S. A. Kasjanjuk

O interpretaci ak. J. S. Fedorova trojrozměrného eukleidovského prostoru

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 2 (1957), No. 3, 292--302

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/137223`

S. A. KASJANJUK (Kijev)

O INTERPRETACI AK. J. S. FEDOROVA TROJROZMĚRNÉHO EUKLEIDOVSKÉHO PROSTORU*)

Velký ruský krystalograf, akademik Jevgraf Stěpanovič Fedorov v jedné ze svých prací napsal: „*Korunou uvědomělé činnosti lidského rozumu je řešení problémů cestou matematické analysy.*" Těmito slovy je jasně vyjádřen základní princip vědeckého bádání J. S. Fedorova.

Při vypracování theorie struktury krystalů a při klasifikaci krystalických polyedrů použil geometrických konstrukcí. Geometricky řešil akad. J. S. Fedorov i theoretické otázky nauky o horninách — petrografie. Též při chemickém průzkumu složitých sloučenin hodně používal matematické methody.

Úkolem této statě je seznámit čtenáře časopisu se základními geometrickými myšlenkami akad. J. S. Fedorova a s jejich současným použitím v krystalografii, röntgenografii, geologii a v jiných vědách.

Současná geometrie vyšetřuje tři skupiny základních geometrických objektů: body, přímky, roviny (elementy, primy, sekundy — podle terminologie J. S. Fedorova). Systémem axiomů[1]) jsou mezi těmito objekty zavedeny vztahy: „leží na" (incidence), „leží mezi", „je roven" (kongruence), rovnoběžnost a pojem spojitosti. Realisovat (interpretovat) systém axiomů znamená sestrojit systém základních objektů a definovat vztahy mezi nimi tak, aby byly splněny všechny axiomy[2]).

Ta nebo ona realisace (model) umožní často získat výsledky, které by se jinak musely dokazovat; jinými slovy realisace je možno využít pro hlubší a podrobnější studium některých objektů (nikoliv jen matematických, ale i jiné podstaty, na př. fysikálních, chemických atd.).

Přejdeme k realisaci trojrozměrného euklidovského prostoru orientovanými kružnicemi v rovině[3]). Jednotlivé axiomy zde ověřovat nebudeme. Ukážeme však, že mezi základními objekty (body, přímkami, rovinami) kartézského trojrozměrného prostoru, o kterém víme, že splňuje všechny axiomy, a základními objekty cyklografického modelu existuje vzájemně jednoznačný vztah. Na základě tohoto vztahu snadno nahlédneme, že cyklografický model splňuje všechny axiomy elementární geometrie.

Základní pojmy a vztahy vyložíme níže.

1. Realisace bodů

Bod v prostoru je určen třemi souřadnicemi (x, y, z). Ve vyšetřovaném modelu nazveme „bodem" orientovanou kružnici ležící ve zvolené rovině, se středem v bodě o souřadnicích (x, y) a poloměrem $|z|$, při čemž, je-li $z > 0$, je kružnice orientována kladně (proti směru hodinových ručiček), je-li $z < 0$, je kružnice orientována záporně (po směru hodinových ručiček). Je-li $z = 0$, přechází odpovídající kružnice v bod.

Tedy každé trojici reálných čísel (x, y, z), t. j. každému bodu kartézského trojroz-

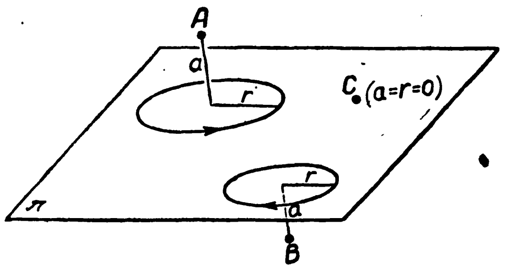
*) S. A. Kasjanjuk, *Ob intěrpretacii akad. J. S. Fedorova trechmernogo jevklidova prostranstva*, Mat. v škole, 1, 1956.

