Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Julian Perkal

O souborech materiálních bodů a abstraktních bodů v přírodovědeckých zkoumáních

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 2 (1957), No. 5, 513--522

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/137180

POKROKY
MATEMATIKY, FYSIKY A ASTRONOMIE
ROČNÍK II • ČÍSLO 5

JULIAN PERKAL, Vratislav

O SOUBORECH MATERIÁLNÍCH BODŮ A ABSTRAKTNÍCH BODŮ V PŘÍRODOVĚDECKÝCH ZKOUMÁNÍCH[1])

Podstatou přírodovědeckého bádání je pozorování, vyvozování důsledků z pozorování, tvoření vědeckých hypothes a srovnávání jich se skutečností. Má-li být přírodní věda objektivní a shodovat se s obecně lidským způsobem usuzování, musí se opírat o objektivní zásady pozorování a vyvozování důsledků, a to zejména o matematiku a logiku. Proto také přírodní vědy spějí k upřesňování vyjadřování i method.

Prvním úkolem při zpřesňování vyjadřování je přesná definice zkoumaného předmětu. Definice plní často dva úkoly:

1. určit, kdy jde o ten a ne jiný předmět (na př. les),
2. určit soubor prvků, jež k předmětu patří (na př. prostor mezi stromy a paseky patřící k lesu).

Tuto druhou část definice nazýváme geometrickou.

Při řešení přírodovědeckých problémů se již odedávna používá statistických (zejména biometrických) method. Stále častěji se však vyskytují přírodovědecké problémy, vyžadující jiných matematických úsudků. Často se mezi těmito úsudky opakuje jeden, který spočívá v tom, že se na předměty díváme jako na body vícerozměrného prostoru (t. zv. „individuální" body).[2])
Tato geometrisace si již dnes zasluhuje názvu methody, t. zv. methody individuálních bodů.

V této práci předkládám geometrickou definici některých přírodovědeckých objektů a geometrickou methodu (methodu individuálních bodů) zpracování těchto objektů a souborů těchto objektů, na př. populací.

1. Obtíže spojené s geometrickou definicí předmětu je vidět již na uvedeném příkladu lesa, nebo na příkladě houby (mořské). Není jasné, které body patří k houbě a které nikoli. Nejprve se zdá, že k ní patří všechny body prostoru, obklopené hmotou houby, čili všechny body nejmenšího vypuklého tělesa obsahujícího celou hmotu houby. Pak nás napadne, že musíme vyloučit díry a vzduchové kanálky, nalézající se uvnitř houby. Dále lze mít pochybnosti o prostoru mezi buňkami a mezi elektrony.

Z těchto potíží vyplývají paradoxy, které souvisí s některými veličinami, charakterisujícími přírodovědecký objekt. Jsou to paradoxy objemu, obsahu a délky křivky. Prvý

[1]) Tento článek je přehledem theoretických problémů a výsledků obsažených v pracích, uvedených v seznamu literatury.

[2]) Tento doslovný překlad nevystihuje plně smysl užitého termínu. Nejde o „jednotlivé body", nýbrž o „body přiřazené individuím, jednotlivým objektům". (*Pozn. překl.*).

z nich spočívá v tom, že se objem předmětu může rychle zmenšovat, jestliže zvětšujeme přesnost pozorování. Tak se na př. zmenší objem houby, budeme-li z ní postupně vylučovat díry a vzduchové kanálky, mezibuněčné a mezielektronové prostory. Lze tvrdit, že s růstem přesnosti pozorování konverguje objem předmětu k nule. Týž charakter má paradox obsahu rovinného předmětu. Paradox povrchu empirické plochy má jiný charakter. Povrch houby považované za vypuklé těleso je celkem nevelký. Tento povrch však nezměrně roste, když vylučujeme z houby díry a vzduchové kanálky, mezibuněčné prostory atd. Zvětšujeme-li přesnost pozorování, roste povrch dokonce nade všechny meze. Týž charakter má paradox délky empirické křivky, vyznačené na předmětu, speciálně křivky v rovině. Za příklad takové křivky lze vzít mořské pobřeží, jehož délka roste, zvětšujeme-li přesnost měření, t. j. bereme-li v úvahu stále menší a menší zátoky a poloostrovy, skály vyčnívající do moře, kamení, zrnka písku atd. Na tento paradox upozornil H. Steinhaus (viz [25]) již v roce 1930.

Pokusím se vysvětlit smysl těchto paradoxů. Vzdáleností dvou množin P_1 a P_2 budeme rozumět největší vzdálenost mezi bodem jedné z nich a druhou množinou.[3]) Tuto vzdálenost označíme $\varrho(P_1, P_2)$ (obr. 1). Veličiny jako objem $V(P)$, povrch $S(P)$ nebo délka $L(P)$ jsou funkcionály, t. j. funkce, jejichž argumentem P je množina a hodnotou reálné číslo. Tyto funkcionály jsou však nespojité. Nespojitost délky $L(P)$ křivky P spočívá v tom, že ke každému libovolně malému $\varepsilon > 0$ a libovolně velkému a existují dvě křivky P_1 a P_2, vzdálené od sebe o méně než ε, t. j. takové, že $\varrho(P_1, P_2) < \varepsilon$, a lišící se v délce o více než a, t. j. takové, že současně s předcházející nerovností platí $|L(P_1) - L(P_2)| > a$.

