Petr Sergeevich Novikov

O matematické logice

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 5 (1960), No. 6, 629--643

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/137084

POKROKY MATEMATIKY, FYSIKY A ASTRONOMIE
ROČNÍK V — ČÍSLO 6

MATEMATIKA

O MATEMATICKÉ LOGICE

Otiskujeme zde překlad Úvodu k nedávno vyšlé knize П. С. Новиков, Элементы математической логики, *Moskva 1959* (P. S. Novikov, Elementy matematické logiky). *Sovětský matematik P. S. Novikov, jeden z předních světových badatelů v matematické logice, podává v této knize formou velmi přístupnou výklad o základech matematické logiky. Kniha obsahuje obsáhlejší* Úvod, *v němž autor pojednává o předmětu zkoumání, vzniku a vývoji matematické logiky. Předkládáme našim čtenářům, kteří se matematickou logikou dosud nezabývali, překlad tohoto Úvodu soudíce, že pro ně bude dobrou informací o této poměrně nové a rychle se rozvíjející matematické disciplíně.*

V současné matematice se široce používá tak zvané axiomatické metody. Lobačevského objev neeuklidovské geometrie ukázal veliký význam této metody. Do dnešní doby prošla axiomatická metoda složitým vývojem. Ve spojení s jinými myšlenkami dala vznik nejen novým metodám, ale i novým principům jak fysikálního tak matematického myšlení. Rozvoj axiomatické metody můžeme rozdělit do dvou období. Prvním je období od Lobačevského až k Hilbertovým pracím o základech matematiky[1]), druhé období tohoto vývoje trvá dodnes. Toto druhé období charakterisuje spojení myšlenek vzniklých při zkoumání základů geometrie se současně se vyvíjejícím vědním oborem, který se nazývá „symbolickou" nebo „matematickou" logikou. Vznikla tak nová vědecká disciplína, která se dnes běžně nazývá matematickou logikou.

Než pojednáme o matematické logice samé, všimneme si krátce původní axiomatické metody a pokusíme se alespoň zběžně objasnit příčiny vzniku a úkoly této metody. Podstata axiomatické metody spočívá ve zvláštním vymezování matematických objektů a vztahů mezi nimi. Předpokládejme, že při studiu systému nějakých objektů zavádíme pojmenování zkoumaných vlastností těchto objektů a vztahů mezi nimi. Při tom nedefinujeme objekty samy, ani jejich vlastnosti a vztahy, avšak vyslovíme o nich řadu tvrzení. Tato tvrzení potom ovšem ze všech možných systémů objektů, jejich vlastností a vztahů mezi nimi vydělují právě ty, pro něž tato tvrzení platí.

Vyslovenými tvrzeními tak vlastně vymezujeme třídy systémů objektů jistých vlastností a vztahy mezi těmito objekty.

Uveďme jednoduchý příklad, se kterým se často setkáváme. Uvažujme soustavu nějakých objektů, které označíme latinskými písmeny a vztah mezi

[1]) Viz D. Hilbert, *Grundlagen der Geometrie*, Leipzig und Berlin 1930, Dodatky VI – X. Ruský překlad: А. Гильберт, *Основания геометрии*, Moskva, Leningrad 1948.

nimi vyjádřený slovy „je před“. Aniž bychom definovali tyto objekty a vztah „je před“, vyslovíme o nich tato tvrzení:

1. Žádný objekt není sám před sebou.

2. Je-li x před y a y před z, potom je x před z.

Je zřejmé, že existují systémy objektů a takový vztah mezi nimi, pro který, vyjádříme-li jej slovy „x je před y“, platí právě vyslovená tvrzení.

Nechť např. objekty $x, y, \ldots$ jsou lidé a vztahem mezi nimi nechť je: „x je starší než y“. Znamená-li tedy „x je před y“, že „x je starší než y“, pak jistě platí tvrzení 1 a 2.

Tvoří-li systém objektů reálná čísla a znamená-li vztah „x je před y“, že „x je menší než y“, budou tvrzení 1 a 2 rovněž pravdivá.

Systémy objektů, v nichž je zaveden vztah, pro nějž platí tvrzení 1 a 2, tvoří jistou třídu; tvrzení 1 a 2 lze tedy pokládat za definici této třídy. Tvrzení, kterými takto vymezujeme systémy objektů, se nazývají axiomy. Jestliže pro nějaký systém objektů, jejich vlastnosti a vztahy platí jisté axiomy, říkáme, že takový systém vyhovuje soustavě těchto axiomů, nebo že je interpretací této soustavy axiomů.