[1]) Jde o Hilbertovu axiomatiku elementární geometrie. *Pozn. překl.*

[2]) Říkáme též, že konstruujeme model daného systému axiomů. *Pozn. překl.*

[3]) Jde o t. zv. cyklografický model. Dále budeme tohoto názvu užívat. *Pozn. překl.*

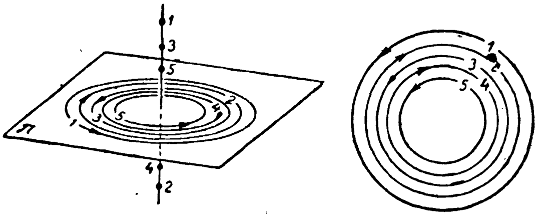
měrného prostoru odpovídá právě jedna orientovaná kružnice; dvěma různým orientovaným kružnicím odpovídají dvě různé trojice čísel (x', y', z') a (x'', y'', z''). Jinými slovy mezi body trojrozměrného kartézského prostoru a „body“ cyklografického modelu existuje vzájemně jednoznačná korespondence. Prakticky se tento vztah sestrojí velmi snadno. Zvolíme rovinu π, kterou nazveme rovinou realisace. Kolmý průmět libovolného bodu prostoru do roviny realisace je středem příslušné orientované kružnice a vzdálenost bodu od roviny realisace je délka poloměru[4]). Kružnice jsou potom orientovány tak, aby bodům ležícím na jedné „straně“ roviny π[5]) odpovídaly stejně orientované kružnice. Body ležící v rovině realisace (C, *obr. 1*) odpovídají samy sobě.



Obr. 1

2. Realisace přímek

Při realisaci přímky, kolmé k rovině π, středy všech kružnic — „bodů“ splynou v jediný bod; poloměry a orientace těchto kružnic závisejí na vzdálenosti bodu od roviny realisace a na jeho poloze v prostoru (*obr. 2*).



Obr. 2

Přímce kolmé k rovině realisace tedy odpovídá soustava soustředných kružnic.

Přímce rovnoběžné s rovinou realisace odpovídá soustava stejně orientovaných kružnic stejného poloměru, jejichž středy leží na přímce (*obr. 3*).

Zajímavá je přímka protínající rovinu realisace (*obr. 4*). Budeme rozlišovat dva případy: úhel α, který přímka svírá s rovinou realisace, je menší nebo větší než 45°. Případ, kdy přímka svírá s rovinou realisace úhel $\alpha = 45°$, vyšetříme zvlášť.

Průsečíku O přímky s rovinou realisace odpovídá bod; ostatním bodům této přímky odpovídají kružnice se středy na jedné přímce[6]) a s poloměry přímo úměrnými vzdálenostem středů od bodu O.

Nechť je $\alpha < 45°$. Všechny kružnice odpovídající bodům přímky mají dvě společné tečny. Ukážeme tedy, že tečna OC kružnice se středem v bodě A je tečnou i ostatních kružnic, které odpovídají bodům dané přímky. Nechť AB je poloměr kružnice se středem v bodě A, kolmý na OA. Přímka OB se nazývá hlavní přímkou. Tato přímka totiž charakterisuje polohu dané přímky v prostoru; úhel $\alpha = \sphericalangle BOA$ je úhel, který svírá daná přímka s rovinou realisace.

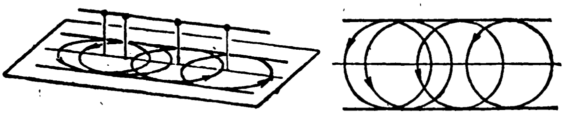
---

[4]) Rovinu π zvolíme ovšem za souřadnicovou rovinu (x, y). *Pozn. překl.*
[5]) T. j. bodům, ležícím ve stejném poloprostoru určeném rovinou π. *Pozn. překl.*
[6]) V dalším budeme tuto přímku nazývat střednou dané „přímky“. *Pozn. překl.*

Platí

$$AC = AB = r; \quad A_1C_1 = A_1B_1 = r_1;$$
$$OA = a; \quad OA_1 = a_1.$$

Úhel mezi střednou a tečnou OC označme β. Budiž β_1 úhel mezi střednou a tečnou OC_1, ovšem za předpokladu, že každá kružnice má tečnu procházející bodem O.



Obr. 3

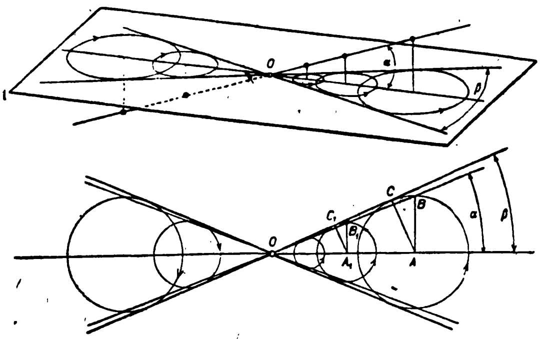
Uvažujme trojúhelníky: OBA, OCA a OB_1A_1, OC_1A_1. Je ihned vidět, že platí:

$$\frac{r}{a} = \operatorname{tg} \alpha, \quad \frac{r}{a} = \sin \beta;$$

$$\frac{r_1}{a_1} = \operatorname{tg} \alpha, \quad \frac{r_1}{a_1} = \sin \beta_1.$$

