Zdeněk Sekanina

K problému vztahu »perioda-svítivost« u dlouhoperiodických cefeid

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 1 (1956), No. 3, 282--288

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/137134

ZDENĚK SEKANINA

K PROBLÉMU VZTAHU »PERIODA—SVÍTIVOST« U DLOUHOPERIODICKÝCH CEFEID

Studium vztahů mezi astrofysikálními veličinami u proměnných hvězd je velmi důležité nejen s hlediska výzkumu jejich fysikální podstaty, nýbrž i s hlediska jejich dynamiky a kinematiky.

Již dlouho se astronomové zabývají problémem vztahu mezi periodou a svítivostí u dlouhoperiodických cefeid. Tato závislost je neobyčejně důležitá z několika příčin. Především je tento vztah velmi těsný, dovoluje tedy určit co možná nejpřesnější geometrické místo, graficky mu odpovídající. Periodu lze u dlouhoperiodických cefeid stanovit velmi přesně, což u všech proměnných hvězd nelze. Konečně dlouhoperiodické cefeidy jsou hvězdy o neobyčejně velké svítivosti, což dovoluje objevovat je nejen v celé naší Galaxii, ale i v sousedních hvězdných soustavách.

Tento vztah nás velmi dobře informuje o cefeidách jako hvězdách. Přesvědčuje nás především o tom, že periodické kolísání jasnosti dlouhoperiodických cefeid je podmíněno přesnými fysikálními procesy v hvězdě samé (hlavně v její atmosféře). Dále na základě vztahu „massa—svítivost" (který je u cefeid, jak známo, poněkud posunut) je vidět, že doba kolísání jasnosti je úměrná i celkové masse cefeid.

Velký význam má tento vztah i pro kinematiku dlouhoperiodických cefeid. Při objevu nové cefeidy lze pro změření její periody a zdánlivé hvězdné velikosti určit přesně absolutní hvězdnou velikost a z ní podle známého vzorce i vzdálenost. Na základě statistického materiálu pak lze určit celkové prostorové rozložení dlouhoperiodických cefeid v naší hvězdné soustavě. Ukázalo se, že dlouhoperiodické cefeidy tvoří, až na menší skupinu, plochý podsystém, t. j. jsou typické silnou koncentrací ke galaktické rovině.

Tato závislost nám konečně umožnila nejlépe změřit obrovské vzdálenosti mezi nejbližšími hvězdnými soustavami a tím i stanovit jejich rozměry.

Úvodem k objevu této závislosti byl výzkum dlouhoperiodických cefeid v Malém Magelhaesově mračně H. Leavittovou r. 1908. Ukázalo se totiž, že existuje velmi přesný vztah mezi periodou a zdánlivou hvězdnou velikostí. Poněvadž však rozměry Malého Magelhaesova mračna vzhledem k jeho vzdálenosti od naší Galaxie jsou téměř zanedbatelné, jde zde v podstatě o posunutý vztah „perioda—svítivost".

Z astronomů, zabývajících se touto závislostí, je třeba uvést R. Wilsona a hlavně B. V. Kukarkina, jemuž se podařilo sestavit empirické vzorce, jejichž grafickým zobrazením je lomená čára:

$$M = -0{,}74 - 1{,}67 \log P \text{ (pro } 0 < \log P \leqq 0{,}95\text{)},$$

$$M = -0{,}35 - 2{,}08 \log P \text{ (pro } 0{,}95 < \log P < 2\text{)}.$$

Při výpočtu těchto vzorců bylo přihlíženo k absorpci světla v mezihvězdném prostoru a velmi důkladně byla řešena otázka nulového bodu. Materiál, na jehož základě byl tento vztah nalezen, byl velmi bohatý. To vše svědčí ve prospěch těchto vzorců. Zajímavý je však zlom u hodnoty $\log P = 0{,}95$.

