Milan Pišl

Křivky v Gaussově rovině

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 2 (1957), No. 1, 4--13

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/137163

M. PIŠL

KŘIVKY V GAUSSOVĚ ROVINĚ

(Katedra matematiky elektrotechnické fakulty ČVUT, Praha)

V poslední době nabývá stále většího významu theorie funkcí komplexní proměnné v technických aplikacích. Tak na příklad některé praktické problémy v elektrotechnice přímo vyžadují grafických řešení, prováděných v rovině komplexních čísel, jež jsou přehledná, názorná a často i podstatně jednodušší než numerický výpočet. V elektrotechnické literatuře se přitom zpravidla používá parametrického vyjádření rovnic zobrazovaných křivek. Vzniká tak nutnost vypracovat nový aparát, jiný, než je obvyklá analytická geometrie. Předložená práce je pokusem o vypracování takového aparátu, který by byl pokud možno jednoduchý a přitom vhodný pro řešení praktických otázek, na příklad otázek souvisících s lineárními elektrickými obvody s proměnnými parametry, s konstrukcí frekvenčních charakteristik, s konstrukcí kruhových diagramů v theorii elektrických strojů, se studiem praktických otázek konformního zobrazení a j. Aparátu lze výhodně použít i ke studiu čistě geometrických otázek.

Snažili jsme se důsledně vyhnout se přechodu ke složkám komplexních čísel na rozdíl od dosavadních method, které i při použití symbolického komplexního zápisu přecházejí ke složkám, jakmile jde o numerický výpočet. Ukazuje se, že vhodná volba souřadnicového systému umožňuje i u nelineárních útvarů, které činí největší potíže při parametrickém vyjadřování rovnic čar, splnit vyslovené požadavky.

U lineárních útvarů stačí v podstatě formální zápis v komplexní symbolice. Proto také budeme zejména zde užívat užité vektorové terminologie. Zároveň zde i v dalším budeme přenášet bez důkazu některá tvrzení, která platí v oboru reálných čísel a opírají se o fakt, že obor reálných čísel tvoří těleso, na obor čísel komplexních, která, jak známo, také tvoří těleso. Důkazy platnosti těchto, ostatně nepříliš četných, tvrzení padají zcela mimo rámec tohoto článku. V článku dále předpokládáme a bez důkazu uvádíme základní vlastnosti komplexních čísel a některých vět theorie funkcí komplexní proměnné.

Pro snazší seznámení s methodou nebudeme v první části práce postupovat axiomaticky, ale budeme vycházet z názoru a ze známých vlastností komplexních čísel. V druhé části, před obecnou theorií kuželoseček, bude zvolený souřadnicový systém poněkud podrobněji vyložen a tam také přejdeme k axiomatickému způsobu výkladu. V některém dalším článku se vrátíme k této methodě, k rozboru křivek vyšších stupňů a k otázkám jejího použití zejména v elektrotechnice. *M. P.*

1. ÚVOD

1.1 Komplexní čísla

Předpokládáme, že čtenář je seznámen se základními vlastnostmi komplexních čísel a proto jen stručně uvedeme nejdůležitější z nich.

Každé komplexní číslo $z \neq 0$ lze psát ve tvaru

$$z = x + \mathrm{j}y = \varrho\,(\cos\varphi + \mathrm{j}\sin\varphi) = |z|\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi};$$

$$z = 0 \iff x = 0, y = 0.$$

Číslo komplexně sdružené k číslu z značíme $\bar{z}$, při čemž platí

$$\bar{z} = x - \mathrm{j}y = \varrho\,(\cos\varphi - \mathrm{j}\sin\varphi) = |z|\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi}$$

$$z \cdot \bar{z} = 0 \iff z = \bar{z} = 0 \iff \operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z = 0.$$

Je zřejmé, že

$$z + \bar{z} = 2\operatorname{Re} z = 2x, \quad z - \bar{z} = 2\mathrm{j}\operatorname{Im} z = 2\mathrm{j}y.$$

Tvrzení $z = \bar{z}$ platí právě tehdy, je-li $z = k$ a $z = -\bar{z}$ právě tehdy, je-li $z = k\mathrm{j}$, kde k je libovolné reálné číslo.