Z těchto vztahů plyne

$$\sin \beta_1 = \frac{r_1}{a_1} = \operatorname{tg} \alpha = \frac{r}{a} = \sin \beta, \text{ t. j. } \beta_1 = \beta.$$



Obr. 4

Všechny kružnice tedy mají společnou tečnu a mezi úhly α, β platí vztah

$$\operatorname{tg} \alpha = \sin \beta. \tag{1}$$

Je-li $\alpha = 45°$, potom $\beta = 90°$ a tedy tečny splývají v jednu, která je kolmá ke středné (*obr. 5*).

Je-li $\alpha > 45°$, potom kružnice odpovídající bodům dané přímky nemají společnou tečnu; danou přímku charakterisuje hlavní přímka OA (*obr. 6*).

Orientace kružnic umožňuje rozlišovat přímky symetrické vzhledem k rovině realisace.

3. Realisace rovin

V prostoru je rovina určena třemi body neležícími na jedné přímce, dvěma se protínajícími přímkami, dvěma rovnoběžkami, bodem a přímkou a pod.

Pro jednoduchost určíme rovinu v prostoru její stopou v rovině realisace (t. j. průsečnicí s rovinou realisace) a kolmicí na stopu, ležící v dané rovině. Úhel dané roviny a roviny realisace je roven úhlu, který svírá rovina realisace s uvedenou kolmicí. V našem modelu lze tedy „rovinu" určit její stopou h a úhlem α, který svírá příslušná rovina v prostoru s rovinou realisace (*obr. 7*).

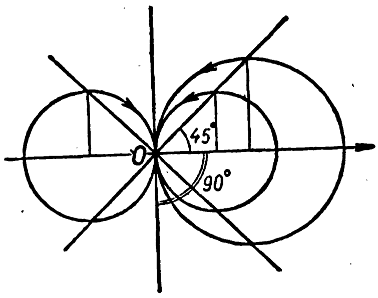
Abychom rozhodli, zda daný „bod" „leží" v dané „rovině", spustíme z jeho středu kolmici na stopu. Stanovíme úhel této kolmice a hlavní přímky. Aby „bod" ležel v „rovině", je třeba, aby tento úhel byl roven úhlu α.

4. Některé úlohy

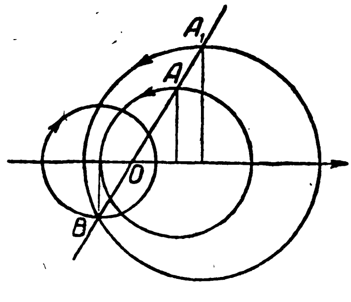
Abychom se naučili pracovat s touto poněkud svéráznou deskriptivní geometrií, objasníme na několika úlohách vztahy mezi základními objekty cyklografického modelu.

Úloha 1. *Dvěma danými „body" A a B jest proložiti „přímku"* (*obr. 8*).

Nechť A je kružnice — „bod" o souřadnicích (x_1, y_1, z_1); B — kružnice — „bod" o souřadnicích (x_2, y_2, z_2). Ježto známe souřadnice daných „bodů"; známe též jejich



Obr. 5



Obr. 6

poloměry. Abychom proložili „přímku" danými „body", je třeba vést k příslušným kružnicím společné tečny nebo sestrojit hlavní přímku. Tím jsou určeny i ostatní „body" hledané „přímky" (a tedy i „přímka"). Avšak tečny lze sestrojit jen v případě, že příslušná přímka svírá s rovinou realisace úhel menší než 45°.

Úlohu lze řešit analyticky. Stanovme na příklad vzdálenost x středu menší kružnice — „bodu" od bodu O, kterým procházejí jak tečny, tak hlavní přímka.

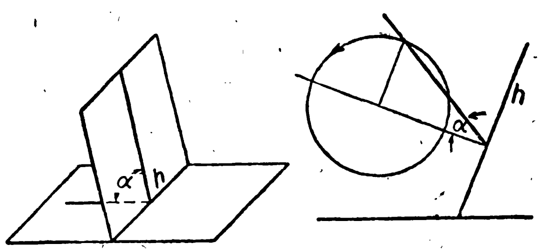
Z podobnosti trojúhelníků plyne

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{x+a}{x}, \quad \frac{r_2}{r_1} = 1 + \frac{a}{x}$$

a odtud

$$x = \frac{ar_1}{r_2 - r_1}.$$

Zároveň s konstrukcí tečny můžeme určit úhel, který svírá se střednou a vzdálenost středů kružnic — „bodů" od bodu O. Při konstrukci hlavní přímky zjistíme úhel α.