Jak je patrno z grafu, lze tuto závislost vyjádřit i spojitou křivkou druhého stupně. Tato methoda je již složitější než vyjádření lineární a postup je uveden dále.

Nejprve napíšeme obecnou rovnici kuželosečky

$$x^2 + Ay^2 + Bxy + Cx + Dy + E = 0, \tag{1}$$

kde volíme pro jednodušší numerické řešení koeficient u x roven jedné (což je vždy možné). V našem případě značí v rovnici (1) $x = \log P$ dekadický logaritmus periody (nezávisle proměnná), $y = M$ absolutní visuální hvězdnou velikost (závisle proměnná).

Buďte nyní dána měření délky periody a absolutní visuální hvězdné velikosti pro n objektů. Je známo, že t. zv. nahodilé chyby způsobují, že jednotlivé hodnoty se poněkud liší od skutečných přesných hodnot. Tento efekt se snažíme zmenšit na minimum methodou nejmenších čtverců, t. j. žádáme, aby součet čtverců chyb měření byl co nejmenší. Označíme-li

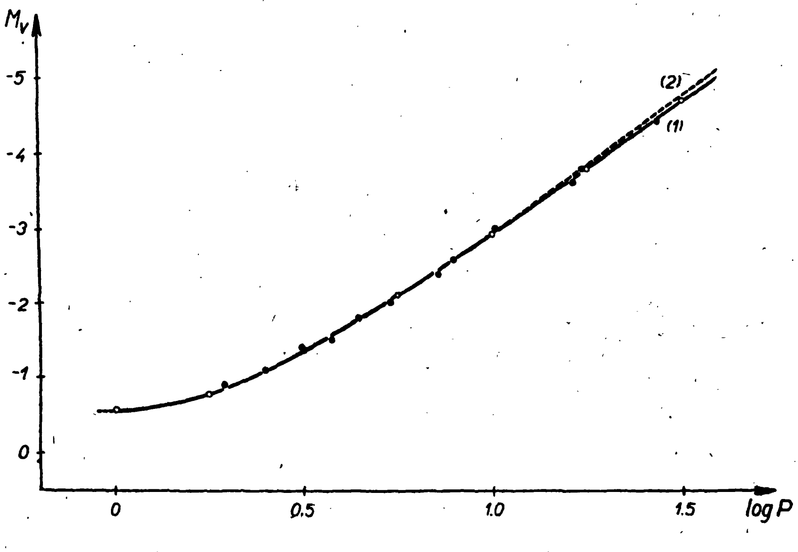
$$[x^i y^j] = x_1^i y_1^j + x_2^i y_2^j + \ldots + x_n^i y_n^j,$$

dostáváme uvedeným postupem z rovnice (1)

$$\begin{aligned} &[x^4] + A^2[x^4] + B^2[x^2y^2] + C^2[x^2] + D^2[y^2] + E^2 \cdot n + \\ &+ 2A[x^2y^2] + 2B[x^3y] + 2C[x^3] + 2D[x^2y] + 2E[x^2] + \\ &+ 2AB[xy^3] + 2AC[xy^2] = 2AD[y^3] + 2AE[y^2] + \\ &+ 2BC[x^2y] + 2BD[xy^2] + 2BE[xy] + 2CD[xy] + \\ &+ 2CE[x] + 2DE[y] = \Delta^2. \end{aligned} \tag{2}$$

Položíme nyní derivace tohoto výrazu podle jednotlivých koeficientů rovny nule:

$$\begin{aligned} &2A[y^4] + 2[x^2y^2] + 2B[xy^3] + 2C[xy^2] + 2D[y^3] + 2E[y^2] = 0, \\ &2B[x^2y^2] + 2[x^3y] + 2A[xy^3] + 2C[x^2y] + 2D[xy^2] + 2E[xy] = 0, \\ &2C[x^2] + 2[x^3] + 2A[xy^2] + 2B[x^2y] + 2D[xy] + 2E[x] = 0, \\ &2D[y^2] + 2[x^2y] + 2A[x^3] + 2B[xy^2] + 2C[xy] + 2E[y] = 0, \\ &2E \cdot n + 2[x^2] + 2A[y^2] + 2B[xy] + 2C[x] + 2D[y] = 0. \end{aligned} \tag{3}$$