Pro čísla komplexně sdružená platí[1])

$$|z| = |\bar{z}| = \sqrt{z\bar{z}},$$

$$\arg \bar{z} = -\arg z \quad \text{pro} \quad -\pi < \arg z < \pi,$$

$$\arg \bar{z} = \arg z \quad \text{pro} \quad \arg z = \pi,$$

a dále

$$\overline{z_2 \pm z_1} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2, \quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} \quad (z_2 \neq 0),$$

$$\overline{(z_2 \cdot z_1)} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2, \quad \overline{(\bar{z})} = z.$$

O součinu a podílu komplexních čísel je známo, že

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \, e^{j\varphi_1} \cdot |z_2| \, e^{j\varphi_2} = |z_1| \, |z_2| \, e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)},$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1| \, e^{j\varphi_1}}{|z_2| \, e^{j\varphi_2}} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \, e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)} \quad (z_2 \neq 0),$$

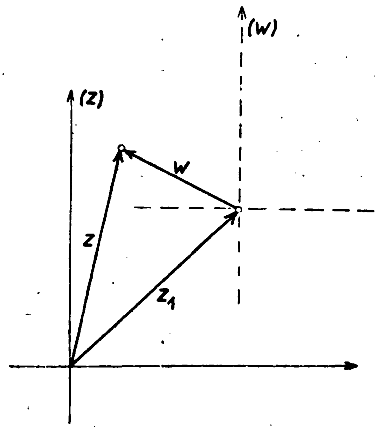
$$\frac{z}{\bar{z}} = \frac{|z| \, e^{j\varphi}}{|\bar{z}| \, e^{-j\varphi}} = e^{2j\varphi} \quad (z \neq 0).$$

1.2 Geometrická interpretace komplexních čísel

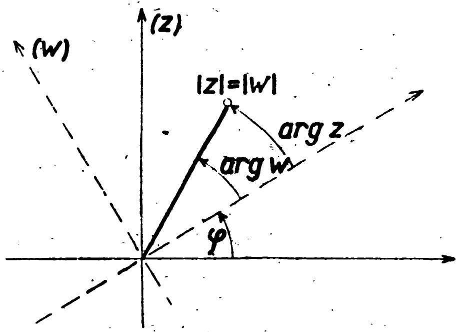
Je známo, že každému komplexnímu číslu $z = x + jy$ lze vzájemně jednoznačně přiřadit body roviny. Bod je pak určen uspořádanou dvojicí reálných čísel x a y, která nazýváme jeho kartézskými souřadnicemi. Protože každý bod roviny tvoří s počátkem souřadnicového systému uspořádanou dvojici bodů, mluvíme také o vektoru, který je přiřazen této dvojici. V našich úvahách budeme v tomto smyslu mluvit o bodu z. Podrobněji se k souřadnicovému systému, ve kterém pracujeme, vrátíme v odst. 5.

Pro transformaci posunutím resp. otočením pak platí:

a) posunutí (*obr. 1*)	b) otočení (*obr. 2*)
$z = w + z_1,$	$z = w \cdot e^{j\varphi},$
$w = z - z_1,$	$w = z \cdot e^{-j\varphi},$



Obr. 1



Obr. 2

[1]) Zde i v dalším symbolem arg z rozumíme hlavní hodnotu funkce *Arg* z, t. j. $-\pi < \arg z \leqq \pi$.

kde z je bod v soustavě původní, w bod v soustavě transformované, z_1 nový počátek a úhel φ je úhel otočení.

1.3 Úhel dvou směrů

Pro úhel φ dvou směrů φ_1 a φ_2, určených argumenty komplexních čísel $z_1 \neq 0$ a $z_2 \neq 0$ (v tomto pořadí) platí

$$\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 .$$

Je pak

$$e^{j\varphi_1} = \frac{z_1}{|z_1|} \quad \text{a} \quad e^{j\varphi_2} = \frac{z_2}{|z_2|},$$

a tedy

$$e^{j\varphi} = e^{j(\varphi_2 - \varphi_1)} = \frac{z_2 \cdot |z_1|}{z_1 \cdot |z_2|}.$$

Odtud plyne

$$e^{j\varphi} = \cos\varphi + j\sin\varphi = \frac{z_2}{z_1} \cdot \frac{|z_1|}{|z_2|},$$

$$e^{-j\varphi} = \cos\varphi - j\sin\varphi = \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_1} \cdot \frac{|z_1|}{|z_2|}.$$

Sečtením a odečtením dostáváme

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}\,\frac{\bar{z}_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot \bar{z}_2}{|z_1| \cdot |z_2|}, \tag{1}$$

$$\sin\varphi = \frac{1}{2j}\,\frac{\bar{z}_1 \cdot z_2 - z_1 \cdot \bar{z}_2}{|z_1| \cdot |z_2|}. \tag{2}$$

Ze vzorce (1) resp. (2) plynou nutné a postačující podmínky pro kolmost resp. kolineárnost dvou směrů, určených argumenty komplexních čísel $z_1 \neq 0$, $z_2 \neq 0$

$$\bar{z}_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot \bar{z}_2 = 0 \Longleftrightarrow z_1 = k\,j\,z_2 \tag{1,1}$$

resp.