Logickým odvozováním závěrů z axiomů získáme tvrzení, pravdivá pro každý systém objektů, který vyhovuje daným axiomům.

Významnější příklad axiomatického vymezení tvoří soustava axiomů geometrie. Zde se vyšetřuje systém objektů, jež jsou rozděleny na „body“, „přímky“ a „roviny“ a vztahy mezi nimi vyjádřeny slovy „bod leží na přímce“, „přímka leží v rovině“, „bod a leží mezi body b a c“ atd. V těchto vztazích nehledejme prostorový význam, který připomíná jejich slovní vyjádření. Místo toho budeme předpokládat, že jsou pro ně splněny jisté axiomy. Takový systém axiomů, známý pod názvem „systém axiomů euklidovské geometrie“, pochází od Hilberta. Nebudeme zde tyto axiomy uvádět. Najdeme je v knihách o základech geometrie. V tomto systému axiomů se postulují tvrzení, kterých se používá přímo či nepřímo při důkazech vět euklidovské geometrie. Logické důsledky těchto axiomů adekvátně vyjadřují vlastnosti euklidovského prostoru, o němž intuitivní představy vznikají bezprostřední zkušeností a existují odedávna v myslích lidí.

Je zřejmé, že axiomy jen přibližně vystihují předměty a vztahy reálného světa. Ptáme-li se např., zda fysikální prostor (objektivní realita) vyhovuje axiomům euklidovské geometrie, musíme nejdříve připsat fysikální smysl geometrickým termínům, vyskytujícím se v axiomech, jako např. „bod“, „přímka“, „rovina“ atd. Musíme tedy formulovat ty fysikální skutečnosti, které těmto termínům odpovídají. Axiomy se pak stanou fysikálními tvrzeními, která lze experimentálně prověřit. Teprve po takovém prověření je zaručena pravdivost těchto tvrzení s přesností, jakou zaručují měřicí přístroje.

Při vyšetřování axiomatických soustav vzniká řada otázek, které lze v některých případech řešit interpretacemi. Takovou otázkou je otázka bezespornosti soustavy axiomů. Musíme totiž mít vždy jistotu, že při odvozování logických důsledků axiomů dané soustavy axiomů nedospějeme ke sporu, tj. že nelze odvodit sobě si odporující tvrzení. Možnost odvození takových sporných tvrzení by totiž znamenala, že uvažované soustavě axiomů nemůže vyhovovat žádná soustava objektů, a že tedy takový systém axiomů nic nepopisuje. Bezespornost systému axiomů můžeme dokázat sestrojením interpretace (modelu) tohoto systému. Poznamenejme ještě, že až do objevů Hilbertových toto byla jediná metoda důkazu bezespornosti.

Analogická je otázka nezávislosti axiomů. Axiom se nazývá nezávislým v dané soustavě axiomů, není-li logicky odvoditelný z ostatních axiomů soustavy. Chceme-li dokázat nezávislost některého axiomu, stačí sestrojit systém objektů, splňující všechny axiomy kromě toho, jehož nezávislost chceme dokázat. Jinak řečeno nezávislost axiomů můžeme dokázat tak, že sestrojíme interpretaci soustavy axiomů, která vznikne z vyšetřované soustavy tak, že axiom, jehož nezávislost chceme dokázat, nahradíme jeho negací. Při používání axiomatické metody potřebujeme tedy znát objekty, jejich vlastnosti a vztahy mezi nimi, z nichž bychom mohli sestrojit potřebné interpretace.[2])

Ke konstrukci interpretací axiomatických systémů používáme matematických pojmů. Nejvydatnější zdroj pro konstrukce modelů axiomatických soustav poskytuje teorie množin.

Nemůžeme zde zabíhat do podrobného výkladu teorie množin. Ukážeme jen v nejobecnějších rysech, s jakými objekty se v ní pracuje. Výchozími objekty jsou přirozená čísla. Z množiny přirozených čísel můžeme použitím principů teorie množin sestrojit nové množiny a funkce. Ukážeme některé základní principy konstrukce množin.

1. Je-li dána množina objektů, můžeme z ní přesně formulovanou podmínkou vymezit některou její část. Např. množina všech prvočísel je částí množiny všech přirozených čísel.

2. Je-li dán systém množin, můžeme sestrojit novou množinu tím, že do ní zahrneme právě všechny prvky každé množiny daného systému.

3. Pro každou množinu je možné vytvořit množinu všech jejich podmnožin.

4. Předpokládejme, že nějakým předpisem je každému prvku množiny E přiřazen právě jeden prvek množiny G. Takové přiřazení nazýváme funkcí, definovanou na množině E a nabývající hodnot z množiny G. Funkce jsou opět objekty, z nichž můžeme sestrojovat množiny. Můžeme např. uvažovat množinu všech funkcí, definovaných na E a nabývajících hodnot z G.