Po zjednodušení a úpravě dostaneme dále:

$$
\begin{aligned}
&A\,[y^4] + B\,[xy^3] + C\,[xy^2] + D\,[y^3] + E\,[y^2] = -\ [x^2y^2],\\
&A\,[xy^3] + B\,[x^2y^2] + C\,[x^2y] = D\,[xy^2] + E\,[xy] = -\,[x^3y],\\
&A\,[xy^2] + B\,[x^2y] + C\,[x^2] + D\,[xy] + E\,[x] = -\ [x^3],\\
&A\,[y^3] + B\,[xy^2] + C\,[xy] + D\,[y^2] + E\,[y] = -\ [x^2y],\\
&A\,[y^2] + B\,[xy] + C\,[x] + D\,[y] + E\cdot n = -\ [x^2].
\end{aligned}
\tag{3'}
$$

Máme tak pět rovnic pro pět neznámých, jež můžeme řešit na př. Cramerovým pravidlem:

$$
A = -\frac{\begin{vmatrix} [x^2y^2], & [xy^3], & [xy^2], & [y^3], & [y^2] \\ [x^3y], & [x^2y^2], & [x^2y], & [xy^2], & [xy] \\ [x^3], & [x^2y], & [x^2], & [xy], & [x] \\ [x^2y], & [xy^2], & [xy], & [y^2], & [y] \\ [x^2], & [xy], & [x], & [y], & n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} [y^4], & [xy^3], & [xy^2], & [y^3], & [y^2] \\ [xy^3], & [x^2y^2], & [x^2y], & [xy^2], & [xy] \\ [xy^2], & [x^2y], & [x^2], & [xy], & [x] \\ [y^3], & [xy^2], & [xy], & [y^2], & [y] \\ [y^2] & [xy], & [x], & [y], & n \end{vmatrix}},
$$

a podobně pro B, C, D a E, nebo lze soustavu řešit postupnou eliminací neznámých.

Rovnici kuželosečky (1) můžeme pokládat za kvadratickou rovnici pro y s kořeny

$$
y_{1,2} = \frac{-Bx - D \pm \sqrt{(Bx + D)^2 - 4A\,(x^2 + Cx + E)}}{2A}. \tag{1'}
$$

Tím jsme ke známé hodnotě periody přiřadili (zatím dvojznačně) hledanou hodnotu absolutní hvězdné velikosti. Abychom vyloučili dvojznačnost, musíme zjistit, které znaménko platí v našem případě.

Z výše uvedené rovnice by bylo možno vypočíst x (t. j. $\log P$), známe-li y (t. j. M):

$$
x_{1,2} = \frac{-By - C \pm \sqrt{(By + C)^2 - 4\,(Ay^2 + Dy + E)}}{2}, \tag{1''}
$$

což ovšem v praxi u našeho případu takřka nepřichází v úvahu.

Nyní ke konstrukci křivky. Algebraický doplněk A_{33} elementu a_{33} v diskriminatu kuželosečky je v našem případě

$$
A_{33} = \begin{vmatrix} 1, & \frac{1}{2}B \\ \frac{1}{2}B, & A \end{vmatrix} = A - \frac{B^2}{4}.
$$

Je-li $A_{33} > 0$, je kuželosečka elipsou, je-li $A_{33} = 0$, je kuželosečka parabolou, je-li $A_{33} < 0$, je kuželosečka hyperbolou. Mlčky předpokládáme, že jde o kuželosečku jednoduchou.

