Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Jiří Sedláček
O konstrukcích orientovaných grafů

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 3 (1958), No. 3, 273--276

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/137116

O KONSTRUKCÍCH ORIENTOVANÝCH GRAFŮ

JIŘÍ SEDLÁČEK, Praha

V článku se známá Listingova věta o neorientovaných grafech formuluje pro grafy orientované.

I. Mezi nejstarší úlohy topologické povahy patří pravděpodobně problém nakreslit daný (souvislý) obrázek jedním tahem. Vždyť už L. Euler se r. 1736 zabýval touto úlohou oděnou ve známý problém sedmi mostů města Královce[1]). V této práci také vyslovil Euler větu, kterou v teorii grafů[2]) nyní formulujeme takto: *Konečný neorientovaný graf G lze nakreslit jedním tahem právě tehdy, je-li G souvislý eulerovský graf.* (Přitom graf se nazývá *eulerovský*, je-li každý jeho uzel sudého stupně.) Tehdejší Eulerův důkaz nebyl však úplný (bylo jen dokázáno, že uvedená podmínka je nutná, postačitelností se nezabýval); důkaz úplný je pak mnohem novějšího data (C. Hierzholzer 1873).

Problém eulerovských grafů doplňuje věta, kterou r. 1847 bez důkazu vyslovil J. B. Listing (odtud název věta Listingova) a r. 1882 dokázal E. Lucas: *Má-li konečný souvislý neorientovaný graf G právě 2p uzlů lichého stupně ($p > 0$), pak existuje takový systém složený z p otevřených tahů, že každá hrana grafu G je hranou právě jednoho tahu. Systém s takovýmito vlastnostmi obsahuje vždy aspoň p tahů*[3]).

Kdo jen trochu sleduje literaturu z teorie grafů, může si povšimnout, že daleko více jsou studovány grafy neorientované, zatímco orientovaným grafům je věnována pozornost mnohem menší. Tak i problém eulerovských grafů a Listingova věta mají klasickou podobu právě pro grafy neorientované. V knize D. Königa[4]) je sice uvedena analogie problému neorientovaných eulerovských grafů pro grafy orientované (viz ještě náš odst. III.), avšak věta odpovídající větě Listingově nebyla dosud (pokud jsem mohl zjistit) pro orientované grafy vyslovena. Touto úvahou se právě chceme zabývat v předloženém příspěvku.

II. V tomto článku u (konečných) orientovaných grafů připouštíme ke každé dvojici uzlů x, y konečně mnoho hran $(\overrightarrow{xy})_1, (\overrightarrow{xy})_2, \ldots, (\overrightarrow{xy})_k$. Každému uzlu x_i takového grafu G lze přiřadit (uspořádanou) dvojici celých nezáporných čísel $(r_i; S_i)$, kde r_i (resp. S_i) značí počet hran grafu G, které v uzlu u_i končí (resp. počínají). Je-li n počet uzlů grafu G, platí zřejmě

$$\sum_{i=1}^{n} r_i = \sum_{i=1}^{n} s_i\,, \tag{1}$$

neboť obě strany rovnice (1) znamenají počet hran grafu G. Položme $t_i = r_i - s_i$, $\psi(G) = \sum_{\substack{i=1\\ t_i>0}}^{n} |t_i|$, $\overline{\psi}(G) = \sum_{\substack{i=1\\ t_i<0}}^{n} |t_i|$. Z rovnice (1) plyne $\psi(G) = \overline{\psi}(G)$.

Konečnou posloupnost prvků (kde $m \geqq 1$)

$$u_1, \overrightarrow{u_1u_2}, u_2, \overrightarrow{u_2u_3}, u_3, \ldots, \overrightarrow{u_{m-1}u_m}, u_m \tag{2}$$

---

[1]) U nás je přístupný německý překlad Eulerovy práce v knize A. Speiser, *Klassische Stücke der Mathematik*, Zürich-Leipzig 1925, str. 127—138.

[2]) Základní pojmy z teorie grafů najde čtenář na příklad v článku A. Kotziga, *O istých rozkladoch grafu*, Matematicko-fyzikálny časopis SAV, 1955, č. 3.

[3]) Z československých matematiků se Listingovou větou zabýval nedávno A. Kotzig v článku *Poznámky k Listingovej vete o rozklade grafu na otvorené ťahy*, Časopis pro pěstování matematiky, roč. 81 (1956), č. 4, str. 396—404, a v článku *Rozklad konečného pravidelného grafu nepárneho stupňa na dva faktory*, tamtéž, roč. 83 (1958), č. 1.

