

# Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

---

Josef Schmidtmayer

Dráhy družic

*Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*, Vol. 3 (1958), No. 3, 281--291

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/137102>

## Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 1958

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

## FYSIKA

### DRÁHY DRUŽIC

JOSEF SCHMIDTMAYER

(Katedra matematiky a deskriptivní geometrie elektrotechnické fakulty ČVUT, Praha)

*Za obvyklých zjednodušujících předpokladů jsou uvedeny některé typické, a to převážně geometrické vlastnosti drah, po nichž se mohou pohybovat vesmírem tělesa, jež se odpoutala od Země.*

#### 1. Úvod

Ještě před zhruba deseti lety byly přijímány zprávy o konstruování raket s dostupem několika set kilometrů jako zcela mimořádná zvláštnost. Dnes jsou takové rakety skutečností, družice jimi vynesené oblétaávají Zemi, připravuje se útok na Měsíc. Technické vědy směřují k řešení velkých vesmírných základů. Z pozadí vystupuje stále zřetelněji obrovitý vědecko-technický problém budoucnosti: rušení gravitace.

Základní zákony mechaniky a jednoduché matematické prostředky umožňují sledovat (v jakémsi prvním přiblížení) zajímavé vlastnosti drah, po nichž se pohybují a budou pohybovat první i pozdější vyslanci Země do vesmíru. Aby toto sledování bylo co nejjednodušší, užijeme řady zjednodušujících předpokladů.

#### 2. Idealisovaný pohyb v gravitačním poli Země

##### 2.1. Předpoklady

Pohyb každého tělesa vrženého s povrchu Země do okolního prostoru je ve skutečnosti velmi složitý. Je tomu tak tedy i u umělé družice. Při přesném rozboru by bylo třeba brát zřetel na odpor vzduchu v počátečním úseku dráhy, na účinky větrných proudů v atmosféře, na účinek tvaru a otáčení Země, na zemskou gravitaci, na gravitační účinky jiných těles ve vesmíru a p.

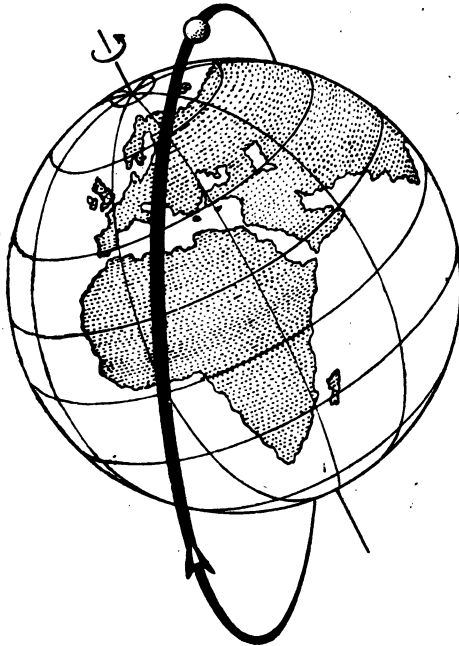
Nejsilnějším ze jmenovaných činitelů je zemská gravitace. Proto je možné — v jakémsi prvním přiblížení skutečnosti — zanedbat všechny ostatní činitele. Podle této úmluvy budeme považovat Zemi za kouli (středního) poloměru  $r_0 = 6371$  km. O gravitačním zrychlení budeme předpokládat, že je všude na povrchu Země stejné a že má (střední) velikost  $G_0 = 9,82 \text{ ms}^{-2}$ . Vektor zrychlení směřuje do středu Země.

Chceme-li vyšetřovat především dráhy umělých družic, jejichž perigeum<sup>1)</sup> je zpočátku nejméně 100 km, není ani zanedbání odporu vzduchu příliš hru-

<sup>1)</sup> Perigeum — místo na dráze družice, které leží nejbližší středu Země, apogeum — místo, jež leží nejdále. Společný název: apsidy.

bým zjednodušením, neboť ve vzdálenosti 100 km od povrchu Země klesá dynamický tlak i při rychlosti kolem  $10 \text{ km s}^{-1}$  pod  $1 \text{ kpm}^2$ . Zde tedy prakticky mizí základní aerodynamické síly, tj. jak odpor, tak i vztlak (míněn účinek za krátkou dobu).

Těleso, které pronikne dostatečně daleko od povrchu Země, se pohybuje po skončení hnaného letu v podstatě podle týchž zákonů, podle nichž se pohybují kolem Slunce jeho planety. Všechny takové dráhy jsou rovinnými křivkami a leží v rovině jdoucí středem Země (obr. 1).



Obr. 1. Eliptická dráha umělé družice Země.

## 2.2. Zvláštní rovinné centrální pohyby

### Soustava souřadnic

Skutečnost, že vektor výsledného zrychlení při nějakém rovinném pohybu směřuje stále do téhož pevného bodu, definuje tzv. *centrální pohyb* v rovině.