Poloosy a numerickou výstřednost středové kuželosečky najdeme, přetransformujeme-li původní rovnici kuželosečky na tvar (středový)

$$a_1 x^2 + a_2 y^2 + a_3 = 0, \tag{4}$$

kde $a_3 = \dfrac{\Delta}{A_{33}}$, a_1, a_2 jsou kořeny kvadratické rovnice

$$s^2 - Is + A_{33} = 0, \quad I = 1 + A, \quad \Delta = \begin{vmatrix} 1, & \frac{1}{2} B, & \frac{1}{2} C \\ \frac{1}{2} B, & A, & \frac{1}{2} D \\ \frac{1}{2} C, & \frac{1}{2} D, & E \end{vmatrix}.$$

Rovnici (4) pak upravíme na tvar

$$-\frac{a_1}{a_3} x^2 + -\frac{a_2}{a_3} y^2 = 1, \tag{4'}$$

odkud pro hlavní a vedlejší poloosu křivky plyne $a = \sqrt{-\dfrac{a_3}{a_1}}$, $b = \sqrt{-\dfrac{a_3}{a_2}}$ u elipsy a $a = \sqrt{-\dfrac{a_3}{a_1}}$, $b = \sqrt{\dfrac{a_3}{a_2}}$ u hyperboly. Numerická výstřednost pak je dána známým vztahem $e = \dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ $(e < 1)$ pro elipsu a $e = \dfrac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$ $(e > 1)$ pro hyperbolu.

Parametr paraboly najdeme z redukované rovnice

$$a_2 y^2 + a_4 x = 0 \tag{5}$$

rovněž pomocí invariantů I, A_{33} (zde je $A_{33} = 0$). Zde je $a_2 = I$, $\dfrac{a_4^2}{4} a_2 = -\Delta$, neboli $a_4 = 2\sqrt{-\dfrac{\Delta}{I}}$. Redukovanou rovnici (5) uvedeme na tvar

$$y^2 = -\frac{a_4}{a_2} x, \tag{5'}$$

odkud pro parametr p plyne

$$p = -\frac{a^2}{2a_4}.$$

S hlediska našeho problému je rovněž velmi důležité určit střední chybu, jíž jsme se dopustili. To zjistíme tím způsobem, že pro našich n hvězd, z nichž jsme sestavili vyjádření závislosti, vypočteme rozdíly:

$$\Delta_i = y_i - y_i^{(0)}, \tag{6}$$

kde y_i je zjištěná absolutní hvězdná velikost cefeidy, $y_i^{(0)}$ je absolutní hvězdná velikost, jež by cefeidě o téže periodě náležela podle naší křivky. Pak je střední chyba, s níž jsme určili absolutní hvězdnou velikost cefeid, dána výrazem

$$\mu = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \Delta_i^2}{n-1}}. \tag{7}$$

Jako příklad celého postupu uvádíme tento výpočet na základě dvanácti nejlépe prozkoumaných dlouhoperiodických cefeid (uvádíme u každé hodnotu logaritmu periody a střední absolutní hvězdnou velikost):

Tabulka 1.

Cefeida	log P	M
SU Cygni . .	0.288	—0.9
DT Cygni .	0.398	—1.1
SZ Tauri . .	0.498	—1.4
RT Aurigae	0.572	—1.5
T Vulpeculae . .	0.647	—1.8
δ Cephei .	0.730	—2.0
η Aquilae	0.856	—2.4
W Geminorum . .	0.898	—2.6
ζ Geminorum . .	1.006	—3.0
X Cygni .	1.214	—3.6
Y Ophiucchi	1.234	—3.8
T Monocerotis .	1.432	—4.4