$$\bar{z}_1 \cdot z_2 - z_1 \cdot \bar{z}_2 = 0 \Longleftrightarrow z_1 = k z_2. \tag{2,1}$$

2. PŘÍMKA

2.1 Rovnice přímky procházející bodem z_1 rovnoběžně se směrem určeným argumentem komplexního čísla $\alpha \neq 0$

Zřejmě právě jen pro body z, ležící na přímce (*obr. 3*), je směr určený argumentem komplexního čísla $z - z_1$ kolineární se směrem, určeným argumentem komplexního čísla α. Avšak potom podle (2,1) platí

$$z - z_1 = k\,\alpha,$$

a tedy také

$$\bar{z} - \bar{z}_1 = k\,\bar{\alpha}.$$

Po eliminaci reálné konstanty k z obou rovnic dostáváme

$$\bar{\alpha}\,(z - z_1) - \alpha\,(\bar{z} - \bar{z}_1) = 0 . \tag{3}$$

Všechny body, které splňují vztah (3), leží na přímce (v obraze na přímce a) a naopak, jak plyne ze vztahu (2,1). Budeme proto rovnici (3) nazývat rovnicí přímky, určené bodem a směrem.

Pro $z_1 = 0$ dostáváme rovnici přímky jdoucí počátkem ve tvaru

$$\bar{\alpha} z - \alpha \bar{z} = 0. \tag{3,1}$$

Pro $\alpha = \bar{\alpha}$ resp. $\alpha = -\bar{\alpha}$ je rovnice

$$z - \bar{z} = 0 \tag{3,2}$$

rovnicí reálné osy x, a rovnice

$$z + \bar{z} = 0 \tag{3,3}$$

rovnicí imaginární osy y.

2.2 Rovnice přímky určené dvěma různými body

Přímka a nechť je dána body z_1 a z_2 ($z_1 \neq z_2$) (*obr. 4*). Argument komplexního čísla $z_2 - z_1$ určuje její směr. Pro body přímky a pak podle odst. 2.1 platí

$$z - z_1 = k\,(z_2 - z_1)\,,$$

$$\bar{z} - \bar{z}_1 = k\,(\bar{z}_2 - \bar{z}_1)\,.$$

Po vyloučení reálné konstanty k dostáváme

$$z - z_1 = \frac{z_2 - z_1}{\bar{z}_2 - \bar{z}_1}\,(\bar{z} - \bar{z}_1), \tag{4}$$

nebo v jiné úpravě

$$\begin{vmatrix} z, & \bar{z}, & 1 \\ z_1, & \bar{z}_1, & 1 \\ z_2, & \bar{z}_2, & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{4,1}$$

Poznámka: Je-li z bodem přímky určené dvěma body z_1 a z_2, pak také platí

$$z - z_1 = \lambda\,(z - z_2),$$

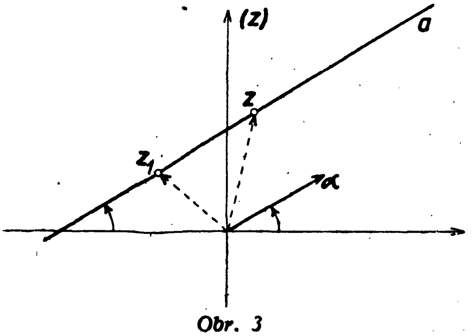
odkud

$$z = \frac{z_1 - \lambda z_2}{1 - \lambda}, \tag{4,2}$$

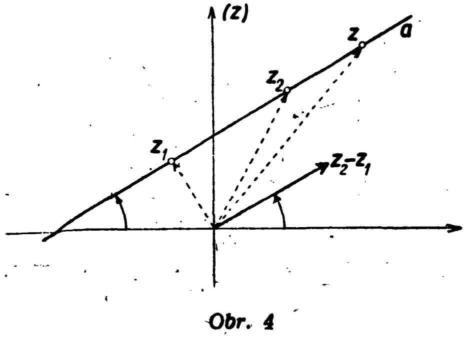
kde reálná konstanta $\lambda \neq 1$ je t. zv. dělicí poměr libovolného bodu přímky a vzhledem k bodům z_1 a z_2 jako základním (*obr. 5*).