Uvedené principy přirozeně zdaleka nevyčerpávají všechny prostředky konstrukce nových objektů teorie množin. Použitím teorie množin můžeme, vycházejíce od množiny přirozených čísel, sestrojit všechny významné matematické pojmy. Tak se konstruují i modely soustav axiomů.

Zde však vzniká otázka: je teorie množin dokonale spolehlivým základem axiomatické metody? Do jaké míry můžeme být přesvědčeni o bezespornosti teorie množin samé?

Tato rychle se rozvíjející disciplína vznikla koncem minulého století a měla ohromný vliv na matematiku a zvlášť velký význam při zkoumání základů matematiky. Již při vzniku teorie množin se ukázalo, že při neomezeném používání pojmů teorie množin dospíváme ke sporům. To však nezastavilo rozvoj teorie množin, neboť v těch mezích, ve kterých se užívaly její pojmy, se ke sporům nedospělo. Ani další studium základů teorie množin však nedalo uspokojivých podkladů k domněnce, že alespoň v rámci faktického používání myšlenek teorie množin nedojde ke sporům. Tvrzení o bezespornosti v rámci dosavadních konstrukcí teorie množin je tedy toliko empirickým závěrem, který nemá dostatečně pádných podkladů. Je proto třeba konstatovat, že nehledě na velmi úspěšné používání teorie množin v axiomatické metodě, jsou základy, na

[2]) Viz např. P. K. Raševskij, *Geometrie a její axiomatika*, v tomto časopise, V (1960), č. 5. *Pozn. překl.*

nichž teorie množin buduje, neuspokojivé. Vedle těchto potíží ukázala další kritika na podstatnou zvláštnost teorie množin, nebo lépe řečeno na zvláštnost matematického myšlení obecně, která se právě nejzřetelněji projevila v rozvíjení teorie množin. Jde o pojem nekonečna, což je jeden ze základních prvků matematického myšlení. Antická matematika velmi opatrně zacházela s pojmem nekonečna. Logickému rozboru, ač nedokonalému, byly podrobeny pojmy spojené s pojmem nekonečna. Máme zde na mysli známé antinomie „Achilles a želva", „letící šíp", „nekonečná dělitelnost" aj. Opatrnost se projevovala v požadavcích na velkou přesnost při používání nekonečna v matematických úvahách. Moderní matematická analysa od samého svého vzniku začala pod vlivem požadavků přírodních věd a techniky používat pojmu nekonečna daleko šířeji a s menší přesností. Díky tomu se tento pojem rychle a široce vyvíjel, měl velký význam v nejrůznějších vědních oborech a v praxi. Přitom tu a tam vznikaly potíže, které pokaždé vyvolaly kritiku příslušných pojmů analysy. Nejsilněji se tento kritický směr projevil ve svém posledním období, zejména v pracech **Kroneckera**, **Šatunovského**, **Borela**, **Luzina** a **Brouwera**. Forma nekonečna, která tvoří základ pojmů teorie množin, se nazývala „aktuální nekonečno". Popíšeme tento pojem nejdříve zhruba a logicky nedokonale a potom jej teprve vymezíme přesněji. Název „aktuální nekonečno" připisujeme nekonečnému souboru, o němž předpokládáme, že jeho konstrukce již byla provedena (dokončena), a jehož prvky jsou udány zároveň. S aktuálním nekonečnem bychom měli co činit, kdybychom např. efektivně vypsali všechna přirozená čísla. Kdyby bylo možné provést nekonečně mnoho ostře vzájemně oddělených úkonů, neexistovalo by v podstatě matematických problémů. Každý takový problém by se dal prostě řešit ověřením všech možných případů. Je tedy jasný idealisovaný charakter pojmu aktuálního nekonečna. Avšak konstruovat efektivně nekonečně mnoho objektů nebo provést nekonečně mnoho úkonů je nemožné, nikoli v důsledku nedostatku praktických prostředků, ale z důvodů principiálních to nelze provést nikdy a žádnými prostředky. Matematické myšlení však široce používá této idealisace, např. geometrický útvar si představujeme jako nekonečnou množinu bodů, časový interval jako nekonečnou množinu okamžiků, pohyb jako nekonečnou množinu oddělených poloh pohybujícího se tělesa atd.[3])

