroky MFA *12* (1967), 348, rov. (6,2).
**) Tamtéž, rov. (6,3).
***) Tamtéž, rov. (6,5).

kde

$$\mu_i = U_n/U_i$$

a CIOLKOVSKÉHO číslo poslední subrakety r_n je určeno rovnicí*)

$$\sum_{i=1}^{n-1} U_i \ln \left(1 - \mu_i(1 - r_n/q_n)\right) q_i + U_n \ln r_n - V_n = 0 . \tag{8,2}$$

M-optimalizační proces sledovaný v tomto odstavci vede tedy na rezolventu (2), která je (proti V_n-optimalizaci**) transcendentní; její numerické řešení je (stejně jako tam i zde) nejpracnější částí optimalizačního procesu.

Poznámka.

Zavedeme-li

$$\mu_i^* = 1/\mu_i - 1 = U_i/U_n - 1 = (U_i - U_n)/U_n ,$$

můžeme (1) psát ve tvaru

$$P = M/Z = (q_n - 1)/(q_n/r_n - 1)_n \prod_{i=1}^{n-1} (q_i - 1)\,(r_n/q_n + \mu_i^*) .$$

9. SPECIALIZACE $U_i =$ idem

Při stejných výtokových rychlostech ve všech stupních $U_i = U$ se výsledek předchozího odstavce redukuje na

$$P = M/Z = (r_n/(q_n - r_n))^n \prod_{i=1}^{n} (q_i - 1)$$

s rezolventou

$$U \sum_{i=1}^{n} \ln (r_n q_i/q_n) - V_n = 0 .$$

Tuto rovnici lze psát

$$r_n/q_n = Q^{-1/n} \exp\left(V_n/(nU)\right) , \tag{9,1}$$

takže

$$P = \frac{M}{Z} = \frac{\prod_{i=1}^{n} (q_i - 1)}{(Q^{1/n} \exp\left(-V_n/(nU)\right) - 1)^n} .$$

---

*) Srv. Pokroky MFA *12* (1967), 349, rov. (6,7).

**) Tamtéž, rov. (6,6).

Přitom (stále v podmínkách optima)

$$p_i = (q_i - 1)/(q_i/r_i - 1) = (q_i - 1)/(Q^{1/n} \exp(-V_n/(nU)) - 1),$$
$$r_i = r_n q_i/q_n = Q^{1/n} q_i \exp(V_n/(nU)) \Rightarrow R = \exp(V_n/U).$$

Poslední vztah je ovšem evidentní.

10. SPECIALIZACE $U_i =$ idem; $q_i =$ idem

Zostříme-li ještě předchozí specializaci na q-idemparametrovou raketu, je podle (9,1) $r_i =$ idem a raketa je ekviparametrová. Získané výsledky se ještě dále zjednodušují

$$P = M/Z = ((q - 1)/(q \exp(-V_n/(nU)) - 1))^n, {}^{*)} \tag{10,1}$$
$$p_i = \sqrt[n]{P} = (q - 1)/(q \exp(-V_n/(nU)) - 1),$$
$$r_i = \exp(V_n/(nU)).$$

Rozumí se zase v podmínkách optima.

11. EXTREMÁLNÍ FUNKCE

V literatuře se nalezne řada příspěvků k úloze sledované předchozími odstavci. Je to přirozené vzhledem k tomu, že požadavek optima, tj. minima M (P), je praxí kladen obzvláště často. Vcelku však tyto příspěvky nepřinášejí mnoho nového: jejich cenu lze spatřovat v prvé řadě v námětech pracovně praktické povahy. Ukazuje se, že řešení M-optimalizace lze v početním ohledu rozmanitě upravovat různými volbami konstrukce *extremální funkce*. Rozumíme jí funkci mající extrémy pro ty hodnoty nezávisle proměnných, pro něž má optimalizovaná funkce extrém.

Této myšlence jsou věnovány čtyři příští odstavce.