Pohyb tělesa vrženého do vesmíru se Země bude tedy vždy alespoň od okamžiku, kdy skončil hnaný let (tj. kdy přestal pracovat motor rakety), rovinným centrálním pohybem, jehož vektor zrychlení směřuje stále do středu Země.

O gravitačním zrychlení víme, že (za daných předpokladů) jeho velikost  $G$  ve vzdálenosti  $r$  od středu Země je nepřímo úměrná čtverci této vzdálenosti a že platí vztah

$$G = G_0 \frac{r_0^2}{r^2} = \frac{f}{r^2}, \quad r \geq r_0, \quad (1)$$

kde  $G_0 = 9,82 \cdot 10^{-3} \text{ km s}^{-2}$ ,  $r_0 = 6371 \text{ km}$ ,  $f = 399\,000 \text{ km}^3 \text{ s}^{-2}$  (viz obr. 2).

K popisu a vyšetření drah použijeme polárních souřadnic. V rovině dráhy zvolíme počátek souřadnic ve středu  $S$  Země. Polární souřadnice bodu  $B_z$  ve výšce  $z$  nad Zemí budou: průvodič  $r = SB_z$ , úhel  $\varphi$  (tzv. pravá anomalie) měřená od pevné polopřímky ( $0 \leq \varphi < 2\pi$ ) jdoucí bodem  $S$  (obr. 3). Zřejmě je

$$r_z = r_0 + z, \quad (2)$$

značí-li  $z$  nejkratší vzdálenost bodu  $B_z$  od povrchu Země.

Je-li bod  $B_z$  místem, v němž právě skončila činnost motoru, je další dráha tělesa plně určena vektorem rychlosti  $v_z$  v bodě  $B_z$  a polohou bodu  $B_z$ . Závislosti na čase zde vyšetřovat nebudeme. Vektor rychlosti je určen její velikostí  $v_z$  a orientovaným směrem, který je definován úhlem  $\psi_z$ , měřeným od polopřímky  $SB_z$ ;  $0 \leq \psi < 2\pi$ .

### 2.3. Rovnice drah. Oběžné doby

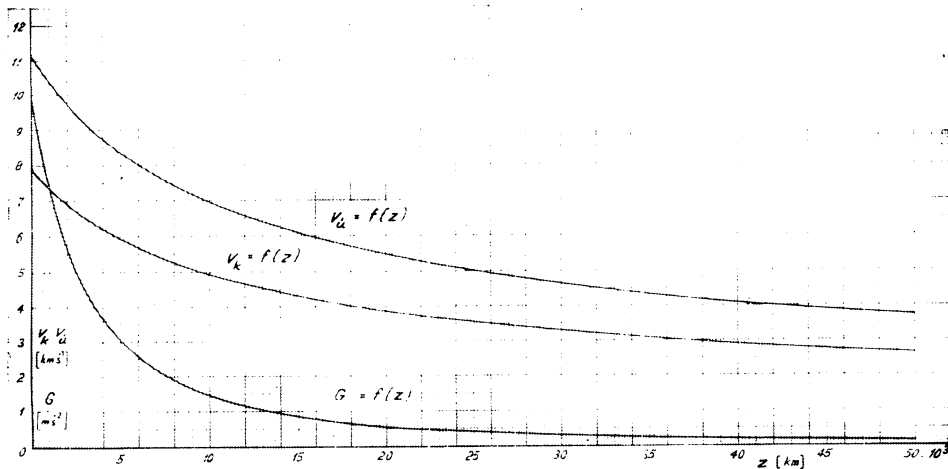
Úkoly, které nás zde zajímají, lze formulovat takto:

Nechť jsou dány tyto prvky: Začáteční bod dráhy  $B_z \equiv [r_z, \varphi_z]$  a vektor příslušné rychlosti  $\mathbf{v}_z$  (tj. jeho velikost  $v_z$  a úhel  $\psi_z$ ). Začátečním bodem rozumíme bod, v němž skončil hnaný let.

Je třeba určit:

- Dráhu tělesa.
- Dobu jednoho oběhu kolem Země.

Řešení dává teoretická mechanika. Převezmeme její výsledky (viz např. [1], [2]).



Obr. 2. Závislost gravitačního zrychlení  $G$ , velikosti únikové rychlosti  $v_u$  a kruhové rychlosti  $v_k$  na výšce  $z$  nad Zemí.