Konkrétně se projevuje pojem aktuálního nekonečna v rozšíření logických principů platných pro konečné soubory na soubory nekonečné. Takovým principem je např. zákon vyloučeného třetího (*tertium non datur*), který se obyčejně formuluje takto: je-li $\mathfrak{A}$ nějaké tvrzení a značí-li $\overline{\mathfrak{A}}$ jeho negaci, je z těchto dvou tvrzení právě jedno pravdivé. Předpokládejme, že $\mathfrak{A}$ je tvrzením o objektech nekonečné množiny, na př. o všech přirozených číslech. Kdybychom byli schopni provést nekonečně mnoho úkonů, v našem případě nekonečně mnoho prověření, snadno bychom mohli určit, zda je pravdivé $\mathfrak{A}$ nebo $\overline{\mathfrak{A}}$. Předpoklad, že lze o každém tvrzení $\mathfrak{A}$ prověřit, zda je pravdivé nebo zda je pravdivá jeho negace, obsahuje tedy v sobě aspoň částečně hypothesu o možnosti provedení nekonečně mnoha úkonů (prověření). Stejnou úlohu má v teorii množin absolutní chápání slova „existuje", aplikujeme-li je na nekonečné množiny. Pro teorii množin jsou charakteristické tzv. existenční důkazy, v nichž se existence nějakého objektu dokazuje, aniž se tento objekt sestrojí. Takové důkazy se často opírají o zákon vyloučeného třetího.

[3]) Viz také D. P. **Gorskij**, *Idealisace a abstrakce*, v tomto čísle. *Pozn. překl.*

Proveďme příklad takového důkazu. Sestrojme nekonečnou posloupnost přirozených čísel $\{a_n\}$ v závislosti na desetinném rozvoji čísla $\pi = 3{,}14\ldots$. Je-li na n-tém místě v desetinném rozvoji čísla π nula, položíme $a_n = 0$. Členy posloupnosti $a_1, a_2, \ldots, a_{r-1}$, kde r je první index, pro nějž $a_r = 0$, položíme rovny jedné. Potom následují členy (aspoň jeden), které jsou rovny nule. Načež všechny další členy až do nejbližšího dalšího nulového členu položíme rovny dvěma. Následují opět nulové členy (aspoň jeden); všechny další členy opět až k nejbližšímu dalšímu nulovému členu položíme rovny třem atd. Obecně: je-li člen před nějakým nulovým členem (nebo skupinou nulových členů) roven přirozenému číslu k, následuje za ním (nebo za touto skupinou) člen, který je roven přirozenému číslu $k + 1$. Získáme tak posloupnost tvaru

$$1, \ldots, 1, 0, 2, \ldots, 2, 0, \ldots, k, \ldots, k, 0, \ldots, 0, k + 1, \ldots$$

Dokážeme nyní, že v této posloupnosti se aspoň jedno přirozené číslo opakuje nekonečně mnohokrát. Skutečně, v desetinném rozvoji čísla π se objevuje buď konečně nebo nekonečně mnoho nul. V prvním případě existuje tedy největší index n takový, že $a_n = 0$. Všechny členy posloupnosti s indexem větším než n jsou tedy rovny témuž přirozenému číslu, jež se tedy v této posloupnosti opakuje nekonečně mnohokrát. V druhém případě, tj. obsahuje-li desetinný rozvoj čísla π nekonečně mnoho nul, obsahuje i naše posloupnost přirozeně nekonečně mnoho nul; nula je tedy potom oním přirozeným číslem, jež se v naší posloupnosti opakuje nekonečně mnohokrát. Tím je tedy dokázána existence nekonečně mnohokrát se opakujícího přirozeného čísla v naší posloupnosti. Avšak na otázku, které je toto číslo, odpovědět nedovedeme, neboť nevíme, zda desetinný rozvoj čísla π obsahuje konečně nebo nekonečně mnoho nul. Není ani vůbec známo, jakým způsobem by se toto dalo rozhodnout. Máme tedy před sebou důkaz existence jistého objektu, aniž tento objekt dovedeme udat. Tato skutečnost zřejmě souvisí s pojmem aktuálního nekonečna. Uvažujeme-li pouze konečné soubory, můžeme dokázanou existenci jistého objektu efektivně prověřit přezkoušením všech možných případů.

Takové příklady mohou na prvý pohled vést k domněnce, že pojem aktuálního nekonečna neodpovídá skutečnosti. To však jen podtrhuje aproximativní charakter vztahů matematických pojmů k objektivní realitě. Aktuální nekonečno může být používáno v rozumných mezích právě tak jako mnoho jiných idealisovaných pojmů. Vznikly však ještě další potíže souvisící s pojmem nekonečna. Položíme-li otázku, zda vede myšlenka aktuálního nekonečna ke sporu, dá se na tuto otázku dnes sotva odpovědět, arci jen to, že zatím spor objeven nebyl.

