Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Bohuslava Haňková
Jeden způsob sumace divergentních řad

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 1 (1956), No. 3, 227--233

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/137126

BOHUSLAVA HAŇKOVÁ

JEDEN ZPŮSOB SUMACE DIVERGENTNÍCH ŘAD

Otázka, čemu se rovná součet divergentní řady, byla problémem matematiků již XVII. a XVIII. stol. (Leibnitz, Bernoulli, D'Alembert, Lagrange). Euler, který bývá pokládán za zakladatele sečítání divergentních řad, první pochopil, že otázka je položena nesprávně, že je třeba se ptát ne „čemu se rovná", ale „jak určit" součet divergentní řady. Ve svém dopisu Goldbachovi (7. 8. 1754) píše: „Celá potíž leží v názvu „součet". Jestliže součtem řady rozumíme, jak se to obyčejně dělá, výsledek složení všech jejích členů, pak není pochyb, že součet dostaneme jen u těch nekonečných řad, které jsou konvergentní a dají výsledek tím bližší k nějakému určitému výrazu, čím více členů řady skládáme." Připišme však slovu součet jiný význam. Řekněme, že součet nějaké nekonečné řady je konečný výraz, z jehož rozvoje tato řada vzniká. (Suma cujusque seriei est valor expressionis illius finitae, ex cujus evolutione illa series oritur.) Podle tohoto Eulerova principu by však mohla nějaká řada vzniknout ze dvou různých výrazů, které by jí dávaly též různé hodnoty. Na příklad řada

$$1 + 1 - 1 + 1 - + \dots \tag{1}$$

vznikne, jestliže položíme $x = 1$, nejen z rozvoje výrazu

$$\frac{1}{1 + x} = 1 - x + x^2 + x^3 + - \dots,$$

který jí dává hodnotu $\frac{1}{2}$, ale též z rozvoje výrazu

$$\frac{1 + x + \dots + x^{m-1}}{1 + x + \dots + x^{n-1}} = \frac{1 - x^m}{1 - x^n} = 1 - x^m + x^n - x^{n+m} + x^{2n} - \dots \tag{2}$$

při libovolných m a n, $m < n$, takže při použití Eulerova principu je možno připsat řadě (1) libovolný součet $\frac{m}{n}$. Vysvětlení tohoto paradoxu bylo dáno již Lagrangem. Řada (2), zkoumaná jako mocninná řada, má mezery. Tak na příklad při $m = 2$, $n = 3$ tato řada má tvar

$$1 + 0 \cdot x - 1 \cdot x^2 + 1 \cdot x^3 + 0 \cdot x^4 - 1 \cdot x^5 + \dots$$

Eulerův princip připisuje zde součet $\frac{2}{3}$ ne řadě $1 - 1 + 1 - 1 + - \dots$, ale řadě $1 + 0 - 1 + 1 + 0 - 1 + \dots$, a není apriorní příčiny, proč očekávat, že tyto řady budou mít stejné součty. Eulerovo tvrzení je správné v tom smyslu, že konvergentní mocninná řada skutečně může vzniknout jen z jedné funkce. Obecně však na př. řada (1) může povstat z různých analytických výrazů, a tedy i nabývat různých hodnot.

Po kritickém přezkoumání základů analysy v první polovině XIX. stol. byly divergentní řady opomíjeny. Cauchy a Abel jasně zformulovali pojem konvergence a odmítli všechny divergentní řady. Cauchy napsal v „Předmluvě" ke své *Analyse algébraique* (1821): „J'ai été forcé d'admettre diverses propositions qui paraîtront peut-être un peu dures; par exemple qu'une série divergente n'a pas de somme..." Divergentní řady měly vždy své protivníky (D'Alembert, Laplace, v posledních letech i Lagrange) a po Cauchym se zdálo, že oposice dosáhla vítězství.