Se zřetelem k vžitému kladnému smyslu na průvodiči  $r_z$  (tj. od bodu  $S$  k bodu  $B_z$ ) působí zrychlení opačným směrem, a tedy v záporném smyslu. Proto musí základní vztah (1) pro orientovanou velikost  $G$  v úvahách teoretické mechaniky znít

$$G = -\frac{f}{r^2}, \quad r > r_0, \quad G_0 = -9,82 \cdot 10^{-3} \quad [\text{kms}^{-2}]. \quad (3)$$

Kromě gravitační konstanty  $f$  odvozuje teorie ještě druhou základní konstantu, tzv. plošnou rychlost  $\frac{1}{2}q$  (tj. obsah rovinné oblasti opsané průvodičem pohybujícího se bodu za jednotku času; je stálá, nezávisí na poloze bodu na dráze), kde

$$q = r_z v_z \sin \psi_z. \quad (4)$$

Nahoře stanovené úkoly lze řešit jednoznačně pomocí veličin  $f$ ,  $q$ ,  $r_z$ ,  $v_z$ ,  $\psi_z$ . Teorie ukazuje, že hledaná dráha je vždy kuželosečkou, jejíž ohnisková rovnice v použité soustavě polárních souřadnic s počátkem v bodě  $S$  je

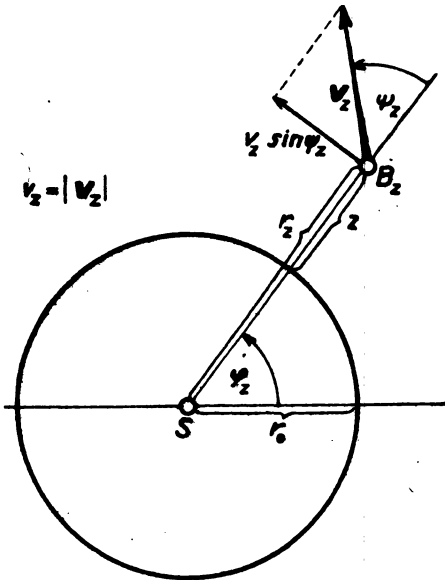
$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos(\varphi - \alpha)}, \quad (5)$$

kde

$$p = \frac{q^2}{f} \text{ je parametr kuželosečky,} \quad (6)$$

$$\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{2q^2}{fr_s} + \frac{v_s^2 q^2}{f^2}} \text{ je číselná výstřednost kuželosečky,} \quad (7)$$

$$\cos(\varphi_s - \alpha) = \frac{p - r_s}{\varepsilon r_s}, \quad \alpha \text{ je anomalie perigea kuželosečky.} \quad (8)$$



Obr. 3. Soustava polárních souřadnic.

O úhlu  $\alpha$  přitom platí:

je-li  $\psi = \psi_1 + \lambda\pi$ ,  $0 < \psi_1 \leq \frac{1}{2}\pi$ ,  $\lambda = 0$ ;

1, pak je  $\varphi_s - \pi < \alpha \leq \varphi_s$ ,

je-li  $\psi = \psi_1 + \lambda\pi$ ,  $\frac{1}{2}\pi \leq \psi_1 < \pi$ ,  $\lambda = 0$ ;

1, pak je  $\varphi_s \leq \alpha < \varphi_s + \pi$ .

Z výrazu (7) je zřejmé, že při

$$v_s^2 \begin{cases} < \\ = \\ > \end{cases} \left\{ \frac{2f}{r_s} - \frac{2G_0 r_0^2}{r_s} \right.$$

je dráha  $\begin{cases} \text{eliptická,} \\ \text{parabolická,} \\ \text{hyperbolická.} \end{cases} \quad (9)$

Proto se příslušným rychlostem rovněž říká eliptická, parabolická, hyperbolická. Jedním ohniskem dráhy je vždy střed Země. Ve zvláštních případech, jak uvidíme později, mohou dráhy přejít v úsečky nebo v polopřímky.

## 2.4. Hlavní osa oběžné dráhy

V souvislosti s družicemi mají význam především eliptické dráhy. Ze vztahů (5) až (7) lze pro ně odvodit velikost hlavní osy  $2a$ . Krajiní body hlavní osy (apsidy)  $A_1$  a  $A_2$  jsou určeny polárními souřadnicemi  $\varphi = \alpha$  resp.  $\alpha + \pi$ ,

takže celkem  $A_1 = \left[ \frac{p}{1 + \varepsilon}, \alpha \right]$ ,  $A_2 = \left[ \frac{p}{1 - \varepsilon}, \alpha + \pi \right]$ . Pro hlavní osu proto

dostáváme výsledek  $2a = \frac{p}{1 + \varepsilon} + \frac{p}{1 - \varepsilon}$ ; po dosazení za  $p$ ,  $\varepsilon$  je hlavní polosa