Říkáme, že množina P_1 representuje předmět P s přesností x_1, jestliže $\varrho(P, P_1) \leq x_1$. Označíme-li P_1 množinu bodů, patřících k dané křivce P s přesností x_1, a P_2 množinu bodů, patřících k téže křivce při pozorování s přesností x_2, pak víme jenom tolik, že množiny P_1 a P_2 jsou od sebe vzdáleny ne více než o $x_1 + x_2$. Může se však stát, že délky těchto množin (křivek) $L(P_1)$ a $L(P_2)$ se budou lišit o více než libovolné předem dané číslo a. Všimněme si, že některé jiné funkcionály jsou spojité a v jejich případě nehrozí nebezpečí paradoxu. Takovými spojitými funkcionály budou na př. průměr množiny P (t. j. největší vzdálenost mezi dvěma jejími body), obsah rovinného obrazce omezeného křivkou P atp.

Dvěma cestami lze se vyhnouti těmto paradoxům. Prvá z nich spočívá v zjednodušení struktury množin. Kdybychom se na př. omezili na konvexní (vypuklé) množiny a místo libovolné množiny P uvažovali její konvexní obal C (P), pak ve třídě konvexních množin jsou takové funkcionály jako délka, povrch a objem spojité. Druhou cestou je vytvoření nových funkcionálů představujících délku, povrch a objem, funkcionálů spojitých ve třídě všech množin a ne jen na př. konvexních. Touto cestou šel H. Steinhaus ve své práci [26]. Ukazuje se, že lze jít oběma těmito cestami současně.

[3]) Této definici je třeba rozumět takto:

Vzdáleností dvou množin rozumíme největší ze vzdáleností bodu jedné z nich od druhé množiny. Přitom vzdálenost bodu x od množiny Y je $\varrho(x, Y) = \inf_{y \in Y} \varrho(x, y)$, tedy vzdálenost dvou množin X, Y je podle definice autorovy

$$\varrho(X, Y) = \sup_{\substack{x \in X \\ y \in Y}} [\varrho(x, Y), \varrho(y, X)].$$

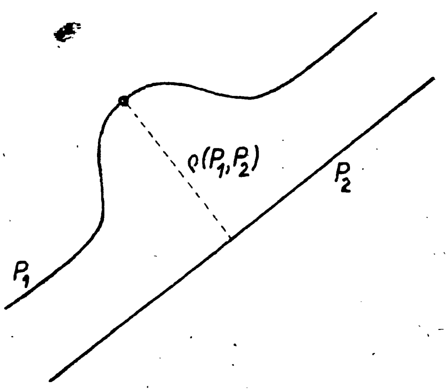
Pozn. red.

V práci [20] jsem ukázal způsob, jak zjednodušit strukturu množiny P tím, že ji obklopíme nejmenší ε-konvexní množinou. Množinu P v rovině můžeme obklopit nejmenší konvexní množinou takto: narýsujeme libovolnou přímku, která nedělí P na dvě části (ale může se P dotýkat) a vyloučíme tu polorovinu, která neobsahuje množinu P; jinak řečeno oddělíme od P vše, co lze oddělit přímkou. Zbude průnik všech polorovin obsahujících P, t. j. nejmenší konvexní množina, obsahující množinu P. Tuto nejmenší množinu označíme C (P).

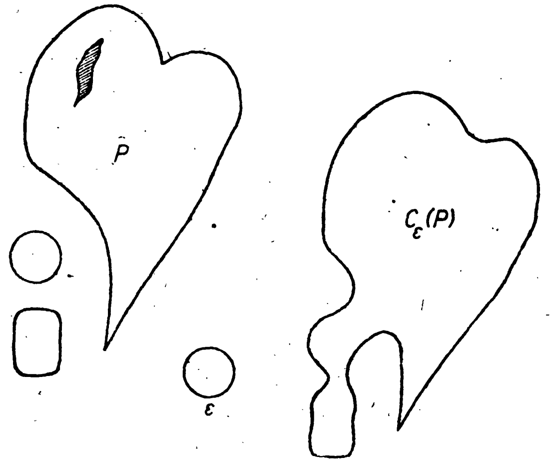
Nyní nahradíme přímku kružnicí o průměru ε. Rovinu, z níž byl odstraněn kruh o průměru ε, nazveme okolím o průměru ε. Nakreslíme tedy libovolnou kružnici o průměru ε, neobsahující vnitřních bodů množiny P (avšak kružnice se může P dotýkat) a odstraníme plochu tohoto kruhu. Jinak řečeno, oddělíme od množiny P vše, co lze oddělit kružnicí o průměru ε. Zbude průnik všech okolí o průměru ε, obsahujících množinu P. Množinu takto získanou nazývám nejmenší ε-konvexní množinou obsahující množinu P a označuji ji symbolem C_ε (P). Zde je přesná definice:

$$C_\varepsilon(P) = \mathop{E}_{p}\left[\prod_{q}\left(\varrho(q, P) \geqslant \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \varrho(p, q) \geq \frac{\varepsilon}{2}\right)\right].$$