Současná theorie sumace divergentních řad se začala rychle rozvíjet teprve na konci XIX. a na začátku XX. stol. K rozvoji přispělo objevení souvislosti této theorie s jinými matematickými disciplinami. Cèsaro (1880) uvedl svoje methody sčítání ve spojení s otázkou násobení řad, Borel (1895—1901) se zkoumáním analytického prodloužení funkcí, Fejér s theorií řad Fouriera. Také methody Bernsteina-Rogozinského lze užít v theorii řad Fouriera, methoda Mittag-Lefflera má význam v theorii analytického pokračování funkcí. Riemannova methoda, která též vznikla pod vlivem Fourierových řad, se uplatňuje v obecné theorii trigonometrických řad. Cèsarova methoda má také významné užití v theorii Dirichletových řad a rovněž s její pomocí lze podat krátký důkaz Weierstrassovy věty o aproximaci spojitých funkcí polynomy. Ukázalo se velmi užitečné opustit klasickou definici Cauchyovu a definovat součet nekonečné řady mnohem šíře.

Přijměme definici: Jestliže symbolu $\sum a_n$ je nějakým způsobem (P) dán smysl a hodnota s, řekneme, že řada $\sum a_n$ je (P) — sčitatelná, číslo s nazveme (P)-součtem a píšeme $\sum a_n = s(P)$. Jestliže způsob (P) iterujeme k-krát, připisujeme k jako index a mluvíme o (P_k)-sčitatelnosti.

Při tvoření nových pravidel sumace požadujeme splnění alespoň těchto tří podmínek:

1. Podmínka permanence: $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$ implikuje $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s(P)$, to zn. každý nový způsob sumace přiřazuje nekonečné řadě, konvergentní v klasickém smyslu, její součet.

2. Musí existovat alespoň jedna v klasickém smyslu divergentní řada, která podle nového způsobu konverguje.

3. Dva různé sumační způsoby si nesmí vzájemně odporovat. Jestliže nějaká řada $\sum a_n$ je současně sčitatelná methodou (P) i (Q), musí být $\sum a_n = s(P) = s(Q)$.

Obyčejně ještě požadujeme, aby zůstala zachována elementární pravidla počítání s konvergentními posloupnostmi, jako sečítání a odečítání člen po členu dvou posloupností, přičítání a násobení konstantou, zákon distributivní, zákon semi-asociativity, atd. Tyto a podobné podmínky nemusí být všechny splněny, ale čím více jich v sobě nové pojetí konvergence zahrnuje, tím ho pokládáme za užitečnější. Užitečnost method sumace divergentních řad spočívá jednak v tom, že dávají smysl mnoha divergentním řadám, které při klasickém pojmu konvergence musely být opomíjeny, a v tom, že zjednodušují odpovědi na různé otázky, které při vyžadování konvergence jsou dosti složité.

Společná základní myšlenka nejznámějších method, t. j. methody Höldera [označujeme ji jako (H)-sčitatelnost], Cèsarà (C), Abela (A) a Borela (B) je ta, že členům řady $\sum a_n$ jsou přidělovány různé koeficienty, které činí řadu konvergentní ve starém smyslu, které však s rostoucím počtem členů řady stoupají k jedné. Tak na př. při (H)- nebo (C)-sčitatelnosti

$$S_n = \frac{s_0 + s_1 + \ldots + s_n}{n+1} = \frac{n+1}{n+1} a_0 + \frac{n}{n+1} a_1 + \frac{n-1}{n+1} a_2 + \ldots + \frac{a_n}{n+1} =$$

$$= a_0 + \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) a_1 + \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) a_2 + \ldots + \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) a_n.$$

Zde jasně vidíme, jak jednotlivé členy řady rostou stále silněji ke své plné hodnotě s rostoucím n. Při (A)-sčitatelnosti jsou to faktory x^n, které snižují vliv vzdálených členů řady, poněvadž $x < 1$, které však nechávají tento vliv stále vzrůstat, když $x \to 1$. Také Borelova methoda se dá tak interpretovat, jenže při ní vystupují částečné součty a nikoli členy řady.

Jednou z méně známých sumačních method je methoda momentová. Momenty nazýváme čísla, která se dají vyjádřit ve tvaru

$$\mu_n = \int_0^\infty f_n(x)\,\mathrm{d}h, \tag{3}$$

kde $h = h(x)$ je ohraničená rostoucí funkce mající tu vlastnost, že Stieltjesův integrál (3) konverguje pro všechna n. Jestliže $f_n(x) = x^n$, jde o momenty na př. rozložení massy nebo elektrického množství, jak jsou definovány ve fysice.