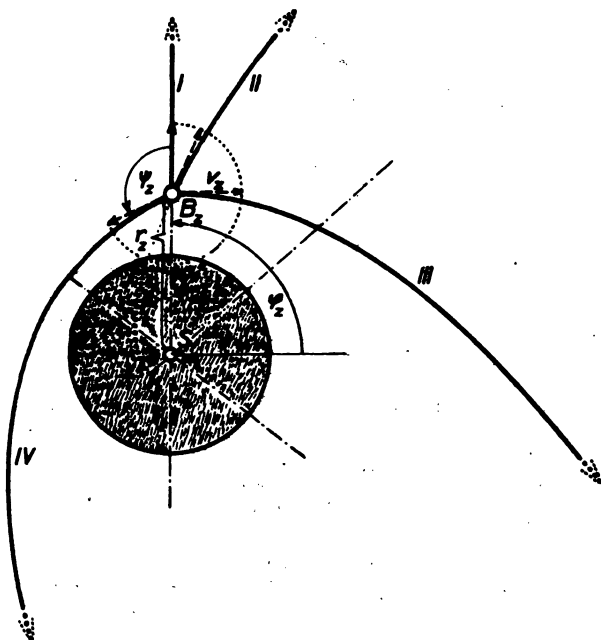
$$a = \frac{1}{\frac{2}{r_s} - \frac{v_s^2}{f}} \quad [\text{km}]. \quad (10)$$

Pro hyperbolické dráhy platí podobný vztah. Pro naše úvahy nemá význam.

Velikost hlavní osy závisí podle vztahu (10) jen na vzdálenosti  $r_s$  bodu  $B_s$  od středu Země a na velikosti rychlosti  $v_s$  v bodě  $B_s$ ; nezávisí na směru vektoru  $v_s$ .

## 2.5. Úniková a kruhová rychlost

Podle vztahů (9) setrvává těleso pohybující se v okolí Země v eliptické dráze, pokud  $v_s^2 < \frac{2f}{r_s}$ . Dosáhne-li velikost rychlosti takové hodnoty, že se



Obr. 4. Oběžné dráhy při stálé velikosti rychlosti  $v_s$  a různém úhlu  $\psi_s$ . Zřejmě  $v_s > (v_s)_k$ ,  $\psi_s > \pi$ .

dráha stane parabolickou, těleso uniká z oblasti zemské gravitace (a ovšem i při rychlostech ještě větších). Proto se nazývá rychlost, jejíž velikost je [viz (3)]

$$(v_s)_k = \sqrt{\frac{2f}{r_s}} = r_0 \sqrt{-\frac{2G_0}{r_s}} \quad [\text{kms}^{-1}] \quad (11)$$

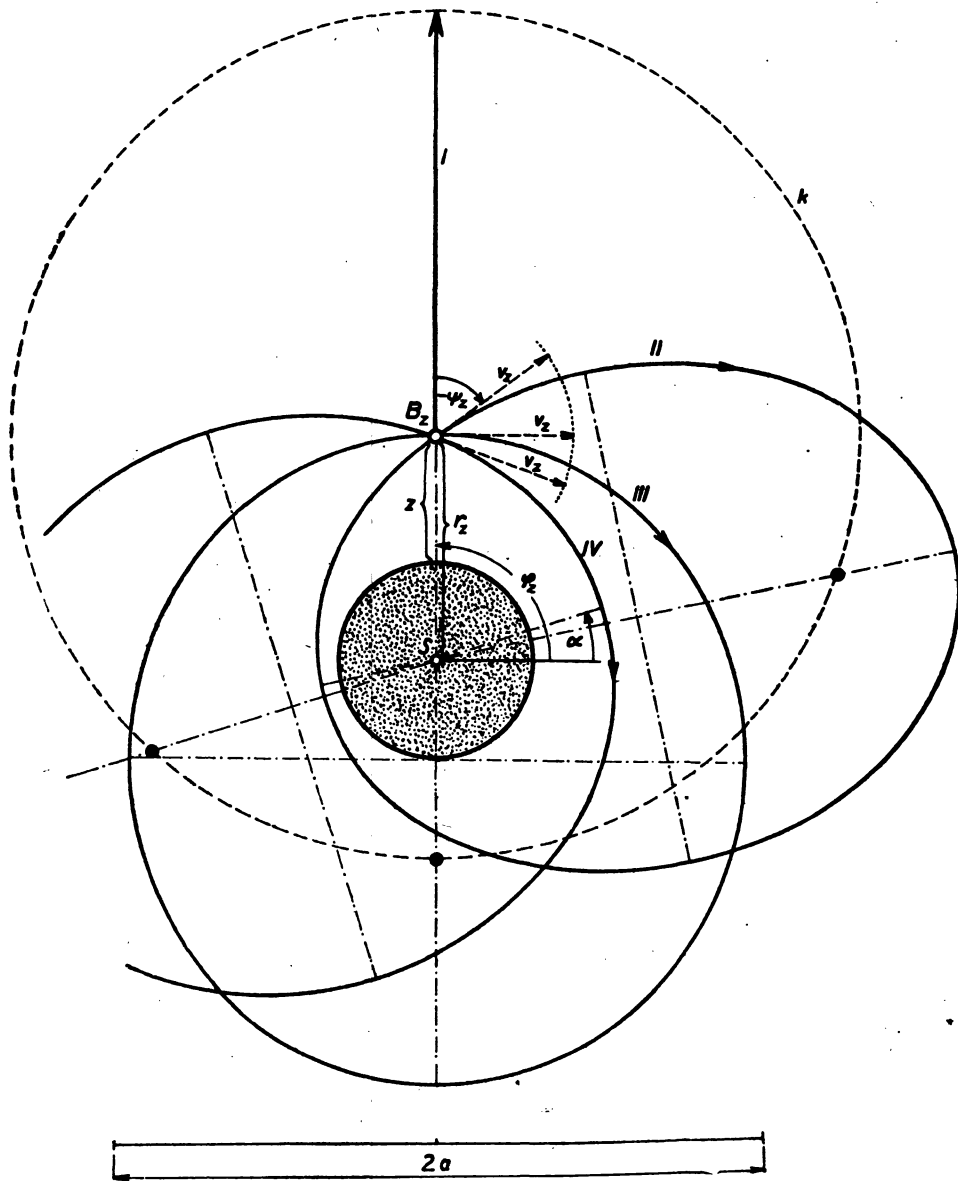
*únikovou rychlostí* ve vzdálenosti  $z$  od povrchu Země. Těleso vymrštěné alespoň touto rychlostí ve výšce  $z$  nad Zemí, unikne z dosahu zemské gravitace (nezávisle na směru, ovšem tak, aby se nestřetlo se Zemí) (viz obr. 4).