[4]) D. König: *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen*, Leipzig 1936.

nazveme nyní *obecným orientovaným tahem* T v grafu G, jsou-li u_i ($i = 1, 2, \ldots, m$) uzly grafu G a $\overrightarrow{u_j u_{j+1}}$ hrany grafu G. Říkáme, že T *počíná* v (*počátečním*) uzlu u_1 a *končí* v (*koncovém*) uzlu u_m. Ostatní uzly posloupnosti (2) nazýváme *vnitřní* v T. Vyskytuje-li se každá hrana grafu G v posloupnosti (2) nejvýše jednou, mluvíme prostě o *orientovaném tahu*. Obecný orientovaný tah nazveme *otevřeným*, je-li $u_1 \neq u_m$, a *uzavřeným*, je-li $u_1 = u_m$. Je-li T otevřený orientovaný tah a vyskytuje-li se v posloupnosti (2) také každý uzel grafu G nejvýše jednou, pak T se nazývá *dráha*. Uzavřenému orientovanému tahu T, v němž tedy $u_1 = u_m$, zatím co pro všechny ostatní dvojice uzlů (u_i, u_j) v posloupnosti (2) — existují-li — platí $u_i \neq u_j$, říkáme *cyklus*. Speciálním příkladem cyklu je *smyčka* $\overrightarrow{u_1 u_1}$. Graf, v němž nelze najít žádný cyklus, se nazývá *acyklický*.[5])

Poznámka 1. Pro každý uzel u_i orientovaného tahu T platí zřejmě $r_i^* - s_i^* = -1$ resp. 0 resp. 1 podle toho, je-li tento uzel počátečním resp. vnitřním resp. koncovým uzlem tahu; při tom čísla r_i^* resp. s_i^* znamenají počet hran orientovaného tahu T, které v uzlu končí resp. počínají. (Srovnej podobnou větu pro grafy neorientované v knize Königově[4]), str. 6, věta 2.)

V množině uzlů konečného orientovaného grafu G lze nyní definovat binární relaci, pro niž zvolíme symbol $\gamma^{\rightarrow}$, při čemž klademe $x \gamma^{\rightarrow} y$ právě tehdy, je-li buď $x = y$ nebo existuje-li orientovaný tah počínající v uzlu x a končící vuzlu y. Je tu též možno definovat binární relaci $\rightarrow$, přičemž se klade $x \rightarrow y$ pro $x = y$ nebo tehdy, existuje-li dráha počínající v uzlu x a končící v uzlu y.

Věta 1. *V množině uzlů grafu G platí* $x \gamma^{\rightarrow} y \Leftrightarrow x \rightarrow y$.

Důkaz[6]): Implikace $x \rightarrow y \Rightarrow x \gamma^{\rightarrow} y$ je zřejmá. Nechť nyní $x \gamma^{\rightarrow} y$. Je-li $x = y$, pak ovšem $x \rightarrow y$. Nechť tedy $x \neq y$; pak existuje orientovaný tah T popsaný posloupností (2) tak, že $u_1 = x$, $u_m = y$. Mezi všemi takovými orientovanými tahy vyhledejme ten, který se skládá z nejmenšího počtu hran. Tím nechť je právě T; snadno nyní dokážeme, že T je dráha (čili $x \rightarrow y$). Kdyby v posloupnosti (2) pro $i < k$ platilo $u_i = u_k$, pak stačí sestrojit posloupnost

$$u_1, \overrightarrow{u_1 u_2} \ldots, u_i = u_k, \overrightarrow{u_k u_{k+1}}, \ldots, u_m\,,$$

která má o $(k - i)$ hran méně než posloupnost (2); to však je spor.

Věta 2. *V grafu G je každý otevřený orientovaný tah drahou právě tehdy, je-li G buď acyklický graf nebo je-li každý cyklus z G komponentou*[7]) *tohoto grafu.*

Důkaz. Nechť v G je každý otevřený orientovaný tah drahou a nechť obsahuje cyklus (2) (kde ovšem $u_1 = u_m$). Není-li celý tento cyklus komponentou v G, existuje v (2) uzel incidující s ještě další hranou grafu G; nechť je to např. hrana $\overrightarrow{v_1 u_1}$ (případ $\overrightarrow{u_1 v_1}$ je analogický). Potom orientovaný tah $v_1, \overrightarrow{v_1 u_1}, u_1, \overrightarrow{u_1 u_2}, \ldots, u_m$ není dráha (spor.)