Označme ξ dolní hranici čísel x, pro něž $\int_x^\infty \mathrm{d}h = 0$. Je tedy

$$\int_{\xi+0}^\infty \mathrm{d}h = 0; \quad \int_x^\infty \mathrm{d}h > 0 \quad \text{pro } x < \xi.$$

Jestliže ξ je konečné, je

$$\mu_n = \int_0^\infty x^n\,\mathrm{d}h = \int_0^{\xi-0} x^n\,\mathrm{d}h + [h(\xi+0) - h(\xi-0)]\,\xi^n.$$

V tomto případě předpokládáme o funkci h, že je spojitá v bodě ξ. Kdyby totiž $h(\xi+0) - h(\xi-0) = D > 0$, methoda by se stala triviální, t. j. sečítala by jen konvergentní řady. [GOOD, JLMS, 21 (1946), 110—118.]

Nechť

$$a(x) = \sum \frac{a_n}{\mu_n} x^n. \tag{4}$$

Integrování člen po členu dá

$$\int a(x)\,\mathrm{d}h = \sum \frac{a_n}{\mu_n} \int x^n\,\mathrm{d}h = \sum a_n.$$

Píšeme $\sum a_n = s(\mu_n)$, jestliže

I) $\xi = \infty$, řada (4) konverguje pro všechna x a $\lim\limits_{X\to\infty} \int_0^X a(x)\,\mathrm{d}h = s$,

II) $\xi < \infty$, $h(\xi+0) - h(\xi-0) = 0$, řada (4) konverguje pro $0 < x < \xi$ a

$$\int_0^{\xi-0} a(x)\,\mathrm{d}h = \lim_{X\to\xi-0} \int_0^X a(x)\,\mathrm{d}h = s.$$

Tato methoda splňuje všechny tři základní podmínky pro methody sumace divergentních řad. [GOOD, JLMS, 19 (1944), 141—144.]

Jestliže $\xi = 1$ a $h(x) = \begin{cases} x & \text{pro } x < 1 \\ 1 & \text{pro } x \geqslant 1 \end{cases}$, pak $\mu_n = \frac{1}{n+1}$ a formule pro stanovení součtu řady má tvar

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{1-\varepsilon} \left\{ \sum (n+1)\, a_n x^n \right\} dx = s.$$

V tomto případě vyjádření součtu řady je shodné s vyjádřením součtu řady Abelovou methodou, která přiřazuje řadě $\sum a_n$ součet s, jestliže poloměr konvergence řady $\sum a_n x^n$ je $\geqslant 1$ a když $\lim_{x \to 1-0} \left(\sum a_n x^n \right) = s$.

Utvořme funkci $h(x)$, která splňuje předpoklady obdobné právě vysloveným požadavkům, t. j. nechť existují čísla $\alpha, \beta, < \infty$ taková, že

$$\begin{aligned} h(x) &= 0 && \text{pro } x < \alpha, \\ h(x) &= 1 && \text{pro } x \geqslant \beta, \\ h(x) &\neq \text{konst} && \text{pro } x \in \langle \alpha, \beta). \end{aligned}$$

Tuto funkci definujme takto:

K dané řadě $\sum a_n$ utvořme posloupnost částečných součtů $s_n = \sum_{V=0}^{n} a\, v$. Nechť funkce $v_n(x)$ značí počet hromadných bodů posloupnosti $\{s_n\}$, které jsou $\leqslant x$. Položme $h(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{v_n(x)}{n}$. Platí zřejmě nerovnosti $0 \leqslant h(x) \leqslant 1$ pro $-\infty < x < \infty$. Přitom jestliže $x_1 < x_2$, je $v_n(x_1) \leqslant v_n(x_2)$ a tedy i $h(x_1) \leqslant h(x_2)$. Jestliže tato funkce $h(x)$ pro danou řadu $\sum a_n$ existuje, platí

$$\lim_{n \to \infty} \frac{S_n}{n} = \lim_{X \to \beta - 0} \int_\alpha^X x \, dh(x), \left(S_n = \sum_{\nu=0}^{n} s_\nu \right). \tag{5}$$

Důkaz:

Rozdělme interval $\langle \alpha, \beta \rangle$ na m částí: $\alpha = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = \beta$. Z definice funkcí $v_n(x)$ a součtů S_n plyne

$$x_0 \frac{v_n(x_1) - v_n(x_0)}{n} + x_1 \frac{v_n(x_2) - v_n(x_1)}{n} + \ldots + x_{m-1} \frac{v_n(x_m) - v_n(x_{m-1})}{n} \leqslant \frac{S_n}{n}$$

$$\frac{S_n}{n} \leqslant x_1 \frac{v_n(x_1) - v_n(x_0)}{n} + x_2 \frac{v_n(x_2) - v_n(x_1)}{n} + \ldots + x_m \frac{v_n(x_m) - v_n(x_{m-1})}{n}.$$