Všimněme si ještě případu, kdy eliptická dráha (při  $\psi = \frac{1}{2}\pi$  a  $\frac{3}{2}\pi$ ) přejde v kružnici. Pak je  $q = r_s v_s$ ,  $\varepsilon = 0$  a ze vztahu (7) dostáváme [viz (3)]

$$(v_s)_k = \sqrt{\frac{f}{r_s}} = r_0 \sqrt{-\frac{G_0}{r_s}} \quad [\text{kms}^{-1}], \quad (12)$$

tzv. *kruhovou rychlost* ve vzdálenosti  $z$  od povrchu Země. Výsledek (12) plyne ihned i ze vztahu (10), požadujeme-li, aby bylo  $r_z = a = \text{konst.}$  Zřejmě platí (viz také obr. 2)

$$(v_z)_a = \sqrt{2} (v_z)_k. \quad (13)$$



Obr. 5. Oběžné dráhy při stálém úhlu  $\varphi_z$  a různých velikostech rychlosti  $v_z$ . Jednotlivé dráhy odpovídají rychlostem: I -  $v_z = (v_z)_k$ , II -  $v_z > (v_z)_k$ , III -  $v_z = (v_z)_a$ , IV -  $v_z > (v_z)_a$ .

### 3. Některé speciální případy

#### 3.1. Oběžné dráhy při stálé velikosti rychlosti $v$ ,

Víme již, že při konstantní velikosti rychlosti  $v$ , v bodě  $B_2$  nezávisí velikost hlavní osy oběžné dráhy na úhlu  $\psi_2$ . Poněvadž součet (rozdíl) vzdáleností bodu  $B_2$  od obou ohnisek eliptické (hyperbolické) dráhy je právě  $2a$  a jedna z těchto vzdáleností (tj.  $SB_2$ ) je rovněž neproměnná, musí být i vzdálenost druhého ohniska dráhy od bodu  $B_2$  pevná. Druhé ohnisko tedy leží na kružnici  $k$  mající střed v bodě  $B_2$  a poloměr  $2a - SB_2$  ( $2a + SB_2$ ). Viz také obr. 4, 5.

Při únikové rychlosti  $v$ , (tj. při parabolické dráze) přejde zmíněná kružnice v úběžnou přímku roviny, v níž leží oběžná dráha.

#### 3.2. Oběžné dráhy při stálém směru rychlosti $v$ , ( $\psi \neq \lambda \frac{1}{2}\pi$ , $\lambda = 0; 1; 2; 3$ ).

V tomto případě mají všechny dráhy společné jedno ohnisko  $S$ , bod  $B_2$  a tečnu  $t_2$  v něm. Protože tečna elipsy (hyperboly) púlí úhel spojnic dotykového bodu s oběma ohnisky, a to úhel, v němž neleží střed kuželosečky, bude druhé ohnisko vždy na přímce  $w$  probíhající bodem  $B_2$  souměrně k přímce  $SB_2$  podle tečny  $t_2$ . U eliptické dráhy bude druhé ohnisko vždy v téže polorovině vytažené přímkou  $t_2$ , u hyperbolické dráhy v opačné polorovině než  $S$ . Půjde-li o dráhu parabolickou, bude její osou rovnoběžka s přímkou  $w$  (obr. 6).