2.3 Přímka určená bodem a normálou

Přímka a nechť je dána bodem z_1, a normálou (*obr. 6*) jejíž směr je určen argumentem komplexního čísla $\beta \neq 0$. Směry určené argumenty komplexních čísel $z - z_1$ a β jsou



Obr. 3



Obr. 4

kolmé právě tehdy, je-li z bodem přímky a naopak podle vztahu (1,1). Rovnice přímky a tedy zní

$$\bar{\beta}(z - z_1) + \beta(\bar{z} - \bar{z}_1) = 0. \tag{5}$$

2.4 Obecná rovnice přímky

Rovnice (3), (4) a (5) lze vždy převést na tvar

$$\bar{\beta} z + \beta \bar{z} + C = 0, \tag{6}$$

(kde β je komplexní a C reálné číslo), který budeme nazývat obecnou rovnicí přímky. Zbývá ukázat, že geometrické místo bodů, splňujících rovnici (6), je přímka.

Bod $z_1 = -\dfrac{C\beta}{2\beta\bar{\beta}} = -\dfrac{C}{2\bar{\beta}}$ splňuje rovnici (6). Stanovíme-li rovnici přímky, určené bodem z_1 a normálou β, dostaneme rovnici (6).

Bod z_1 je patou kolmice spuštěné z počátku na přímku. Komplexní číslo β určuje směr normály přímky (6). Geometrický význam konstanty C vyplyne z vyšetřování vzdálenosti bodu od přímky.

2.5 Vzdálenost bodu od přímky

Je dán bod z_1 a přímka a o rovnici $\bar{\beta}z + \beta\bar{z} + C = 0$ (*obr. 7*). Pak vzdálenost d bodu z_1 od přímky a je

$$d = |z_0 - z_1|,$$

kde z_0 je pata kolmice spuštěné z bodu z_1 na přímku a. Směry určené argumenty komplexních čísel $z_0 - z_1$ a β jsou kolineární, platí tedy podle (2,1)

$$z_0 - z_1 = k\beta,$$

takže můžeme psát

$$d = |k\beta|.$$

Reálnou konstantu k stanovíme z podmínky, že z_0 je bodem přímky a. Je tedy

$$\bar{\beta} z_0 + \beta \bar{z}_0 + C = \bar{\beta}(k\beta + z_1) + \beta(k\bar{\beta} + \bar{z}_1) + C = 2k\beta\bar{\beta} + \bar{\beta} z_1 + \beta\bar{z}_1 + C = 0,$$

odkud

$$k = -\frac{1}{2}\,\frac{\bar{\beta} z_1 + \beta \bar{z}_1 + C}{\beta\bar{\beta}}.$$

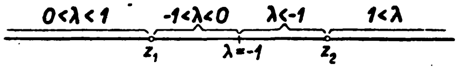
Pro vzdálenost d dostáváme

$$d = \frac{|\bar{\beta} z_1 + \beta \bar{z}_1 + C|}{2|\beta|}. \tag{7}$$

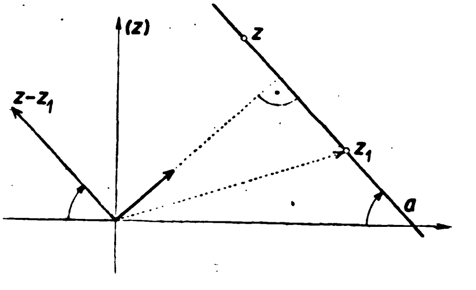
Je-li $z_1 = 0$, dostáváme pro vzdálenost přímky od počátku vzorec

$$d_0 = \frac{|C|}{2|\beta|}, \tag{7,1}$$

odkud pro $|\beta| = 1$ vyplývá geometrický význam konstanty C.



Obr. 5



Obr. 6

2.6 Body osově souměrné podle dané přímky

Je dán bod z_1 a přímka a o rovnici $\bar{\beta} z + \beta \bar{z} + C = 0$ (*obr. 8*). Stanovit bod z_2 osově souměrný k bodu z_1 podle přímky a. Bude platit

$$z_2 - z_0 = z_0 - z_1 = k\beta,$$

kde z_0 je pata kolmice spuštěné z bodu z_1 na přímku a. Odtud plyne

$$z_2 = z_1 + 2k\beta.$$

Uvážíme-li, že z_0 je bodem přímky a, že tedy platí

$$\bar{\beta} z_0 + \beta \bar{z}_0 + C = \bar{\beta}(z_1 + k\beta) + \beta(\bar{z}_1 + k\bar{\beta}) + C = 2k\beta\bar{\beta} + \bar{\beta} z_1 + \beta \bar{z}_1 + C = 0,$$

dostáváme odtud pro zatím neurčenou konstantu k vztah

$$k = -\frac{1}{2}\,\frac{\bar{\beta} z_1 + \beta \bar{z}_1 + C}{\beta\bar{\beta}},$$

takže můžeme psát

$$z_2 = -\frac{\beta \bar{z}_1 + C}{\bar{\beta}}. \tag{8}$$

Snadno bychom se přesvědčili, že když je splněn vztah (8), jsou body z_1 a z_2 osově souměrné podle dané přímky.