Tato definice má smysl nejen pro množiny v rovině, ale též v tří i vícerozměrném prostoru, ba dokonce i pro množiny v libovolném metrickém prostoru. Chceme-li přejít od množin v rovině k množinám v prostoru, musíme v popisu (nikoli v definici) nahradit přímku rovinou a kruh koulí. Operace obklopení množiny P množinou C_ε (P) mění tvar množiny P méně, než obklopíme-li ji nejmenší konvexní množinou C (P). Roste-li ε do nekonečna, pak se množina C_ε (P) liší čím dále tím méně od C (P); klesá-li ε k nule, liší se C_ε (P) stále méně od P (konverguje k uzávěru $\bar{P}$ množiny P). Při rozumně



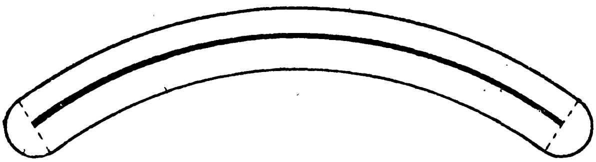
Obr. 1



Obr. 2

zvoleném ε lze použít množiny C_ε (P) ke geometrické definici přírodovědeckého objektu. Tak na př. volba $\varepsilon = 1$ cm znamená, že díry a kanálky, do nichž se vejde kulička o průměru 1 cm, musíme z předmětu vyloučit, avšak díry a kanálky, do nichž se taková kulička nevejde, k předmětu patří. Ve třídě ε-konvexních množin jsou funkcionály objemu V (P), povrchu S (P) a délky L (P) spojité.

A teď několik slov o druhé cestě, o které jsme se zmínili již dříve. Můžeme definovat nové funkcionály V_ε (P), S_ε (P), L_ε (P), t. j. objem, povrch a délku řádu ε, spojité ve třídě libovolných množin a takové, že ve třídě množin ε-konvexních se nové funkcionály shodují se starými. Budu definovat na př. délku L_ε (P), t. j. délku řádu ε rovinné křivky P (viz [15]). ε-aureolou (rovinnou) rovinné křivky P rozumím množinu bodů roviny, pokrytých kruhy o poloměru ε a středu ležícím na křivce P (obr. 3). Tato ε-aureola se skládá z pásu o šířce 2 ε, obklopujícího křivku P, a ze dvou polokruhů o poloměru ε okolo konců křivky P (viz též [14]). Jestliže od plochy ε-aureoly A_ε (P) odečtu plochu dvou polokruhů, čili dohromady plochu kruhu o poloměru ε, a dělím-li takto získanou plochu pásu obklopujícího křivku P šířkou tohoto pásu, čili 2 ε, dostanu délku křivky P.



Obr. 3

Tato definice připomíná Minkowského definici ([9]), avšak neužívá limitního přechodu $\varepsilon \to 0$. Obsahuje veličinu ε a proto délka takto definovaná je délkou řádu ε:

$$L_\varepsilon(\mathrm{P}) = \frac{A_\varepsilon(\mathrm{P}) - \pi \varepsilon^2}{2\varepsilon}.$$

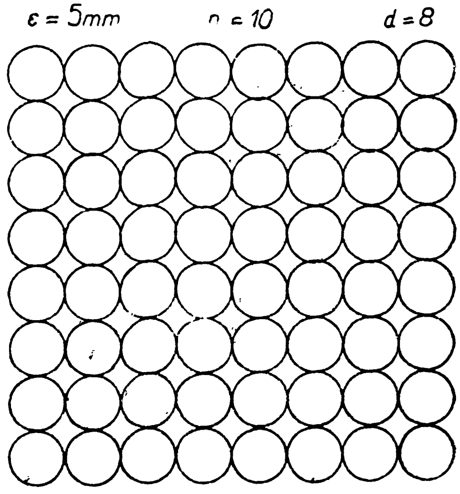
Křivku P nazýváme ε-konvexní tehdy, jestliže P $= C_\varepsilon$ (P). To je splněno, je-li P regulární křivka o poloměru křivosti všude větším nebo rovným $\frac{\varepsilon}{2}$. Lze dokázat (viz [15] a [4]), že délka řádu ε není větší než délka v klasickém smyslu: L_ε (P) $\leq L$ (P), při čemž rovnost platí tehdy, jestliže křivka P je ε-konvexní.