Kruhová rychlost má i zde jisté výjimečné postavení. Působí-li totiž v bodě  $B_2$  kruhová rychlost velikosti  $(v_2)_k$ , pak je bod  $B_2$  vrcholem vedlejší osy příslušné eliptické dráhy. To plyne ihned ze vzorce (10) pro  $v_2 = (v_2)_k$ :

$$a = \frac{1}{\frac{2}{r_2} - \frac{(v_2)_k^2}{f}} = \frac{1}{\frac{2}{r_2} - \frac{f}{r_2 f}} = r_2 \quad [\text{km}]. \quad (14)$$

#### 3.3. Vektor rychlosti $v$ , kolmý k průvodiči $SB_2$ ( $\psi_2 = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ )

Začátek dráhy, bod  $B_2$ , je zřejmě jedním vrcholem hlavní osy eliptické nebo hyperbolické dráhy, po případě vrcholem dráhy parabolické. K určení drah postačí vypočítat veličiny  $a$ ,  $\varepsilon$ , resp.  $p$  u paraboly.

Pro  $v_2 = (v_2)_k$  lze v tomto případě zavést pojem *stacionární družice*. Souvisí s tímto problémem: Jaká musí být vzdálenost  $r_2$ , aby doba oběhu tělesa pohybujícího se po kružnici byla právě 24 hodin? Kdyby se ono těleso pohybovalo např. v rovině rovníku ve směru otáčení Země, stálo by zdánlivě stále nad týmž místem rovníku. (Pro úplnost třeba poznamenat, že těleso vypuštěné se Země by mělo ve skutečnosti v tomto případě již před započítím svého pohybu rychlost (zvanou někdy „vtisknutá rychlost“), jakou se pohybuje každé místo na rovníku při otáčení Země kolem své osy (cca  $0,46 \text{ kms}^{-1}$ ). Při vypuštění tělesa ve směru otáčení Země by mohla být o tuto hodnotu zmenšena velikost potřebné rychlosti  $v_2$ . Smluvili jsme se však, že tyto okolnosti zanedbáme.)

Pak musí platit  $\frac{2\pi(r_2)_k}{(v_2)_k} = 24 \cdot 3600$ , odkud po úpravě dostáváme

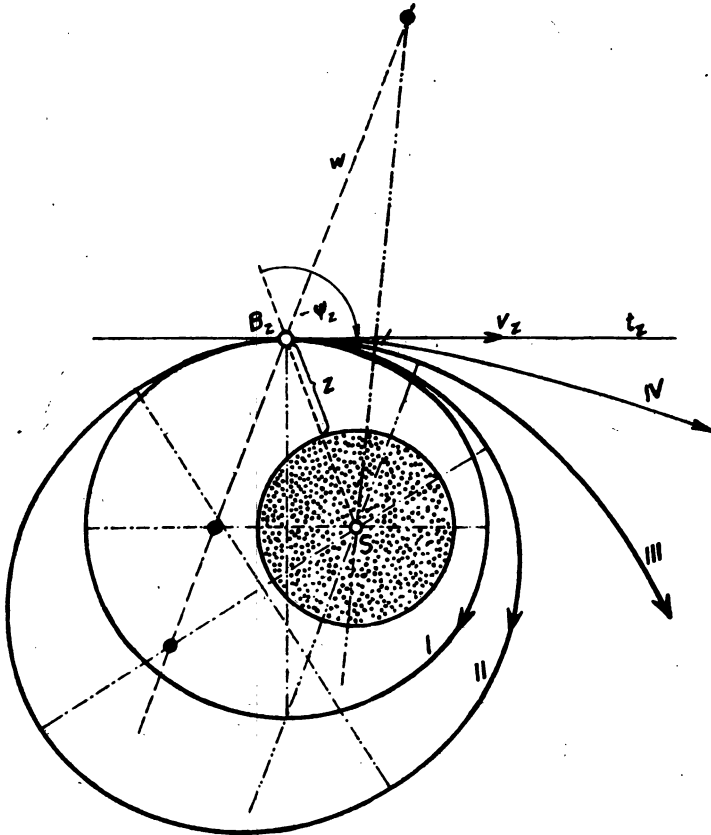
$$(r_2)_k = 42\,260 \quad [\text{km}]. \quad (15)$$



Příslušná kruhová rychlost je

$$(v_z)_k = 3,073 \text{ [kms}^{-1}\text{]} . \quad (16)$$

Výsledek: Těleso, vymrštěné ve vzdálenosti 42 260 km od středu Země (tj. cca 35 890 km nad povrchem Země) rychlostí  $3,073 \text{ kms}^{-1}$  ve směru kolmém ke spojnici místa vypuštění se středem Země, oběhne Zemi právě za 24 hodin. Bude-li se pohybovat v rovině rovníku souhlasně s otáčením Země, bude zdánlivě trvale stát nad týmž místem rovníku (neuvažujeme-li tzv. vtisknutou rychlost).