Nutná a postačující podmínka, aby body z_1 a z_2 byly osově souměrné podle přímky $\bar{\beta} z + \beta \bar{z} + C = 0$, je tedy

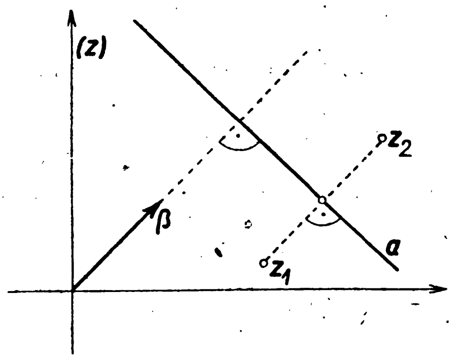
$$\bar{\beta} z_2 + \beta \bar{z}_1 + C = 0 \Longleftrightarrow \bar{\beta} z_1 + \beta \bar{z}_2 + C = 0. \tag{8,1}$$

2.7 Dvě a více přímek

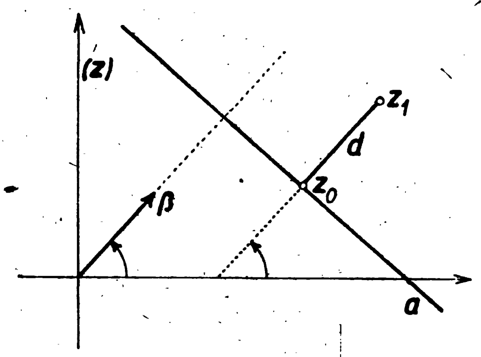
2.71 *Nutná a postačující podmínka*, aby přímky $\bar{\alpha} z + \alpha \bar{z} + C = 0$, $\beta z + \bar{\beta} \bar{z} + D = 0$ byly různoběžné, resp. rovnoběžné resp. splývaly, zní: pro hodnost h matice soustavy $\begin{bmatrix} \bar{\alpha}, & \alpha \\ \bar{\beta}, & \beta \end{bmatrix}$ a hodnost h^+ matice rozšířené $\begin{bmatrix} \bar{\alpha}, & \alpha, & C \\ \bar{\beta}, & \beta, & D \end{bmatrix}$ platí $h = h^+ = 2$ resp. $h \neq h^+$ resp. $h = h^+ = 1$.

Tvrzení plyne z Frobeniovy věty.

2.72 *Stanovit rovnici přímky a, procházející průsečíkem daných různoběžek* $P_1 \equiv \bar{\alpha}_1 z + \alpha_1 \bar{z} + C_1 = 0$, $P_2 \equiv \bar{\alpha}_2 z + \alpha_2 \bar{z} + C_2 = 0$.



Obr. 7



Obr. 8

Přímka a nechť má rovnici $\bar{\alpha} z + \alpha \bar{z} + C = 0$. Protože má procházet průsečíkem přímek P_1 a P_2, musí mít soustava

$$\begin{aligned} \bar{\alpha} z + \alpha \bar{z} + C &= 0, \\ \bar{\alpha}_1 z + \alpha_1 \bar{z} + C_1 &= 0, \\ \bar{\alpha}_2 z + \alpha_2 \bar{z} + C_2 &= 0, \end{aligned} \tag{*}$$

jediné řešení. K tomu je nutné a stačí (Frobeniova věta), aby hodnost h matice soustavy (*) a hodnost h^+ matice rozšířené byly rovné 2. Odtud plyne, že existují komplexní konstanty $\varkappa_1$ a $\varkappa_2$ tak, že platí

$$\begin{aligned} \bar{\alpha} &= \varkappa_1 \bar{\alpha}_1 + \varkappa_2 \bar{\alpha}_2, \\ \alpha &= \varkappa_1 \alpha_1 + \varkappa_2 \alpha_2, \\ C &= \varkappa_1 C_1 + \varkappa_2 C_2. \end{aligned}$$