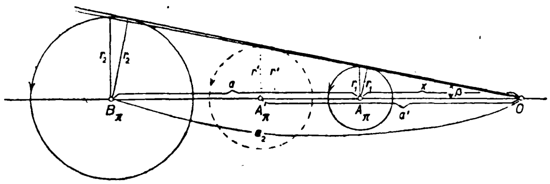
Obr. 7

Použijeme-li označení z *obr. 8*, vidíme, že platí vztahy:

$$\frac{r'}{a'} = \frac{r_2}{a_2} = \frac{r_1}{x} = \sin\beta = \operatorname{tg}\alpha.$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \sin\beta = \frac{r_2 - r_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}};$$

$$a' = \frac{r'}{\sin\beta} = \frac{r'}{\operatorname{tg}\alpha}.$$



Obr. 8

Úloha 2. *Stanovit vzdálenost dvou daných „bodů" A a B (obr. 9).*
Vzdáleností dvou „bodů" rozumíme vzdálenost příslušných bodů v prostoru.
V analytické geometrii se pro vzdálenost bodů (x_1, y_1, z_1) a (x_2, y_2, z_2) odvozuje vzorec:

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}.$$

Vzdálenost středů orientovaných kružnic — „bodů" je

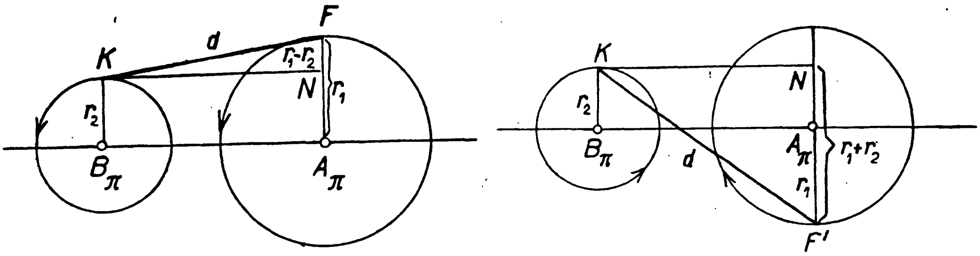
$$l = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

V případě stejně orientovaných kružnic — „bodů" máme

$$(z_1 - z_2)^2 = (r_1 - r_2)^2 \; ^{7)};$$

v případě opačně orientovaných kružnic — „bodů" máme

$$(z_1 - z_2)^2 = (r_1 + r_2)^2 \; ^{7)}.$$



Obr. 9

[7]) Poloměry r_1, r_2 jsou ovšem nezáporné. *Pozn. překl.*

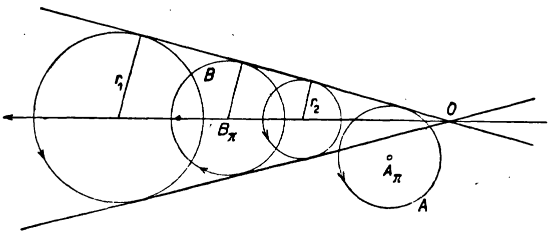
Tedy vzdálenost dvou „bodů“ je rovna délce přepony KF resp. KF'.

Úloha 3. *Rozhodnout, zda daný „bod“ A (x, y, z) leží na dané „přímce“* (*obr. 10*).

„Bod“ — kružnice leží na dané „přímce“ právě tehdy, jestliže:

1. střed kružnice leží na středné dané „přímky“;
2. kružnice se dotýká společných tečen (v případě $\alpha < 45°$), anebo konec poloměru, kolmého ke středné leží na hlavní přímce;
3. je zachována orientace.

Na *obr. 10* „bod“ A neleží na dané „přímce“, protože jeho střed A_π neleží na středné dané „přímky“. „Bod“ B neleží na dané „přímce“, protože není splněna třetí podmínka.

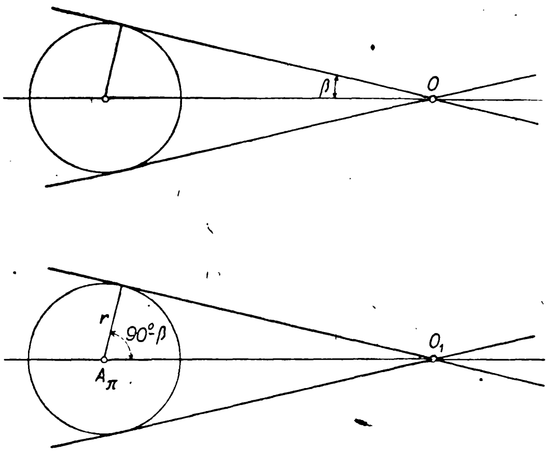


Obr. 10

Úloha 4. *„Bodem“ A (x_1, y_1, z_1) veďte „přímku“, rovnoběžnou k dané „přímce“* (*obr. 11*).