Jestliže $n \to \infty$, je

$$\sum_{i=0}^{m-1} x_i [h(x_{i+1}) - h(x_i)] \leqslant \lim_{n \to \infty} \frac{S_n}{n} \leqslant \sum_{i=0}^{m-1} x_{i+1} [h(x_{i+1}) - h(x_i)].$$

Pro $\lambda = \max(x_{i+1} - x_i) \to 0$ se výrazy na pravé i levé straně nerovností blíží k integrálu Stieltjesa

$$\int_{\alpha}^{\beta} x \mathrm{d} h(x). \tag{6}$$

Tedy divergentním řadám, kterým lze přiřadit jakýsi součet Hölderovou iterovanou methodou, lze podle rovnosti (5) přiřadit týž součet integrálem (6). Z rovnosti (5) též plyne, že sumační methoda, vyjádřená integrálem (6), splňuje požadavky, kladené na sumační methody.

Uveďme jako příklad řady:

Příklad 1.

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots..$$

Pro tuto řadu

$$h(x)=\begin{cases}0 \text{ pro } x<0\\ x \text{ pro } x \in \langle 0,1),\\ 1 \text{ pro } x \leqslant 1.\end{cases} \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}=\lim_{X\to 1-0}\int_0^X x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2},$$

Příklad 2.

$$\frac{1}{2}+\cos\alpha+\cos 2\alpha+\ldots+\cos n\alpha+\ldots.; \qquad 0<\alpha<\frac{\pi}{2}.$$

$$h(x)=\begin{cases}0 & \text{pro } x<-1\\ \dfrac{\pi-\arccos x}{\pi} & \text{pro } x\in\langle -1,1).\\ 1 & \text{pro } x \geqslant 1\end{cases}$$

Platí $\frac{1}{2}+\sum_{\nu=1}^{n}\cos\nu t=\frac{\cos n t-\cos(n+1)t}{2(1-\cos t)}$.

Proto $\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\cos n\alpha}{2n(1-\cos\alpha)}=0$, a také

$$\lim_{X\to 1-0}\int_{-1}^{X} x\,\mathrm{d}h(x)=\lim_{X\to 1-0}\int_{-1}^{X} x\left(\frac{\pi-\arccos x}{\pi}\right)'\mathrm{d}x=0.$$

Všimněme si souvislosti mezi naší zavedenou funkcí $h(x)$ a integrální funkcí rozkladu, a integrálem (6) a matematickou nadějí v počtu pravděpodobnosti.

Rozložení pravděpodobnosti náhodné veličiny X můžeme charakterisovat tak, že určíme pravděpodobnost toho, že X je menší než nějaké konečné číslo x. Jestliže X je náhodná veličina diskretního typu, která nabývá hodnot x_ν s pravděpodobností p_ν, pak $P\{X<x\}=\sum_{x_\nu<x} p_\nu$. Jestliže X je spojitého typu, pak

$$P\{X<x\}=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Funkci $f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} P\{x \leqslant X < x + \Delta x\}$ nazýváme hustotou pravděpodobnosti. Veličina $P\{X < x\}$ se nazývá integrální rozložení pravděpodobnosti nebo integrální funkce rozkladu a označuje se $F(x)$. Má tyto vlastnosti: $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 1$, je neklesající pro x z $(-\infty, \infty)$ a nabývá hodnot, které tvoří interval $\langle 0,1 \rangle$. V intervalech, jejichž hodnot X nemůže nabývat, je $F(x) =$ konst. Vidíme, že integrální funkce rozkladu $F(x)$ má tytéž vlastnosti jako naše funkce $h(x)$.