K měření délky řádu ε empirické křivky, nakreslené na př. na zeměpisné mapě, slouží jednoduchá pomůcka, kterou jsem nazval kruhovým délkoměrem (longimetrem) (viz [13]). Je to list průhledného papíru (nebo celofánu) se sítí kružnic o poloměru ε, jako na př. na obr. 4. Středy těchto kružnic nazývám uzly délkoměru. Délkoměrem pokryjeme měřenou křivku. Plocha ε-aureoly křivky P je úměrná střední hodnotě počtu uzlů délkoměru, které padly do této ε-aureoly křivky P. Ale uzel padne do ε-aureoly křivky P tehdy a jen tehdy, jestliže kružnice o poloměru ε se středem v tomto uzlu protne křivku P. Je tedy plocha ε-aureoly křivky P úměrná střední hodnotě počtu kružnic délkoměru, protínajících křivku P. To je princip délkoměru. K veličině ε lze najít n a d tak, že odhadem délky řádu ε křivky P je celkový počet kružnic, které protnou P, když přiložíme délkoměr n-kráte (náhodně nebo systematicky) ke křivce, zmenšený o konstantu d. Vydatnost tohoto způsobu odhadu je dosti značná.

Pojem ε-konvexní množiny a délky řádu ε se hodí zejména při řešení kartografických problémů souvisících s generalisací.

2. Přejděme nyní k methodě „individuálních bodů". Uvažujme soubor n kvantita-

tivních znaků (t. j. znaků vyjadřitelných reálnými čísly) přírodovědeckého objektu. Nechť jsou to na příklad tyto znaky zkoumaného člověka: x_1 — délka lebky, x_2 — šířka lebky, x_3 — výška tváře, x_4 — šířka tváře, x_5 — výška nosu, x_6 — šířka nosu. Velikosti těchto znaků můžeme vynášet na příslušných osách pravoúhlého systému souřadnicového šestirozměrného (a obecně n-rozměrného) prostoru. Tímto způsobem lze každému člověku, u něhož zkoumáme uvedených šest znaků, přiřadit určitý bod šestirozměrného prostoru. Obecně lze každému předmětu, u něhož zjišťujeme určitý soubor n znaků, přiřaditi bod v n-rozměrném prostoru. Tento bod nazveme „individuálním bodem“ daného předmětu vzhledem k danému souboru znaků. Libovolnému souboru předmětů, speciálně tedy populaci, nebo výběru přírodovědeckých objektů (u nichž zkoumáme daný soubor znaků), odpovídá množina individuálních bodů. Při tomto geometrickém pojetí jsou mnohé zajímavé problémy přírodovědecké spojeny s tvarem nebo strukturou množiny individuálních bodů.



Obr. 4

Tvarem množiny P individuálních bodů rozumíme zde vlastnosti množiny C_{ε_0} (P), kde ε_0 je zvoleno tak, aby množina C_{ε_0} (P) byla souvislá. Strukturou množiny P rozumím vlastnosti množin C_ε (P) pro libovolná $\varepsilon \leq \varepsilon_0$. Místo o množině individuálních bodů můžeme hovořit o proměnném náhodném individuálním bodu. Takový náhodný individuální bod bude definován, budeme-li znát jeho rozložení, čili na příklad n-1 rozměrné nadplochy mající tu vlastnost, že hustota pravděpodobnosti toho, že náhodný bod se nachází v libovolném bodě této nadplochy, je konstantní. Tuto nadplochu budu krátce nazývat vrstevnicí rozložení.[4]) Tvarem náhodného bodu budu rozumět vlastnosti oblasti, obsažené uvnitř dostatečně velké vrstevnice rozložení náhodného bodu, na př. takové vrstevnice, aby pravděpodobnost toho, že náhodný bod bude ležet uvnitř vytčené oblasti, byla 99 %.[5]) Strukturou náhodného bodu rozumím vlastnosti oblastí, obsažených uvnitř libovolných menších vrstevnic rozložení tohoto náhodného bodu.

Kdyby náhodný bod měl normální rozložení, byl by jeho tvar charakterisován jistým n-rozměrným elipsoidem. Množina individuálních bodů, realisujících náhodný bod s normálním rozložením, nebo rozložením více či méně se lišícím od normálního, má zhruba řečeno tvar více či méně se lišící od elipsoidu. Známe-li průměry a jiné momenty výchozích znaků, můžeme určit vlastní čísla a vlastní vektory matice momentů druhého řádu. Elipsoid mající za poloosy tyto vlastní vektory, bude právě jednou z vrstevnic rozložení, je-li toto rozložení normální. Osy tohoto elipsoidu tvoří pak souřadnicový

[4]) V obecném případě nemusí ovšem tyto vrstevnice vůbec existovat, případně existují-li, nemusí ještě tvořit souvislé plochy „rozumného“ tvaru. (*Pozn. překl.*).

[5]) Viz pozn. [4]). V obecném případě nemusí mít smysl mluvit o vnitřku. Autoru jde zřejmě především o případ normálního rozložení a rozložení podobného „tvaru“. (*Pozn. překl.*).

systém nezávislý; není-li rozložení souboru individuálních bodů normální, pak tyto osy tvoří systém souřadnicový nekorelovaný.