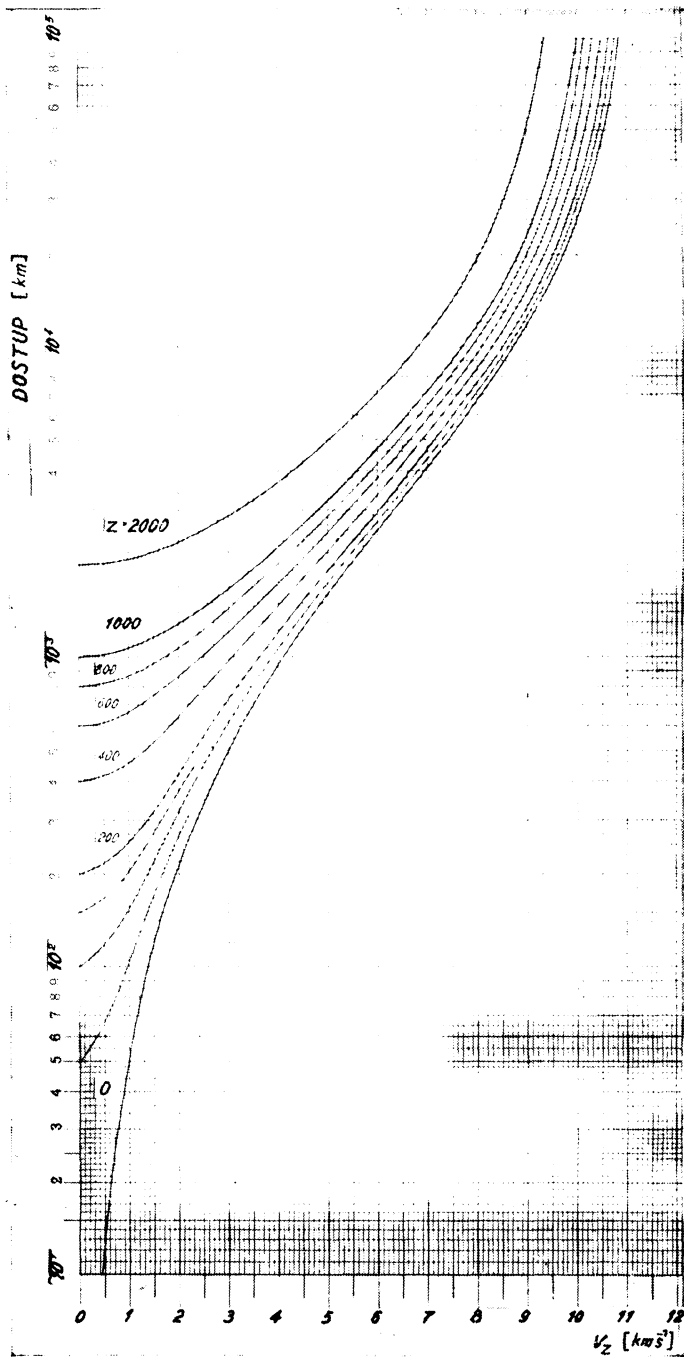


Obr. 6. Různé oběžné dráhy při únikové rychlosti působící v různých směrech.

### 3.4. Vektor rychlosti leží ve směru průvodiče $SB_z$ ( $\psi_z = 0$ )

Vzorce (4), (6), (7) dávají pro tento případ  $p = 0 \Rightarrow \varepsilon = 1$ .

Dráha se redukuje na úsečku nebo polopřímku. Elipsa degeneruje tak, že ohnisko  $S$  přejde v jeden krajní bod dráhy. Druhý krajní bod udává nejvyšší dostup tělesa. Příslušný průvodič má velikost — viz (10) —  $r = 2a =$   
 $= \frac{2}{\frac{2}{r_s} - \frac{v_s^2}{f}}$ , takže maximální dosažená výška nad Zemí (dostup) — viz



Obr. 7. Dostup (nad Zemí) tělesa vrženého svisle vzhůru ve výšce z nad Zemí rychlostí velikosti  $v_z$ .

také obr. 7 — je

$$Z = r - r_0 = \frac{2}{\frac{2}{r_z} - \frac{v_z^2}{f}} - r_0 \quad [\text{km}]. \quad (17)$$

Zvláštní postavení kruhové rychlosti se projeví i zde. Je-li totiž  $v_z = (v_z)_k$ , má nejvzdálenější bod dráhy podle (17) průvodič