Nyní položíme opět $\log P = x$, $M = y$. Abychom mohli řešit soustavu rovnic (3'), musíme spočíst nejdříve jednotlivé součty. V našem případě je

$$\begin{array}{llll}
[x] = 9.773 & [x^3] = 10.032 & [x^2y] = -29.915 \\
[y] = -28.5 & [y^3] = -267.123 & [xy^2] = 89.323 \\
[x^2] = 9.367 & [y^4] = 984.685 & [x^3y] = -34.756 \\
[y^2] = 81.75 & [xy] = -27.644 & [xy^3] = -314.757 \\
 & [x^2y^2] = 104.554. &
\end{array}$$

Soustava pěti rovnic o pěti neznámých má tedy tvar:

$$\begin{array}{l}
984.685A - 314.757B + 89.323C - 267.123D + 81.75\,E = -104.554 \\
-314.757A + 104.554B - 29.915C + 89.323D - 27.644E = 34.756 \\
89.323A - 29.915B + 9.367C - 27.644D + 9.773E = -10.032 \\
-267.123A + 89.323B - 27.644C + 81.75\,D - 28.5\,E = 29.915 \\
81.75\,A - 27.644B + 9.773C - 28.5\,D + 12\,E = -9.367.
\end{array}$$

Odtud $A = -0{,}0021$; $B = +0{,}2521$; $C = +0{,}0464$; $D = 0{,}1247$; $E = +0{,}0728$.

Když jsme takto vypočetli jednotlivé koeficienty, můžeme sestavit rovnici kuželosečky. Pro snížení počtu desetinných míst násobíme stem a dostaneme

$$100\,x^2 - 0{,}21\,y^2 + 25{,}21\,xy + 4{,}64\,x + 12{,}47\,y + 7{,}28 = 0. \tag{8}$$

Tuto rovnici řešíme jako kvadratickou rovnici pro y. Po úpravách dostaneme pro absolutní hvězdnou velikost (s použitím označení M a $\log P$)

$$M = 60{,}02 \log P + 29{,}69 - 50 \sqrt{(1{,}6316 \log P + 1{,}4345) \log P + 0{,}3665}. \qquad (8')$$

Je patrno, že v našem případě platí před diskriminantem znaménko minus.

Abychom zjistili, o jakou kuželosečku jde, uvedeme její rovnici — jak bylo výše obecně naznačeno — na středový tvar:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 100 & 12{,}605, & 2{,}32 \\ 12{,}605, & -0{,}21, & 6{,}235 \\ 2{,}32, & 6{,}235, & 7{,}28 \end{vmatrix} = -4831{,}2956;$$

kuželosečka není tedy složená. Dále $A_{33} = -179{,}8861$; kuželosečka je tedy hyperbolou. Dále $I = 99{,}79$, $a_3 = 26{,}8575$ a (z rovnice $s^2 - 99{,}79s - 179{,}8861 = 0$) $a_1 = -1{,}77$, $a_2 = 101{,}56$.

Redukovaná rovnice hyperboly je

$$-1{,}77\, x^2 + 101{,}56\, y^2 + 26{,}8575 = 0,$$

to jest

$$0{,}0659033\, x^2 - 3{,}78144\, y^2 = 1.$$

Poloosy jsou tedy $a = 3{,}89535$, $b = 0{,}51425$, numerická výstřednost $e = 1{,}00867638$. Hyperbola se — jak je vidět — velmi blíží parabole.

Nyní ještě zjistíme, jaké střední chyby jsme se dopustili. Dříve než vypočteme rozdíly Δ_i, musíme pro všech dvanáct cefeid určit příslušné absolutní hvězdné velikosti z naší rovnice. Tak dostáváme

$$\begin{array}{lll} y_1^{(0)} = -0.85 & y_5^{(0)} = -1.81 & y_9^{(0)} = -2.95 \\ y_2^{(0)} = -1{,}08 & y_6^{(0)} = -2.05 & y_{10}^{(0)} = -3.67 \\ y_3^{(0)} = -1.36 & y_7^{(0)} = -2.45 & y_{11}^{(0)} = -3.74 \\ y_4^{(0)} = -1.57 & y_8^{(0)} = -2.57 & y_{12}^{(0)} = -4.43 \end{array}$$