Jestliže některé z vlastních čísel matice momentů druhého řádu je zanedbatelně malé[6]), pak totéž platí o příslušné poloose elipsoidu. Můžeme z toho usuzovat, že dimense množiny individuálních bodů je menší než n, a tudíž můžeme vypustit ze svých úvah některé (alespoň jeden) ze zkoumaných znaků, aniž bychom ztráceli podstatné množství informací (viz [17]). Zkoumání tvaru je vhodné pro dělení souboru individuálních bodů na části, při čemž můžeme žádat, aby tyto části splňovaly různé podmínky. Soubor individuálních bodů, representující soubor lidí v závislosti na příslušných anthropometrických znacích či krejčovských mírách, lze rozdělit na části tak, aby nepřekračovaly ustálené tolerance a aby jistý, předem zvolený jejich počet (určený na př. počtem velikostí krejčovských panen) obsahoval co možná největší část souboru individuálních bodů (viz [11]).

Zavedení nového systému nekorelovaných souřadnic dovoluje zachytit nové znaky, jež jsou lineárními kombinacemi znaků výchozích. Často se stává, že takovéto nové znaky mají zajímavou přírodovědeckou interpretaci. Tak na př. je možno nalézt nekorelované souřadnice pro dva výchozí znaky: výšku a váhu dětí. Jednu z těchto nekorelovaných souřadnic lze interpretovat jako všeobecný vývin dítěte, druhou jako anomalii, t. j. souřadnici, charakterisující v jistém smyslu poměr výšky k váze (viz [12]). Výsledky, jichž bylo touto methodou dosaženo, jsou zajímavé a naše methoda nalezla ohlas i na druhé polokouli (viz [24]), ačkoli se v téže době objevilo několik jiných nových method zkoumání vývinu dětí. Použijeme-li touž methodu na tloušťku a výšku stromů, dostaneme dva nekorelované znaky, z nichž jeden jsme nazvali bonitací a druhý štíhlostí. Ukázalo se, že nové znaky dávají to, co lesníci potřebují, na př. nová bonitace je silněji skorelovaná s objemem (hmotností), než klasická bonitace, vyčítaná z bonitačních tabulek.

Jiným problémem, spojeným s tvarem množiny individuálních bodů, je problém přírodovědecké podobnosti. Dva předměty nazveme geometricky podobnými (vzhledem k uvažovanému souboru znaků), jestliže jejich individuální body leží na jedné přímce trsu, určeného počátkem soustavy souřadnic. Taková podobnost zřejmě nezávisí na populaci, t. j. na souboru individuálních bodů, k němuž uvažované dva body patří. Je možno zavést jiné podobnosti, negeometrické, závisící na souboru individuálních bodů. Můžeme tedy považovat dva předměty za podobné, jestliže jejich individuální body leží na jedné přímce trsu, určeného jiným bodem než počátkem souřadnicové soustavy. Může to být na př. střed souboru individuálních bodů, nebo nevlastní bod, určený nejdelším vlastním vektorem matice momentů druhého řádu (je to t. zv. osa množiny individuálních bodů), nebo nevlastní bod určený vektorem o složkách rovných směrodatným odchylkám jednotlivých znaků. Zvláště tato poslední podobnost (viz [18]) odpovídá intuicím přírodovědců (viz na př. [2]). Dva předměty si jsou v tomto smyslu podobné (používám zde termínu přírodovědecké podobnosti), jestliže rozdíly hodnot jednotlivých znaků těchto dvou předmětů jsou úměrné směrodatným odchylkám těchto znaků v populaci.

Ukazateli nazýváme čísla charakterisující třídy navzájem podobných předmětů. Geometričtí ukazatelé mají charakterisovat třídy geometricky podobných předmětů. Těmito třídami jsou přímky trsu, určeného počátkem souřadnic. Nejjednoduššími geometrickými ukazateli budou tedy poměry (podíly) jednotlivých znaků. Třídami předmětů přírodovědecky si podobných budou přímky rovnoběžné s vektorem zobecněné

[6]) Je zřejmě míněno „malé relativně vzhledem k ostatním". (*Pozn. překl.*).

disperse (jehož složkami ve směru jednotlivých os jsou směrodatné odchylky příslušných znaků). Jednoduché přírodovědecké ukazatele lze určiti takto. Matici n znaků X k předmětů (tedy matici s n sloupci a k řádky) normujeme po sloupcích na průměr 0 a rozptyl 1 a pak normujeme po řádcích na průměr 0. Takto získaná čísla se středními hodnotami nulovými a známými rozptyly jsou hledanými přírodovědeckými ukazateli (viz [18]). Těchto ukazatelů se dá vhodně použít při morfologické analyse (viz [8] a [10]), pro diskriminační zkoumání (pohlavního dimorfismu, viz [23]), jakož i v taxonomii (viz [3]).

Zkoumání struktury množiny individuálních bodů se používá především v taxonomických otázkách. Podstatné je při tom seskupování, oddělování typů, dělení populace na části a pořádání předmětů v dané populaci. V geometrickém rouše odpovídají tyto úkoly těmto problémům: spojování blízkých bodů ve skupiny, vyhledávání bodů nebo oblastí charakteristických pro soubor, dělení souboru na části a spojování bodů čarou uspořádání.