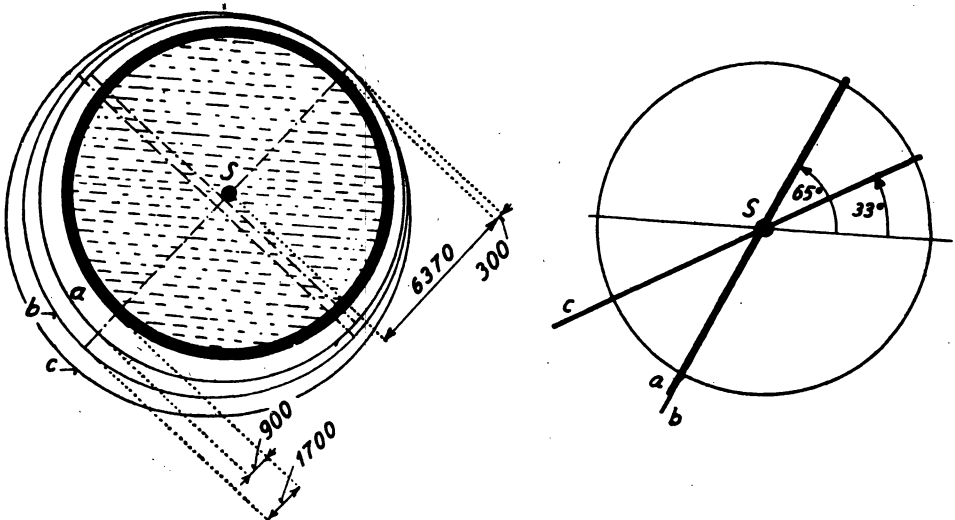
$$r = \frac{2}{\frac{2}{r_z} - \frac{f}{r_z f}} = 2r_z. \quad (18)$$

**Výsledek:** Je-li velikost rychlosti  $v_z$  při svislém vrhu vzhůru rovna právě kruhové rychlosti pro příslušnou výšku  $z$ , dostoupí těleso do vzdálenosti, jež je rovna právě dvojnásobku vzdálenosti místa vrhu od středu Země. Při vrhu s povrchu Země by těleso dostoupilo do výšky rovné poloměru Země. Viz také obr. 7.

#### 4. Oběžné doby

Při vyšetřování doby  $T$  potřebné k jednomu úplnému oběhnutí dráhy má zřejmě smysl jen případ eliptických (kruhových) drah. Na parabolické a hyperbolické dráze bude doba  $T$  nekonečně velká. Z definice plošné rychlosti vyplývá  $\frac{1}{2}qT = \pi ab$ ,  $T = \frac{2\pi ab}{q}$  [s]. Protože  $p = \frac{b^2}{a} = \frac{q^2}{f}$ , je také  $T = 2\pi a \sqrt{\frac{a}{f}}$  a po dosažení z (10) konečně

$$T = \frac{2\pi f}{\sqrt{\left(\frac{2f}{r_z} - v_z^2\right)^3}} \quad [\text{s}]. \quad (19)$$



Obr. 8. Porovnání drah se středovým průřezem Země ( $\alpha$ ) a sklony drah vzhledem k rovině zemského rovníku ( $\beta$ ) umělých družic: a) první sovětské, b) druhé sovětské, c) první americké.

Speciálně pro kruhovou rychlost dostaneme

$$T = \frac{2\pi r_s}{\sqrt{\frac{f}{r_s}}} = 9,944 \cdot 10^{-3} (r_s)_k^{3/2} \quad [\text{s}]. \quad (20)$$

### 5. Závěr

Dosud (do 30. 4. 1958) bylo vypuštěno šest družic Země. První sovětská dne 4. 10. 1957, druhá sovětská dne 3. 11. 1957, první americká dne 31. 1. 1958, druhá americká dne 17. 3. 1958, třetí americká družice dne 26. 3. 1958 a 3. sovětská družice dne 15. 5. 1958. Základní údaje, pokud souvisí s tematikou tohoto článku jsou v této tabulce (v. obr. 8):

	Perigeum	Apogeum	Sklon roviny dráhy k rovině rovníku
	bezprostř. po vypuštění, v km		
1. SSSR (Sputnik I) . . . . .	220	930	64,3°
2. SSSR (Sputnik II) . . . . .	240	1670	62,5°
3. USA (Explorer I) . . . . .	350	2550	32,8°
4. USA (Vanguard I) . . . . .	630	4000	35,0°
5. USA (Explorer III) . . . . .	180	2800	33,3°
6. SSSR (Sputnik III)* . . . . .	cca 185	cca 1880	cca 65°

Ze základního materiálu uvedeného v tomto článku by bylo možno odvozovat další vztahy a zajímavé závěry. K některým otázkám se vrátíme v jiném článku.

### Literatura

- [1] Hacer, B.: *Mechanika sluneční soustavy*, Jednota čs. matematiků a fysiků, Praha 1948.
- [2] Hostinský, B.: *Mechanika tuhých těles*, Jednota čs. matematiků a fysiků, Praha 1924.

\*) Údaje o perigen, apogen a sklonu roviny dráhy k rovině rovníku nebyly v době, kdy toto číslo šlo do tisku, ještě přesně proměřeny.