Kolmé průměty dvou rovnoběžek v prostoru do roviny realisace (středné) jsou rovnoběžné. Kromě toho rovnoběžné přímky svírají s rovinou realisace stejné úhly.

Máme-li sestrojit „přímku“, jdoucí daným „bodem“ rovnoběžně s danou „přímkou“, sestrojíme nejdříve střednou hledané „přímky“, t. j. přímku, jdoucí středem daného „bodu“ — kružnice rovnoběžně se střednou dané „přímky“. Zbývá ještě určit bod O_1. V bodě A_π (střed daného „bodu“ — kružnice) sestrojíme poloměr, který svírá se střednou úhel $90° - \beta$; na jeho konci vztyčíme kolmici. Hledaný bod O_1 je průsečík této kolmice se střednou (obr. 11).



Obr. 11

V případě $\alpha > 45°$ je postup nutno pozměnit. V bodě A_π sestrojíme poloměr kolmý na střednou; koncem poloměru sestrojíme přímku, která svírá s poloměrem úhel $90° - \alpha$; průsečík této přímky se střednou je hledaný bod O_1.

Úloha 5. *Rozhodnout, zda se dané „přímky“ protínají* (obr. 12).

Dvě „přímky“ se protínají právě tehdy, mají-li společný „bod“ — kružnici, t. j. existuje-li kružnice těchto vlastností:

1. její střed je průsečíkem středných daných „přímek“;
2. dotýká se společných tečen obou „přímek“[8]);

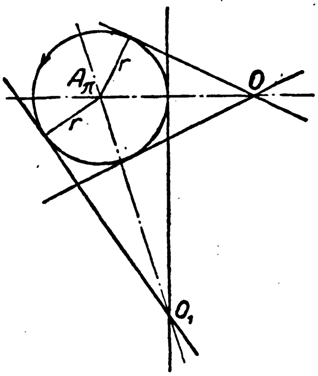
[8]) To platí ovšem pro případ $\alpha < 45°$. *Pozn. překl.*

3. je zachována orientace (obr. 12).

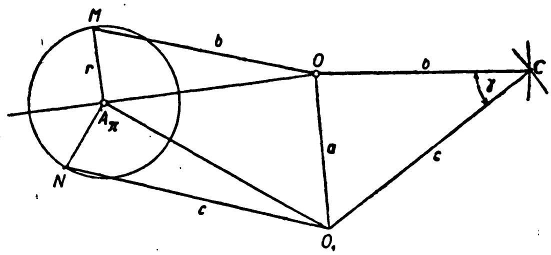
Přenecháváme čtenáři jako cvičení řešit úlohu v případě, že „přímky" jsou určeny střednými a hlavními přímkami. Zde je ovšem třeba druhou podmínku pozměnit (jak?).

Úloha 6. *Stanovit úhel dvou se protínajících „přímek"* (obr. 13).

Úhlem dvou „přímek" rozumíme úhel odpovídajících přímek v prostoru.



Obr. 12

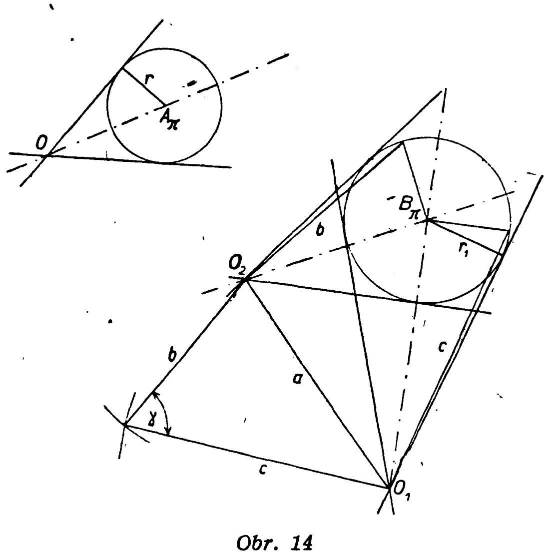


Obr. 13

Body O a O_1 spojíme úsečkou a sestrojíme trojúhelník OO_1C o stranách: $OO_1 = a$, $OC = OM = b$, $O_1C = O_1N = C$; a, b, c jsou délky stran prostorového trojúhelníka s vrcholy O, O_1, A, kde A je průsečík příslušných přímek v prostoru. Trojúhelník OO_1C se sestrojí snadno, neboť již víme (úloha 2), jak se stanoví vzdálenost dvou „bodů" (viz obr. 13).