Methoda individuálních bodů dovolila zanalysovat různá pojetí typů (na př. lidských), užívaných v anthropologii. Nejstarším z nich je konvencionální typ. Anthropologové — morfologové určili nejprve konvencionálně a později více či méně tradičně jednotlivé lidské typy, na př. nordickým typem nazvali člověka s lebkou o rozměrech v určitém poměru (někdy šlo o rozměry celého těla) a s určitou pigmentací. Konvencionální typ tedy odpovídá v prostoru individuálních bodů zvláště vytčenému bodu (který nemusí odpovídat individuálnímu bodu žádného z měřených lidí). Jestliže v n-rozměrném prostoru (uvažujeme-li n znaků) vytkneme $n + 1$ konvencionálních typů a jestliže soustava příslušných bodů tvoří vrcholy nedegenerovaného simplexu, pak každý individuální bod v témž prostoru lze určit jako lineární kombinaci typů, (na př. pomocí barycentrických souřadnic), takže každého člověka lze považovat za míšence jednotlivých typů v určitém poměru (viz [28]). Jestliže celá množina individuálních bodů leží uvnitř simplexu s vrcholy v typech, má každý individuální bod kladné koeficienty u všech typů, neboli každý je míšencem ze všech typů. Leží-li některé individuální body mimo simplex, budou některé koeficienty záporné, což nemá přírodovědecké interpretace. Body ležící na stěnách simplexu odpovídají míšencům jen některých typů. Ve zvláštním případě, kdy bod leží ve vrcholu simplexu, bude mít všechny koeficienty nulové až na jeden, který bude roven jedné. Příslušný člověk bude representantem čistého typu (viz [29]). Byly činěny pokusy určit matematicky typy — body pro daný soubor individuálních bodů pomocí t. zv. zákonů Czekanowského (nikoli na základě struktury množiny). Tyto pokusy se nezdařily, což bylo lze předvídat bez výpočtů pomocí matematické analysy (viz [16]).

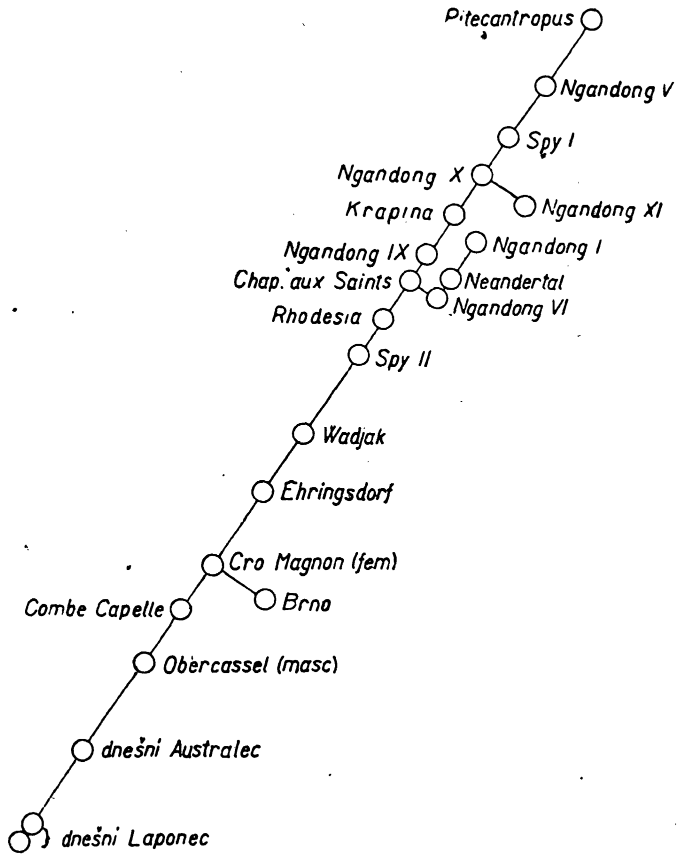
Jiné pojetí typu dává genetická koncepce. Podle tohoto pojetí nazýváme typy takové soustavy znaků, které se dědí. To znamená, že jsou-li otec i matka téhož typu, na př. nordického, pak také jejich děti jsou téhož typu, tedy nordického. Naproti tomu jiné soustavy znaků mohou nebýt dědičné. Jsou-li na př. otec i matka dinarské rasy (míšenci nordického a arménského typu) a mají-li při tom i stejné tělesné proporce i stejnou pigmentaci, může se stát, že děti se budou úplně lišit od svých rodičů a jedno bude na př. nordického a druhé arménského typu. Tento zjev nazýváme štěpením míšenců. Dědění vlastností probíhá zřejmě ještě odlišněji, jsou-li rodiče různého typu. Podle této theorie jsou v prostoru individuálních bodů určité zvláštní dědičné oblasti, t. j. takové, že patří-li individuální body rodičů do jedné takové oblasti, pak individuální body dětí budou patřit do téže oblasti. Takovéto dědičné oblasti nazveme typovými. Vedle těchto dědičných oblastí jsou ještě jiné, nedědičné. I když individuální body rodičů budou ležet v téže nedědičné oblasti, mohou individuální body dětí ležet jinde. To budou oblasti míšenců. Celý prostor je zřejmě dědičnou oblastí, což má svou přírodovědeckou interpretaci.