Matematická naděje (střední hodnota) náhodné veličiny X je definována takto: Veličina X byla měřena n-krát. V m_1 případech se rovnala x_1, v m_2 případech x_2, atd., v m_k případech x_k, při čemž $m_1 + m_2 + \ldots. + m_k = n$. Střední hodnotou výsledků měření je veličina

$$\overline{X} = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + \ldots + x_K m_K}{n} = \sum_{\nu=1}^{K} x_\nu \frac{m_\nu}{n}.$$

Matematickou nadějí $M(X)$ je tedy v případě X-náhodné veličiny diskretního typu součet všech jejích možných hodnot, násobených příslušnou pravděpodobností:

$$M(X) = \sum x_\nu p_\nu.$$

Jestliže X-náhodná veličina je spojitého typu, matematická naděje

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) \, \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} x \, \mathrm{d}F(x).$$

Může-li náhodná veličina X padnout jen do intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$, je $F(x) =$ konst pro všechna x, která do tohoto intervalu nepatří, tedy pro tato x je $M(X) = 0$, takže je možno psát $M(X) = \int_{\alpha}^{\beta} x \, \mathrm{d}F(x)$.

Vidíme tedy, že moment prvního řádu je současně matematická naděje. Proto přiřadili-li jsme na př. řadě v 1. příkladu jako součet číslo $\frac{1}{2}$ integrálem (6), na základě příbuznosti funkcí $h(x)$ a $F(x)$ lze říci, že součet této řady je roven $\frac{1}{2}$ i na základě pravděpodobnosti.

Kdysi se k „pravděpodobnosti", ovšem ne v té pevné formě dnes vybudované theorie pravděpodobnosti, utíkali i matematikové 17. a 18. století. V diskusi kolem divergentní řady (1) mezi bratry Bernoulli a Leibnitzem byl Leibnitz již na cestě k jednomu z dnes přijatých určení sečítání divergentních řad, ale otázku zatemnil metafysikou. Řadě (1) přiřazuje součet $\frac{1}{2}$ na základě pravděpodobnosti, i když sám říká: „Tento způsob argumentace, i když se zdá spíše metafysický, než matematický, je přesto velmi nadějný." Zdá se, že měl i v tom pravdu. Ovšem při naší odvozené souvislosti jsou na funkci $h(x)$ kladeny silné požadavky (anulování přírůstku funkce mimo pevný interval), které splňuje jen málo divergentních řad. Právě pro řadu, o kterou Leibnitzovi šlo, funkce $h(x)$ nevyhovuje třetímu požadavku, který jsme při její konstrukci na ni kladli, t. j. pro $x \in \langle 0,1)$ $h(x) = \frac{1}{2} =$ konst. Proto matematická naděje

$$\int_0^1 x \, dh(x) = 0 + \frac{1}{2},$$

kterou této řadě přiřazují jako její součet všechny sumační methody, efektivní pro tuto řadu. Neefektivnost i obecné momentové methody pro tuto řadu nás nemusí zarážet, protože i jiné, velmi užitečné methody, na př. methoda, určená celistvými funkcemi, jsou pro tuto řadu také neefektivní. To nám též potvrzuje obecně platný princip, že ostrosti methody ubývá při vzrůstu její síly, tedy že silné methody, které jsou přizpůsobeny k sumaci rychle divergujících řad, mohou selhat před divergentními řadami mnohem slabšího typu.

Vraťme se ještě k momentům v počtu pravděpodobnosti. Jestliže budeme předpokládat, že hodnoty náhodné veličiny X, velké co do absolutní hodnoty, jsou málo pravděpodobné, t. j. hustota pravděpodobnosti, definované funkcí $f(x)$, se asymptoticky blíží k ose x, vidíme, že na střední veličinu $M(X)$ i čtverec střední veličiny $M(X^2)$ body křivky $f(x)$ budou mít tím menší vliv, čím dále budou od počátku. Tedy $M(X)$ a $M(X^2)$ jsou jakousi hrubou charakteristikou náhodné veličiny. Přesněji charakterisují náhodnou veličinu X matematické naděje vyšších stupňů, $M(X^n)$, t. j. momenty řádu n-tého. Lze tedy očekávat i na základě pravděpodobnosti, že nějaká divergentní řada bude mít za součet číslo s, které jí jako součet přiřadí i obecná momentová methoda.

Literatura

G. H. Hardy, *Raschodjaščijesja rjady*, Izdatělstvo inostrannoj litěratury, Moskva 1951.

G. P. Bojev, *Těorija verojatnostěj*, Gostěchizdat, Moskva 1950.

K. Knopp, *Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen*, Springer, Berlín 1922.