Úhel γ při vrcholu C je hledaným úhlem.

Není těžké řešit úlohu v případě, kdy odpovídající přímky v prostoru se protínají v rovině realisace, t. j. kdy příslušný „bod" — kružnice (průsečík) přechází v bod. Řešení přenecháváme čtenáři.



Obr. 14

Úloha 7. *Stanovit úhel dvou mimoběžek.*

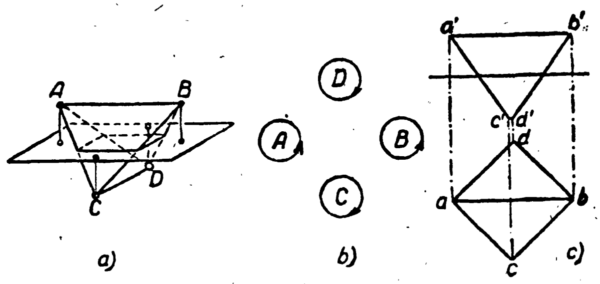
Úhlem dvou mimoběžek rozumíme úhel libovolných dvou protínajících se přímek, z nichž každá je rovnoběžná s jednou z obou mimoběžek (viz úloha 4).

Jde tedy o stanovení úhlu dvou se protínajících přímek. To jsme však již učinili v úloze 6 (obr. 14).

Probrané úlohy jistě postačí k tomu, aby čtenář sám mohl řešit další úlohy, na příklad:

Úloha 8. *Z daného „bodu" spustit „kolmici" na danou „rovinu".*

Úloha 9. *Daným „bodem" proložit „rovinu", kolmou k dané „přímce".*
Úloha 10. *Stanovit vzdálenost dvou mimoběžných „přímek".*
Úloha 11. *Určit úhel, sevřený danou „přímkou" a „rovinou".*
Úloha 12. *Určit úhel dvou „rovin".*
Úloha 13. *Daným „bodem" proložit „rovinu" rovnoběžnou s danou „rovinou".*
Úloha 14. *Daným „bodem" vést „přímku" rovnoběžnou s danou „rovinou".*



Obr. 15

Úloha 15. *Sestrojit průsečnici dvou „rovin".*
Úloha 16. *Danou „přímkou" proložit „rovinu" kolmou k dané „rovině".*

Podobných úloh je možno sestrojit celou řadu. Známe-li již realisaci rovin, přímek a bodů v cyklografickém modelu, můžeme přistoupit k realisaci jednoduchých mnohostěnů.

Je účelné vyšetřovat realisaci mnohostěnů v souvislosti s jejich použitím v geologii.

5. Realisace mnohostěnů

Methoda akad. A. N. Zavarnického zobrazování atomových struktur nerostů

Sovětský vědec akad. A. N. Zavarnickij použil vyšetřovaného modelu ke studiu atomových struktur nerostů.[9])

Chemické a fysikální vlastnosti nerostů souvisí s atomovou strukturou nerostů a naopak znalost struktury nerostů pomáhá vysvětlit souvislost chemických a fysikálních vlastností. Při řešení mnohých problémů je třeba znát úhly mezi stěnami krystalů a symetrie v konfiguraci stěn.

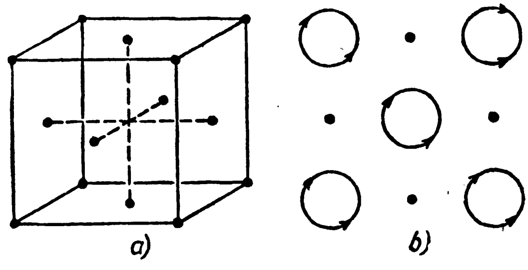
K tomu je výhodné použít cyklografického modelu trojrozměrného eukleidovského prostoru. Nebudeme se zde podrobně přednostmi této methody zabývat; to by nás odvedlo od vlastního předmětu.

Při realisaci atomové struktury nerostu je výhodné za poloměr kružnice — „bodu" vzít místo vzdálenosti realisovaného bodu od roviny realisace její polovinu. Průměr kružnice — „bodu" je tedy roven vzdálenosti bodu od roviny realisace. Při tom bodům ležícím nad rovinou realisace[10]) odpovídají kladně orientované kružnice (proti směru ručiček hodinových), bodům ležícím pod rovinou realisace odpovídají záporně orientované kružnice (po směru ručiček hodinových).