Typickou methodou zkoumání struktury množiny individuálních bodů je krychlová topologická methoda Wankeova (viz [27]). Její podstatou je toto: každou souřadnicovou osu rozdělíme na intervaly, buď stejné délky, nebo obsahující stejný počet individuálních bodů (vykazujících hodnotu příslušného znaku, který leží v onom intervalu). Tímto rozdělením jednotlivých os je určeno rozdělení celého prostoru na n-rozměrné krychle. Budou to buď krychle se stejným objemem, anebo krychle, v nichž by bylo možno očekávat stejný počet individuálních bodů, kdyby znaky určující osy byly nezávislé. Krychli, jež obsahuje více individuálních bodů než každá ze sousedních krychlí, nazveme krychlí zhuštění (v případě stejných krychlí to budou krychle s největší hustotou). Krychli, jež obsahuje více individuálních bodů, než by bylo lze očekávat za předpokladu nezávislosti znaků, nazýváme místem nadbytku. Místa, v nichž je zhuštění nebo nadbytek, lze považovat za typická.

Uspořádáním přírodovědeckých objektů rozumí se obvykle lineární uspořádání, t. j. takové, které staví předměty do řady, čili dovoluje jejich očíslování přirozenými čísly. Z uspořádání předmětů vyplývá i uspořádání individuálních bodů, které pak můžeme v daném pořadí spojit lomenou, nerozvětvující se čarou. Proto takové uspořádání nazýváme lineárním. Lineární uspořádání se shoduje vždycky s přírodovědeckými intencemi. Tak je na př. nemožné uspořádat podle příbuzenství rodinu skládající se z otce a dvou synů, z nichž každý má opět dva syny. V mnoha případech je snaha o lineární uspořádání nepřirozená a umělá, zato přirozené je poněkud obecnější uspořádání dendritové. Individuální body jsou při tomto uspořádání spojeny dendritem, t. j. křivkou, jež se může rozvětvovat, ale neobsahuje zavřených částí. Libovolné dva body dendritu lze spojit právě jedním obloukem patřícím k dendritu. Příkladem dendritového uspořádání je rodokmen. Pomocí vratislavské taxonomie (viz [5], [6] a [21]) lze libovolnou množinu individuálních bodů, pokud není příliš početná, uspořádat dendritem, a to nejlepším způsobem, totiž tak, aby dendrit spojující tyto body (v n-rozměrném prostoru) byl co nejkratší. Z obecné věty o dendritech vyplývá, že ho lze nakreslit v rovině tak, aby strany dendritu měly touž délku jako v n-rozměrném prostoru. Vzdálenosti mezi body dendritu spojenými nikoliv úsečkou, nýbrž lomenou čarou, se obecně změní (viz obr. 5). Podobnými problémy se před námi zabýval československý matematik O. Borůvka (viz [1]).

Množinu P nazýváme ε-souvislou (viz [7]), jestliže každé dva její body p' a p'' lze spojit řetězcem bodů $p' = p_0, p_1, \ldots, p_k = p''$, ($k$ je libovolné přirozené) patřících do P a splňujících podmínku $\varrho(p_{i-1}, p_i) \leq \varepsilon$ pro $i = 1, 2, \ldots, k$. Odstraníme-li z dendritu všechny strany délky větší než ε, dostaneme určitý počet isolovaných bodů a určitý počet skupin. Budou to ε-souvislé komponenty. Při vhodné volbě ε je můžeme považovat v jistém smyslu za typy. Trochu odlišné ε-souvislé komponenty lze získat pomocí nejmenších ε-konvexních množin. Typy takto definované by musely být n-rozměrnými oblastmi, zatím co typy definované methodou dendritů mohou být menší dimense a dokonce i jednorozměrnými řetězci.

Problematika, jíž se týká tento článek, není ještě zdaleka vyčerpána, ba právě naopak. Zdá se, že práce na těchto thematech se teprve začínají rozvíjet. Máme rozpracovaný článek o měření povrchu trojrozměrného předmětu, na př. povrchu mozku. Na řešení čekají planimetrické problémy rovinných předmětů (s mezerami) a problémy měření objemu. Problémy spojené s generalisací přírodovědeckých objektů si vyžadují, aby jim byla věnována soustředěná pozornost. Methoda ε-konvexních množin, které jsem použil při kartografické generalisaci, se tu může projevit jako velmi užitečná.



Obr. 5

V oekologii se populací rozumí něco více, než je populace statistická. Prvky eokologické populace jsou jistým způsobem uspořádány nebo alespoň seskupeny. Doufám, že se mi podaří zachytit některé vlastnosti oekologických populací methodou individuálních bodů. Pracujeme na methodách zkoumání individuálního vývoje člověka pomocí nových ukazatelů. Rovněž vratislavská taxonomie čeká na řádné prozkoumání a zdokonalení. Naskýtají se četné možnosti použití již vypracovaných method v nových a nových oblastech vědy i hospodářství.