Ukážeme, že tyto konstanty jsou reálné. Ze vztahu $\alpha = \varkappa_1 \alpha_1 + \varkappa_2 \alpha_2$ plyne totiž $\bar{\alpha} = \bar{\varkappa}_1 \bar{\alpha}_1 + \bar{\varkappa}_2 \bar{\alpha}_2$ a ve spojení s dřívějším vztahem $\bar{\alpha} = \varkappa_1 \bar{\alpha}_1 + \varkappa_2 \bar{\alpha}_2$ dostáváme

$$\begin{aligned} (\varkappa_1 - \bar{\varkappa}_1) \bar{\alpha}_1 + (\varkappa_2 - \bar{\varkappa}_2) \bar{\alpha}_2 &= 0, \\ (\varkappa_1 - \bar{\varkappa}_1) \alpha_1 + (\varkappa_2 - \bar{\varkappa}_2) \alpha_2 &= 0, \end{aligned}$$

odkud plyne $\varkappa_1 = \bar{\varkappa}_1 = k_1$, $\varkappa_2 = \bar{\varkappa}_2 = k_2$, neboť podle předpokladu $\begin{vmatrix} \bar{\alpha}_1, & \bar{\alpha}_2 \\ \alpha_1, & \alpha_2 \end{vmatrix} \neq 0.$
Platí tedy

$$\begin{aligned} \bar{\alpha} &= k_1 \bar{\alpha}_1 + k_2 \bar{\alpha}_2, \\ \alpha &= k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2, \\ C &= k_1 C_1 + k_2 C_2, \end{aligned}$$

a po dosazení do rovnice přímky dostáváme

$$\begin{aligned} a \equiv (k_1 \bar{\alpha}_1 + k_2 \bar{\alpha}_2) z + (k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2) \bar{z} + k_1 C_1 + k_2 C_2 \equiv \\ \equiv k_1 (\bar{\alpha}_1 z + \alpha_1 \bar{z} + C_1) + k_2 (\bar{\alpha}_2 z + \alpha_2 \bar{z} + C_2) = 0, \end{aligned}$$

o jest symbolicky

$$a \equiv k_1 P_1 + k_2 P_2 = 0.$$

2.73 *Svazek přímek*

Svazkem přímek rozumíme množinu přímek procházejících daným bodem (t. zv. středem svazku) nebo navzájem vesměs rovnoběžných.

Nutná a postačující podmínka aby tři přímky náležely do svazku, zní: determinant z koeficientů jejich rovnic je roven nule.

Důkaz věty zbývá provést jen pro případ rovnoběžek, neboť pro různoběžky věta platí podle odst. 2.71.

Buďtež tedy $\bar{\alpha}_i z + \alpha_i \bar{z} + C_i = 0$ $(i = 1, 2, 3)$ rovnice tří rovnoběžek. Pak podle (2,1) platí $\alpha_3 = k_3 \alpha_1$, $\alpha_2 = k_2 \alpha_1$ a dále

$$\begin{vmatrix} \bar{\alpha}_1, & \alpha_1, & C_1 \\ k_2 \bar{\alpha}_1, & k_2 \alpha_1, & C_2 \\ k_3 \bar{\alpha}_1, & k_3 \alpha_1, & C_3 \end{vmatrix} = \alpha_1 \bar{\alpha}_1 \begin{vmatrix} 1, & 1, & C_1 \\ k_2, & k_2, & C_2 \\ k_3, & k_3, & C_3 \end{vmatrix} = 0 \text{ (podmínka nutná).}$$

Platí-li naopak $\begin{vmatrix} \bar{\alpha}_1, \alpha_1, C_1 \\ \bar{\alpha}_2, \alpha_2, C_2 \\ \bar{\alpha}_3, \alpha_3, C_3 \end{vmatrix} = 0$, je kterákoli řada lineární kombinací ostatních, tak na příklad $\alpha_3 = k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2$, což ve spojení s předpokladem $\alpha_2 = k_2 \alpha_1$ dává $\alpha_3 = k' \alpha_1$ a tedy všechny tři přímky jsou vzájemně rovnoběžné.

Poznámka: Zvolíme-li za t. zv. základní přímky $P_1 = 0$ a $P_2 = 0$, pak rovnice $k_1 P_1 + k_2 P_2 = 0$ vyjadřuje pro každou dvojici k_1, k_2 (s výjimkou $k_1 = k_2 = 0$) přímky, jež náležejí do svazku určeného přímkami P_1, P_2, které dostaneme volbou $k_2 = 0$, resp. $k_1 = 0$. Pro $k_1 \neq 0$ lze rovnici svazku psát ve tvaru $P_1 + kP_2 = 0$, kde $k = \dfrac{k_2}{k_1}$ je t. zv. parametr.

2.74 *Osy úhlů dvou různoběžek*

Rovnice os úhlů daných různoběžek $\bar{\alpha}_i z + \alpha_i \bar{z} + C_i = 0$ $(i = 1,2)$ znějí:

$$_1 0_2 \equiv (|\alpha_2| \bar{\alpha}_1 \pm |\alpha_1| \bar{\alpha}_2) z + (|\alpha_2| \alpha_1 \pm |\alpha_1| \alpha_2) \bar{z} + (|\alpha_2| C_1 \pm |\alpha_1| C_2) = 0.$$

Důkaz plyne z definice os úhlů a známé geometrické vlastnosti parametru ve svazku.