[9]) A. N. Zavarnickij, *Ob izobražensii atomnych struktur miněralov,* IAN SSSR, s. geol., 6, 1949.
[10]) Viz pozn. pod čarou [8]). *Pozn. překl.*

Výhodou této realisace je, že zachovává symetrii v konfiguraci bodů.

Na obr. 15a se promítají čtyři body A, B, C, D, tvořící vrcholy pravidelného čtyřstěnu do roviny procházející jeho středem kolmo k dvojné ose symetrie. Na obr. 15b jsou zakresleny orientované kružnice, odpovídající bodům A, B, C, D. Na obr. 15c je naznačeno zobrazení bodů A, B, C, D v pravoúhlém promítání na dvě průmětny (body C a D jsou poněkud posunuty).

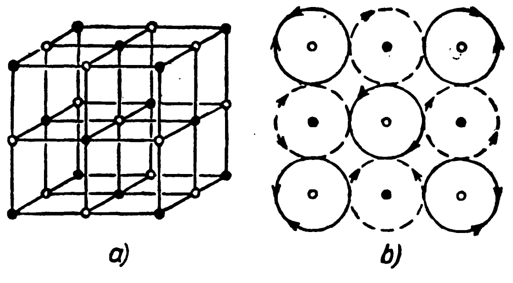


Obr. 16

Zobrazení čtyř bodů A, B, C, D Mongeovou methodou nezachovává symetrii. Kromě toho se některé úsečky mohou překrývat, čímž se obrázek stává nepřehledným. V cyklografickém modelu mohou splynout jen obrazy bodů symetricky položených vzhledem k rovině realisace; avšak jim odpovídající kružnice jsou opačně orientovány. Pro lepší přehled můžeme takové kružnice zakreslit dvojitě.

V praxi je důležité si vhodně zvolit rovinu realisace a omezit počet bodů, které zobrazujeme, aby diagram byl jednoduchý a přehledný a aby bylo možno vyčíst symetrie v konfiguraci krystalické hmoty.

A. N. Zavarnickij sestavil několik jednoduchých pravidel pro konstrukci diagramů:



Obr. 17

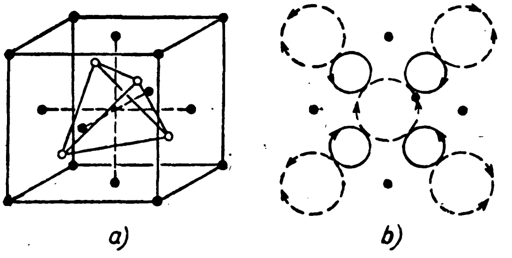
1. V diagramu musí být zachyceny body elementární buňky tak, aby bylo zřetelné rozložení ostatních bodů struktury krystalu, a aby byla zachycena symetrie.

2. Rovina realisace musí být kolmá k hlavní ose symetrie krystalu, anebo být rovinou symetrie.

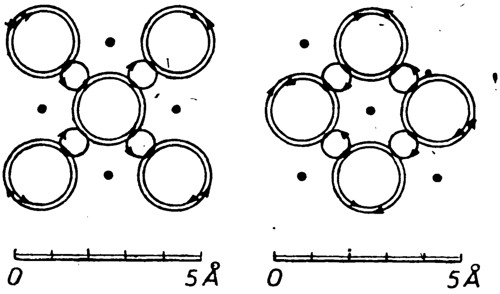
3. Volba středu, t. j. bodu uvnitř buňky, jímž prochází rovina realisace, závisí na účelu zobrazování:

a) je-li účelem zobrazení zachytit rozložení atomu v elementární buňce, vezmeme střed buňky;

b) v příručkách (*Structurbericht* a j.) i speciálních pojednáních se počátek souřadnicového systému, kterým se popisuje rozložení atomů, volí v levém zadním rohu spodní roviny elementární buňky. Vezmeme-li tento počátek za střed, potom se konstrukce kružnic — „bodů" poněkud zjednoduší, neboť rozměry kružnic a jejich středy jsou potom dány přímo souřadnicemi. Abychom zachytili symetrie elementární buňky, musíme zobrazit všechny atomy ležící v rovině realisace. V některých speciálních případech je třeba rovinu realisace zvolit poněkud jinak.