Nechť nyní v G existuje otevřený tah popsaný posloupností (2), který není dráha. Pak ve (2) se vyskytuje aspoň jeden uzel aspoň vakrát; nechť pro $1 \leqq i < k \leqq m$ je $u_i = u_k$. Označení lze volit tak, že posloupnost

$$u_i, \overrightarrow{u_i u_{i+1}}, u_{i+1}, \ldots, \overrightarrow{u_{k-1} u_k}, u_k \tag{3}$$

popisuje cyklus. Protože však současně neplatí $i = 1$, $k = m$, existuje v G buď hrana $\overrightarrow{u_{i-1} u_i}$ nebo hrana $\overrightarrow{u_k u_{k+1}}$; tedy (3) není celá komponenta v G.

---

[5]) Viz na př. práci M. Fiedler - J. Sedláček: *O W-basích orientovaných grafů*, Časopis pro pěstování matematiky, roč. 83 (1958) čís. 2.

[6]) Tento důkaz podáváme analogicky, jak obdobnou větu pro neorientované grafy dokázal König na str. 7, věta 3.

[7]) Komponenta grafu je jeho maximální souvislý podgraf.

III. Konečné orientované grafy, u nichž je $r_i = s_i$ pro $1 \leqq i \leqq n$, nazveme *rovnovážně orientovanými*[8]). Lze-li uzly a hrany grafu G srovnat v orientovaný tah, říkáme též, že graf G *lze nakreslit jedním tahem*. V souvislosti s klasickým výsledkem L. Eulera uvádí D. König na str. 29 (věta 7) tuto nutnou a postačující podmínku pro (konečné orientované) grafy G, které lze nakreslit jedním tahem[9]):

Graf G je souvislý a rovnovážně orientovaný.

Souvislý rovnovážně orientovaný graf G je zvláštním případem *dobře orientovaného* grafu.[10]) Podle citovaného Königova výsledku lze totiž souvislý rovnovážně orientovaný graf G nakreslit jedním uzavřeným tahem, tedy pro každou dvojici uzlů x, y platí $x \gamma \rightarrow y$, tedy podle věty 1 je $x \rightarrow y$.

Kreslíme-li souvislý konečný neorientovaný graf jedním tahem a zeslabíme-li požadavky tak, že připouštíme, aby každá hrana grafu byla kreslena nejvýše dvakrát, pak každý souvislý graf lze takto konstruovat, jak naznačil v citované práci už Euler (viz König, str. 23, věta 5). Analogický výsledek však nelze pro grafy orientované najít[11]).

IV. Nyní chceme pro konečné orientované grafy dokázat analogickou větu, jakou pro grafy neorientované vyslovil Listing. Nejprve však odvodíme jednu větu pomocnou.

Lemma 1. *Nechť G je orientovaný graf, který není rovnovážně orientovaný (tedy $\psi(G) > 0$). Pak G lze doplnit právě $\psi(G)$ hranami tak, že vznikne rovnovážně orientovaný graf.*

Důkaz podáme indukcí podle $\psi(G)$. Označíme $x_1, x_2, \ldots, x_a$ resp. $y_1, y_2, \ldots, y_b$ ($a \geqq 1$, $b \geqq 1$) všechny uzly grafu G, pro něž platí $r_i > s_i$ resp. $r_i < s_i$.

Je-li $\psi(G_1) = 1$ (a tedy $\bar{\psi}(G_1) = 1$), platí $a = b = 1$. Doplňme graf G_1 hranou $\overrightarrow{x_1 y_1}$; vznikne tím rovnovážně orientovaný graf. Budiž nyní $q > 1$ (přirozené) a nechť tvrzení platí pro všechny grafy G^*, pro něž $\psi(G^*) < q$. Uvažujme graf G_2 mající $\psi(G_2) = q$; doplníme-li opět graf G_2 hranou $x_1 y_1$, vznikne graf G_3 mající $\psi(G_3) = q - 1$. Podle indukčního předpokladu lze G_3 doplnit $q - 1$ hranami v rovnovážně orientovaný graf, tedy G_2 můžeme tak doplnit právě q hranami. Důkaz je podán.