12. M-OPTIMALIZACE n-STUPŇOVÉ RAKETY; ln $P =$ extrém

V případě M-optimalizace nastává extrém P s extrémem ln P, takže úloha je řešena také rovnicemi

$$F(r_1, r_2, \ldots, r_n) = \ln P + \Phi(V_n - \text{konst}), \quad \partial F/\partial r_i = 0; \quad r_i = 1, 2, \ldots, n,$$

---

*) Znova k tomuto vztahu dospějeme níže (14,1).

kde

$$\ln P = \sum_{j=1}^{n} \ln \left(r_j(q_i - 1)/(q_j - r_j)\right), \quad V_n = \sum_{j=1}^{n} U_j \ln r_j .$$

Je tedy

$$\partial F/\partial r_i = 1/(q_i - r_i) + (1 + \Phi U_i)/r_i = 0$$

a podmínky vedoucí k minimu M znějí

$$r_i = q_i(1 + \Phi U_i)/(\Phi U_i) \; ; \quad i = 1, 2, \ldots, n \,.^{*)} \tag{12,1}$$

V podmínkách optima pak platí

$$p_i = (q_i - 1)/(q_i/r_1 - 1) = -(q_i - 1)(1 + \Phi U_i),$$

$$P = M/Z = (-1)^n \prod_{i=1}^{n} (q_i - 1)(1 + \Phi U_i), \tag{12,2}$$

kde Φ je nyní dáno rovnicí plynoucí dosazením (1) do CIOLKOVSKÉHO vzorce pro charakteristickou rychlost složené rakety

$$V_n = \sum_{i=1}^{n} U_i \ln r_i ,$$

tj. transcendentní rovnicí

$$\sum_{i=1}^{n} U_i \ln \left(q_i(1 + \Phi U_i)/(\Phi U_i)\right) - V_n = 0 \,. \tag{12,3}$$

13. SPECIALIZACE $U_i =$ idem

Při společné hodnotě výtokové rychlosti ve všech stupních $U_i = U$ se rezolventa (12,3) předchozího odstavce zjednodušuje na

$$U(\sum_{i=1}^{n} \ln q_i + n \ln \left((1 + \Phi U)/(\Phi U)\right)) - V_n = 0$$

dávajíc

$$\ln \left((1 + \Phi U)/(\Phi U\right) = (V_n/U - \ln Q)/n \,,$$

---

*) Vypočteme-li odtud

$$-1/\Phi = U_i(1 - r_i/q_i) \,,$$

můžeme místo (1) psát (6,3) Pokroky MFA *12* (1967), 348.

tj.

$$1 + \Phi U = (1 - Q^{1/n} \exp(-V_n/(nU)))^{-1} .$$

Optimální hodnota úhrnného užitečného parametru P je podle (12,2)

$$P = M/Z \equiv M_1/Z_n = (\prod_{i=1}^{n} (q_i - 1))/(Q^{1/n} \exp(-V_n/(nU)) - 1)^n .$$

(Dokončení článku v příštím čísle.)

KVANTITATIVNÍ METALOGRAFICKÁ ANALÝZA JAKO SOUČÁST KOMPLEXNÍHO STUDIA FYZIKÁLNÍCH VLASTNOSTÍ MATERIÁLŮ

IVO KRAUS, Praha

ÚVOD

Metody fyzikálního nebo mechanického studia látek jsou stejně jako získané experimentální výsledky vždy závislé na povaze studovaného objektu. Aby byla měření reprodukovatelná, musí být prováděna za stejných podmínek a na stejně definovaných materiálech. Jednou z vlastností, které určují každou látku, a tedy i kov, je struktura. Její charakteristika pomocí kvantitativní metalografie je proto nezbytnou součástí popisu studovaných vzorků při sledování libovolných fyzikálních veličin.

Soustavný výzkum struktury kovů a slitin jako určujícího činitele jejich mechanických a fyzikálně chemických vlastností nastal v polovině minulého století, kdy se začalo ke studiu kovů používat mikroskopu. Od těch dob se stala mikroskopická analýza (optická a v posledních dvaceti letech i elektronová) nejrozšířenější metodou zkoumání kovových materiálů[1]).

Zpočátku se metalografický výzkum omezoval hlavně na kvalitativní charakteristiku vnitřní stavby. Tak byl objeven např. perlit, martenzit aj. Pro úkoly výroby se však samotný kvalitativní rozbor ukázal jako nedostatečný. Ke kontrole kvality kovů a slitin v průmyslových podmínkách byly proto vypracovány speciální stupnice struktur pro polokvantitativní charakteristiku nekovových příměsí (např. grafit v litině). Ale ani použití těchto srovnávacích metod nevedlo k získání kvantitativních hodnot potřebné přesnosti pro objektivní zhodnocení struktury.

---

[1]) Popisovaná metoda však není omezena jen na tyto látky — naopak pro zkoumání kovů a slitin byla přenesena z oblasti věd geologických. Stejné metody optické analýzy struktury se používá v keramice (keramografie). Pouze příprava výbrusu (nábrusu) je odlišná; pozorování struktury keramických materiálů může být v některých případech uskutečněno i v procházejícím světle.