Obr. 18



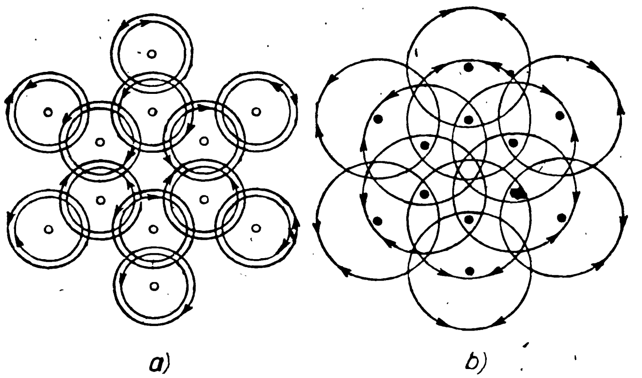
Obr. 19

Uvedeme několik příkladů.

Na obr. 16a) je zobrazena elementární strukturní buňka typu mědi. Rovnoběžnými posuny mnohostěnu ve směru hran o jejich délku získáme celou strukturu. Jak je vidět, mřížka mědi (též zlata, stříbra a platiny) je plošně centrovaná.

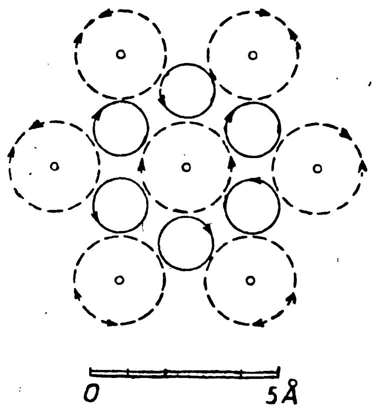
Atomy jsou rozloženy ve vrcholech a středech stěn krychlové buňky.

Na obr. 16b) je zachycena realisace této struktury orientovanými kružnicemi. Rovina realisace je kolmá k jedné ze čtyř os elementární buňky. Střed je totožný se středem buňky.



Obr. 20

Na obr. 17a) a b) je zakreslena elementární buňka kuchyňské soli a její realisace v cyklografickém modelu. Tato struktura je složitější tím, že obsahuje dva druhy iontů — sodíku a chloru. Plné kružnice a černé tečky představují ionty sodíku, čárkované představují ionty chloru. Na obrázku vidíme, že ionty Na ve struktuře kuchyňské soli tvoří plošně centrovanou mřížku (srovnejte s předcházejícím příkladem).



Obr. 21

Na obr. 18a) je zachycena struktura zinkového blejna ZnS. Atomy zinku opět tvoří plošně centrovanou mřížku. Uvnitř elementární buňky tvoří atomy síry vrcholy čtyřstěnu. Realisace této struktury je nakreslena na obr. 18b). Čtenář mu snadno porozumí.

Přenecháváme čtenáři jako cvičení stanovit podle daného diagramu realisací struktury hmoty a provést jednoduché výpočty (na příklad stanovit úhly některých hran nebo stěn struktury, vzdálenosti mezi body atd.).

Na obr. 19 je nakreslena struktura diamantu: a) rovina realisace prochází středem buňky, b) rovina realisace prochází spodní stěnou. Ve struktuře diamantu jsou atomy rozloženy ve vrcholech a středech stěn krychle; uvnitř této krychle tvoří atomy vrcholy čtyřstěnů a zároveň středy čtyřstěnu, jejichž vrcholy leží ve vrcholech a středech stěn krychle.

Na obr. 20 jsou nakresleny diagramy struktur diamantu a tuhy. U diamantu (obr. 20a) prochází rovina realisace uprostřed mezi vodorovnými vrstvami atomu, které tvoří vrcholy základen, resp. středy čtyřstěnů.

Na obr. 21 je struktura nikelinu. Plné kružnice představují arsen, čárkované kružnice a bílé body představují nikl. Z diagramu se snadno vyčtou všechny zvláštnosti rozložení atomů.

Mnoho dalších diagramů je možno nalézt ve výše uvedené práci A. N. Zavarnického.

6. Závěr

Realisací mnohostěnů nejsou vyčerpány všechny možnosti této methody. Je možno vyšetřovat realisace prostorových křivek a ploch. Za povšimnutí stojí zajímavé vlastnosti jednoparametrických a dvouparametrických soustav kružnic, které odpovídají křivkám a plochám.

S použitím této methody při řešení některých planimetrických úloh je možno se seznámit ve sbírce úloh z matematiky P. S. Moděnova[11]).

Vyšetřovaného modelu je možno též použít v röntgenografii krystalů a chemické analyse některých nerostů.

Volně přeložil J. Fábera

[11]) P. S. Moděnov, *Sbornik zadač po matěmatike*, Sov. nauka, 1952.