Věta 3. *Nechť G je orientovaný graf, jehož žádná komponenta není rovnovážně orientovaný graf. Pak platí:* a) *Existuje systém S_p skládající se z p otevřených orientovaných tahů takový, že každá hrana grafu G je v právě jednom tahu systému S_p.* b) *Pro každý takový systém S_p platí $p \geqq \psi(G)$, při čemž existuje systém S_{p_0}, kde $p_0 = \psi(G)$.*

Důkaz. Graf G doplníme $\psi(G)$ hranami tak, aby vznikl rovnovážně orientovaný graf $G^{(1)}$ (lemma 1). Při tom každou komponentu K_j grafu G doplňujme právě $\psi(K_j)$ hranami (platí $\psi(G) = \sum_j \psi(K_j)$). Graf $G^{(1)}$ nechť má komponenty $K_j^{(1)}$ ($j = 1, 2, \ldots, k$); protože jsou to rovnovážně orientované grafy (ne ovšem isolované uzly), můžeme každou komponentu $K_j^{(1)}$ nakreslit jedním (uzavřeným) tahem. Napišme příslušnou posloupnost (2) — kde $u_1 = u_m$ — a vynechme z ní ty hrany, které jsme přidávali při konstrukci komponenty $K_j^{(1)}$. Posloupnost (2) se rozpadne na $\psi(K_j)$ orientovaných tahů. O každém z nich se snadno přesvědčíme, že je otevřený: kdyby některý z nich byl uzavřený, pak by jistý uzel komponenty $K_j^{(1)}$ byl jak počáteční pro jednu tak koncový pro jinou přidávanou hranu (spor). Provedeme-li tedy tento postup pro každou komponentu grafu $G^{(1)}$, vidíme, že graf G lze nakreslit pomocí právě $\psi(G) = \sum_j K_j$ (otevřených) orientovaných tahů.

8) Název pochází od A. Kotziga.

9) Formulováno ovšem v naší terminologii.

10) Graf je dobře orientovaný, jestliže pro každou dvojici jeho uzlů x, y platí $x \rightarrow y$ (srov. např. práci z pozn. 5)).

11) Čtenář snadno nahlédne, že ke každému přirozenému číslu k existuje (dobře) orientovaný graf G, který lze konstruovat jedním obecným orientovaným tahem (2) jen tak, že jistá hrana grafu se v posloupnosti (2) vyskytuje alespoň k-krát.

Nechť dále $\bar{p}$ je nejmenší přirozené číslo takové, že lze v grafu G vytvořit systém $S_{\bar{p}}$ složený z $\bar{p}$ tahů. Dokážeme nyní, že žádný uzel grafu G nemůže být současně počátečním v jednom a koncovým v jiném tahu z $S_{\bar{p}}$. Kdyby na př. uzel u_i byl počáteční v T_1 a koncový v T_2 ($\mathsf{T}_1 \neq \mathsf{T}_2$), pak počázeční uzel z T_2 by musel (vzhledem k minimalitě čísla $\bar{p}$) splynout s koncovým uzlem z T_1. Hrany a uzly obou orientovaných tahů T_1 a T_2 by tvořily souvislý rovnovážně orientovaný podgraf H v grafu G. Zřejmě H není celou jednou komponentou z G. Lze proto předpokládat, že existuje hrana $\overrightarrow{u_\alpha u_\beta} \in G$ tak, že u_α non $\in H$, $u_\beta \in H$ (případ opačné orientace hrany nebudu probírat). Nechť $\overrightarrow{u_\alpha u_\beta} \in \mathsf{T}_3$, kde $\mathsf{T}_3 \in S_{\bar{p}}$. Sestrojíme-li podgraf H^*, do něhož zahrneme hrany a uzly, které leží buď v H nebo v T_3, je vidět, že H^* lze interpretovat jako otevřený orientovaný tah (počínající v počátečním uzlu tahu T_3). To však je spor s tím, že číslo $\bar{p}$ bylo zvoleno jako minimální.

Podle poznámky 1 tedy $|t_i|$ znamená počet tahů z $S_{\bar{p}}$, které v i-tém uzlu začínají nebo končí — podle toho, je-li $t_i < 0$ nebo $t_i > 0$. Protože počátečních uzlů v tazích systému $S_{\bar{p}}$ je $\bar{p}$, platí $\bar{p} = \sum_{\substack{i=1 \\ t_i < 0}}^{n} |t_i| \, \psi(G)$. Důkaz je podán.