Odtud a z *tabulky 1* plynou rozdíly $\Delta_i = y_i - y_i^{(0)}$ (hodnota y_i je v tabulce označena v sloupci M):

$$\begin{array}{lll} \Delta_1 = -0.05 & \Delta_5 = 0.01 & \Delta_9 = -0.05 \\ \Delta_2 = -0.02 & \Delta_6 = 0.05 & \Delta_{10} = 0.07 \\ \Delta_3 = -0.04 & \Delta_7 = 0.05 & \Delta_{11} = -0.06 \\ \Delta_4 = 0.07 & \Delta_8 = -0.03 & \Delta_{12} = 0.03 \end{array}$$

Použitím vztahu (7) dostaneme

$$\mu = \pm 0.05.$$

Dostáváme tedy výsledky se střední chybou 0.05 hvězdné velikosti, což přepočteno na vzdálenost činí střední chybu asi 2.4%.

Velmi malý koeficient u M^2 mě přiměl k myšlence, zda by ho nešlo vůbec vyloučit, čímž by se značně ulehčilo řešení, neboť kvadratická rovnice by přešla v lineární. Jak se na grafu ukázalo, rozdíl je skutečně velmi malý a počíná se zvětšovat až pro periody větší než deset dní.

Matematické vyjádření tohoto zjednodušeného vztahu je zcela analogické vzorci (8) a uvádím je jen pro přehlednost:

$$100\, x^2 + 25.21\, xy + 4.64\, x + 12.47\, y + 7.28 = 0. \qquad (9)$$

Matematické vyjádření M ze zjednodušeného vzorce je, jak je patrno (opět s použitím označení $\log P$ a M):

$$M = -\frac{100 \log^2 P + 4.64 \log P + 7.28}{25.21 \log P + 12.47}. \qquad (9')$$

Nyní uvedeme několik hodnot pro porovnání obou vzorců v následující tabulce [v prvním sloupci je příslušný dekadický logaritmus periody, ve druhém absolutní velikost podle vzorce (8′), ve třetím totéž podle vzorce (9′), ve čtvrtém rozdíl mezi údajem ve druhém a třetím sloupci]:

Tabulka 2.

$\log P$	M_1	M_2	ΔM
0.00	—0.580	—0.584	0.004
0.25	—0.778	—0.783	0.005
0.50	—1.367	—1.380	0.013
0.75	—2.110	—2.136	0.026
1.00	—2.927	—2.970	0.043
1.25	—3.785	—3.850	0.065
1.50	—4.673	—4.758	0.085

Obě funkce (8′), (9′) mají s hlediska našeho problému definiční obor (0, 2).

Na uvedeném grafu jsou znázorněny obě funkce, původní je vytažena plně a označena (1), zjednodušená je vytažena čárkovaně a označena (2). Některé hodnoty vypočítané podle vzorce (8′) jsou zobrazeny prázdnými kroužky. Skutečné hodnoty 12 cefeid, z nichž byl vztah sestaven, jsou vyneseny v grafu plnými kroužky.

Ve svém článku jsem se snažil uvést postup hledání empirických vztahů, jež se dají vyjádřit spojitou křivkou druhého stupně. Tento záměr jsem zároveň spojil s problémem jednoho z nejdůležitějších vztahů v astronomii — se závislostí svítivosti dlouhoperiodických cefeid na jejich periodě. Je samozřejmé, že vztah vyvozený ze dvanácti cefeid nebude nejlépe vystihovat celkový charakter těchto proměnných hvězd — ostatně dlouhoperiodické cefeidy nejsou jednolitou skupinou — přesto však snad dostatečně názorně ilustruje alespoň kvalitativní znak této závislosti, že hodnota absolutní hvězdné velikosti roste rychleji než logaritmus periody, jak také vyplývá ze zlomu v Kukarkinových vzorcích.