Poznámka: V případě dvou rovnoběžek $\bar{\alpha} z + \alpha \bar{z} + C_i = 0$ $(i = 1,2)$ dostáváme osu pásu o rovnici $\bar{\alpha} z + \alpha \bar{z} + \dfrac{C_1 + C_2}{2} = 0$. Druhý případ nemá smysl.

2.8 Příklady

1. *Stanovit obsah trojúhelníka o vrcholech z_i $(i = 1, 2, 3)$.*

Proveďme nejprve transformaci posunutím. Za nový počátek zvolme bod z_3. Transformační rovnice jsou $w = z - z_3$, tedy

$$w_1 = z_1 - z_3 \quad \text{a} \quad w_2 = z_2 - z_3 .$$

Obsah trojúhelníka je pak

$$P = \frac{1}{2} |w_1| \cdot |w_2| \cdot |\sin \varphi|,$$

kde φ je úhel trojúhelníka při vrcholu z_3. Podle vzorce (2) je pak

$$P = \left| \frac{1}{4j} (\bar{w}_1 w_2 - w_1 \bar{w}_2) \right| = \text{abs. hodn.} \left(\frac{1}{4} \begin{vmatrix} w_2, \bar{w}_2 \\ w_1, \bar{w}_1 \end{vmatrix} \right).$$

Po zpětné transformaci a úpravě dostáváme

$$P = \text{abs. hodn.} \left(\frac{1}{4} \begin{vmatrix} z_1, \bar{z}_1, 1 \\ z_2, \bar{z}_2, 1 \\ z_3, \bar{z}_3, 1 \end{vmatrix} \right).$$

Poznámka: Pro $\begin{vmatrix} z_1, \bar{z}_1, 1 \\ z_2, \bar{z}_2, 1 \\ z_3, \bar{z}_3, 1 \end{vmatrix} = 0$ leží body z_i na jedné přímce (viz odst. 2.2).

2. *Stanovit geometrické místo bodů, pro které platí*

$$|z - z_1| = |z - z_2|.$$

Platí

$$(z - z_1)(\bar{z} - \bar{z}_1) = (z - z_2)(\bar{z} - \bar{z}_2)$$

a po úpravě

$$(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) z + (z_2 - z_1) \bar{z} + z_1 \bar{z}_1 - z_2 \bar{z}_2 = 0.$$

Tímto geometrickým místem je přímka kolmá na spojnici obou daných bodů, a protože prochází středem této spojnice (podle předpokladu $|z - z_1| = |z - z_2|$), je její osou souměrnosti.

3. *Stanovit vzdálenost dvou rovnoběžek, daných rovnicemi*

$$\bar{\beta} z + \beta \bar{z} + C_i = 0 \quad (i = 1, 2).$$

Hledaná vzdálenost d je

$$d = |z_2 - z_1|,$$

kde z_1 a z_2 jsou průsečíky rovnoběžek s libovolnou jejich kolmicí. Platí

$$z_2 - z_1 = k \beta,$$

$$\bar{\beta} z_1 + \beta \bar{z}_1 + C_1 = 0,$$

$$\bar{\beta} z_2 + \beta \bar{z}_2 + C_2 = 0,$$

tedy

$$\bar{\beta}(z_2 - z_1) + \beta(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) + (C_2 - C_1) = 0.$$

Po dosazení a úpravě vypočteme konstantu k:

$$k = \frac{C_1 - C_2}{2 \beta \bar{\beta}},$$

odkud

$$d = \frac{1}{2} \frac{|C_1 - C_2|}{|\beta|}.$$

4. *K dané přímce a najít přímku středově souměrnou podle bodu* z_0.

Přímka a nechť má rovnici $\bar{\beta} w + \beta \bar{w} + C = 0$. Pro body z hledané přímky musí platit

$$z + w = 2 z_0 \quad \text{a tedy} \quad w = 2 z_0 - z.$$

Po dosazení a úpravě dostaneme

$$\bar{\beta} z + \beta \bar{z} - 2 \bar{\beta} z_0 - 2 \beta \bar{z}_0 - C = 0,$$

což je rovnice hledané přímky.