Tyto methody dovolují ukázat známé jevy s nového hlediska, což dává velmi zajímavé a často neočekávané výsledky. Právě proto se tyto methody, přizpůsobené jednotlivým případům, hodí pro spolupráci matematiků s pracovníky v jiných vědách, spolupráci, která nepochybně povede k mnohým zajímavým a užitečným výsledkům jak theoretickým, tak i praktickým.

Psáno pro „Pokroky matematiky, fysiky a astronomie". Z polského rukopisu přeložil F. Zítek, Mat. úst. ČSAV

Literatura

[1] O. Borůvka,

[2] J. Czekanowski, *Metoda podobienstwa w zastosowaniu do badań psychometrycznych.* Badania psychologiczne. Pol. Tow. Filos. Lwów 1926.

[3] J. Debowy, *Wyznaczanie typów metod Wankego przy użyciu nowych wskaźników antropologicznych.* Przegląd Antropologiczny XXII, Wroclaw 1956, s. 236—252.

[4] H. Fast, *O epsylon aureolach* (připravuje se).

[5] K. Florek, J. Lukaszewicz, J. Perkal, H. Steinhaus i S. Zubrzycki, Sur la liaison et la division des points d'un ensemble fini. Colloquium Mathematicum II, Wroclaw 1951, s. 282—285.

[6] K. Florek, J. Lukaszewicz, J. Perkal, H. Steinhaus i S. Zubrzycki, *Taksonomia Wroclawska.* Przegl. Antropologiczny XVII, Poznań 1951, s. 193—211.

[7] F. Hausdorf, *Grundzüge der Mengenlehre,* Lipsko 1914, s. 298—300.

[8] H. Milicerowa, *Zastosowanie wskaźników Perkala do charakterystyki budowy ciala bokserów.* Materialy i prace antropologiczne Nr. 20, Wroclaw 1956.

[9] H. Minkowski, *Gesammelte Abhandlungen,* Lipsko-Berlín, 1911, sv. II, s. 122—127.

[10] J. Perkal, *Analiza morfologiczna pewnej grupy ekwidów.* Zoölogica Poloniae, Wroclaw (v tisku).

[11] J. Perkal, *Metoda wyznaczania fantomów odzieżowych na podstawie pomiarów antropometrycznych* (v rukopise).

[12] J. Perkal, *Nowe metody badania zależności miedzy wzrostem, waga a wiekiem mlodzieży* (spolu s T. K. Nowakowskim), Przegl. Antropol. XVIII, Poznań 1952, s. 12—33.

[13] J. Perkal, *O dlugości krzywych empirycznych.* Zastosowania Matematyki (v tisku).

[14] J. Perkal, *O epsylon aureolach.* Prace Matematyczne (v tisku).

[15] J. Perkal, *On the epsilon Lenght.* Bull. de l'Ac. Pol. des Sc., cl. III, vol. IV, Warszawa 1956, s. 399—403.

[16] J. Perkal, *O pewnych ideach Czekanowskiego i metodzie Wankego.* Przegl. Antropol. XXI, Wroclaw 1955, s. 378—395.

[17] J. Perkal, *O pewnych korelacjach obszarowych.* Čas. pro pěst. mat. a fys. LXXV, Praha 1949, s. 293—300.

[18] J. Perkal, *O wskaźnikach antropologicznych.* Przegl. Antropol. XIX, Poznań 1953, s. 209—221.

[19] J. Perkal, *Próba obiektywnej generalizacji.* Przegl. Geograficzny (v redakci).

[20] J. Perkal, *Sur les ensembles epsilon convexes.* Colloquium Mathematicum IV, Wroclaw 1956, s. 1—10.

[21] J. Perkal, *Taksonomia Wroclawska.* Przegl. Antropol. XIX, Poznań 1953, s. 82—96.

[22] J. Perkal, *Próba oceny rozwoju drzewostanów* (spolu s J. Battkiem). Sylwan XCIX, Warszawa 1955, s. 12—31.

[23] J. Soltysiak, *Wektor dynomorfizmu plciowego na tle nowych wskaźników.* Przegl. Antropol. XXII, Wroclaw 1956, s. 253—266.

[24] J. N. Spuhler, *The Method of Nowakowski and Perkal for Determining the Relationship between Stature, Weight and Age.* Yearbook of Physical Antropology, vol. 8, New York 1952, s. 196—198.

[25] H. Steinhaus, *Zur Praxis der Rektifikation und zum Längenbegriff,* Berichte der Sächsischen Akademie der Wissenschaften, v. 82, 1930, s. 120—130.

[26] H. Steinhaus, *Lenght, Shape and Area.* Colloquium Mathematicum III, Wroclaw 1955, s. 1—13.

[27] A. Wanke, *Metoda badań czestości wystepowania zespolów cech.* Przegl. Antropol. XIX, Poznań 1953, s. 106—147.

[28] A. Wanke, *Zagadnienie typów somatycznych.* Przegl. Antropol. XX, Wroclaw-Poznań 1954, s. 64—104.

[29] M. Warnus,