Pro $z_0 = 0$ dostáváme rovnici přímky souměrné podle počátku:

$$\bar{\beta} z + \beta \bar{z} - C = 0.$$

5. *K dané přímce a o rovnici* $\bar{\alpha} z + \alpha \bar{z} + C = 0$ *najít přímku osově souměrnou podle přímky b o rovnici* $\bar{\beta} z + \beta \bar{z} + D = 0$.

Pro dvojici bodů z a w, souměrných podle přímky b, platí

$$\bar{\beta} z + \beta \bar{w} + D = 0,$$

odkud

$$\bar{w} = - \frac{\bar{\beta} z + D}{\beta}.$$

Dosazením do rovnice $\bar{\alpha} w + \alpha \bar{w} + C = 0$ dostáváme

$$\alpha \bar{\beta}^2 z + \bar{\alpha} \beta^2 \bar{z} + D(\alpha \bar{\beta} + \bar{\alpha} \beta) - C \beta \bar{\beta} = 0,$$

což je rovnice hledané přímky.

Na příklad pro přímku osově souměrnou podle osy x ($\beta = \mathrm{j}$, $D = 0$), resp. podle osy y ($\beta = 1$, $D = 0$) dostáváme

$$\alpha z + \bar{\alpha} \bar{z} + C = 0, \quad \text{resp.} \quad \alpha z + \bar{\alpha} \bar{z} - C = 0.$$

6. *Jsou dány dvě různoběžky o rovnicích* $a \equiv \bar{\alpha} z + \alpha \bar{z} + C = 0$, $b \equiv \bar{\beta} z + \beta \bar{z} + D = 0$ $(\alpha \neq \pm \beta)$. *Ukázat, že pro* $|\alpha| = |\beta|$ *jsou osy jejich úhlů určeny kolmicemi* $o_1 \equiv (\bar{\alpha} + \bar{\beta}) z + (\alpha + \beta) \bar{z} + (C + D) = 0$, $o_2 \equiv (\bar{\alpha} - \bar{\beta}) z + (\alpha - \beta) \bar{z} + (C - D) = 0$.

Rovnice přímky a', souměrné k přímce a podle osy o_1, resp. o_2 zní (viz příklad 5)

$$\begin{aligned} a' &\equiv \alpha(\bar{\alpha} \pm \bar{\beta})^2 z + \bar{\alpha}(\alpha \pm \beta)^2 \bar{z} + (C \pm D)[\alpha(\bar{\alpha} \pm \bar{\beta}) + \bar{\alpha}(\alpha \pm \beta)] - \\ &- C(\bar{\alpha} \pm \bar{\beta}) \cdot (\alpha \pm \beta) \equiv (\alpha \bar{\alpha}^2 \pm 2 \alpha \bar{\alpha} \bar{\beta} + \alpha \bar{\beta}^2) z + \\ &+ (\alpha^2 \bar{\alpha} \pm 2 \alpha \bar{\alpha} \beta + \bar{\alpha} \beta^2) \bar{z} + D(\alpha \bar{\beta} + \bar{\alpha} \beta \pm 2 \alpha \bar{\alpha}) \equiv \\ &\equiv (\alpha \bar{\beta} + \bar{\alpha} \beta \pm 2 \alpha \bar{\alpha}) \bar{\beta} z + (\alpha \bar{\beta} + \bar{\alpha} \beta \pm 2 \alpha \bar{\alpha}) \beta \bar{z} + \\ &+ D(\alpha \bar{\beta} + \bar{\alpha} \beta \pm 2 \alpha \bar{\alpha}) \equiv \pm (\alpha \pm \beta)(\bar{\alpha} \pm \bar{\beta}) \cdot (\bar{\beta} z + \beta \bar{z} + D) = 0, \end{aligned}$$

odkud $a' \equiv b$, neboť z předpokladu $\alpha \neq \pm \beta$ plyne

$$(\alpha \pm \beta) \cdot (\bar{\alpha} \pm \bar{\beta}) \neq 0.$$

7. *Stanovit průsečíky přímky* $\bar{\alpha} z + \alpha \bar{z} + C = 0$ s osami souřadnic.

Řešením rovnic přímky a osy x, resp. y dostáváme

$$\left.\begin{aligned} \bar{\alpha} z + \alpha \bar{z} + C &= 0 \\ z &= \bar{z} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow (\alpha + \bar{\alpha}) z + C = 0 \Longrightarrow z = -\frac{C}{\alpha + \bar{\alpha}} = \bar{z},$$

resp.

$$\left.\begin{aligned} \bar{\alpha} z + \alpha \bar{z} + C &= 0 \\ z &= -\bar{z} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow (\bar{\alpha} - \alpha) z + C = 0 \Longrightarrow z = \frac{C}{\alpha - \bar{\alpha}} = -\bar{z}.$$

(Pokračování).