I když přijmeme hypothesu, že používání aktuálního nekonečna v teorii množin nevede ke sporu, neodstraníme tím všechny potíže v této teorii. Objevuje se hned druhý problém: je každý matematický problém řešitelný použitím teorie množin? Taková hypothesa o řešitelnosti každého problému prostředky teorie množin zdá se být přece jen nepravděpodobná. Avšak pro důkaz pravdivosti takového tvrzení nutno mít příslušné prostředky. Mohli bychom se pokusit řešit uvedené otázky axiomatickou metodou. K tomu by bylo zapotřebí všechny předpoklady, z nichž se v teorii množin činí logické závěry, vhodně formulovat jako axiomy a pokusit se pro takto získanou soustavu axiomů rozřešit problém bezespornosti. Otázka řešitelnosti zde přirozeně vede k problému nezávislosti, neboť dokázat, že daný problém není řešitelný v teorii množin znamená, že odpovídající tvrzení ani jeho negace není odvoditelné z axiomů teorie množin. Sestrojit soustavu axiomů, vymezujících teorii množin v rozsahu běžném, sice lze, avšak řešení problému bezespornosti a nezávislosti pro tuto soustavu axiomů naráží na podstatné obtíže. To spočívá v tom, že zde selhává metoda interpretací, neboť právě interpretace pro soustavy aixomů se sestrojují na základě teorie množin, jejíž bezespornost je nutno při tom předpokládat.

Jako východisko z těchto potíží předložil Hilbert nové hledisko na tyto otázky. Hilbertovy myšlenky se staly přelomem v otázkách bádání o základech matematiky a zároveň počátkem nového období v rozvoji axiomatické metody. Základní otázka vypadá takto: do jaké míry je nutno při řešení problému bezespornosti a nezávislosti výlučně používat metody interpretací? Je možné se při řešení těchto otázek obejít bez interpretací?

Předpokládejme, že je dána nějaká soustava axiomů, pro niž máme řešit problém bezespornosti. Jak jsme již řekli, nazýváme takovou soustavu spornou (tj. nikoli bezespornou), lze-li z ní odvodit nějaké tvrzení $\mathfrak{A}$ zároveň s jeho negací $\overline{\mathfrak{A}}$. Pro důkaz, že daná soustava je sporná, stačí tedy najít výrok $\mathfrak{A}$, který je současně se svou negací odvoditelný z dané soustavy axiomů. Dokázat bezespornost soustavy axiomů znamená tedy dokázat, že neexistuje takové tvrzení, které by bylo zároveň se svou negací odvoditelné z daných axiomů. Kdybychom byli schopni vymezit všechna tvrzení, vztahující se k dané soustavě axiomů, a všechny možné způsoby dedukce, mohli bychom zřejmě také rozhodnout, zda se dá či nedá nějaké tvrzení a jeho negace odvodit z daných axiomů. Stejně můžeme přistoupit i k otázce nezávislosti axiomů. Dokázat, že tvrzení $\mathfrak{A}$ nezávisí na axiomech $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_n$ znamená totiž dokázat, že tvrzení $\mathfrak{A}$ není odvoditelné z axiomů $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_n$. Na druhé straně se může stát, že vymezení všech možných tvrzení a principů odvození nevyžaduje příliš silných prostředků teorie množin, vedoucích k pochybnostem, jako např. aktuální nekonečno. Vymezení všech možných forem dedukce je možné a bylo v podstatě již provedeno v začátcích rozvoje symbolické logiky. Avšak v otázkách bezespornosti se objevily nové potíže. Dospělo se jakoby k mrtvému bodu, a to právě dalo vznik novým směrům v rozvoji axiomatické metody. Ač tyto potíže jsou vážné, našly se možnosti k jejich překonání a skutečně se postupně překonávají.

Pro naše další úvahy musíme tedy mít zcela spolehlivý (co do bezespornosti) okruh pojmů a principů myšlení. Abychom ze základního okruhu pojmů vyloučili všechny pochybné elementy teorie množin, je přirozené tento okruh co možná nejvíce zúžit. Nelze však se úplně obejít bez pojmu nekonečna. Za to je však zcela možné zpřesnit jeho „aktuální“ charakter. Pojem aktuálního nekonečna figuroval ve filosofii dávno před vznikem zde popsaných prací o základech matematiky a jako protiklad k tomuto pojmu se uvažovalo o nekonečnu jiného druhu, známém pod názvem potenciální nekonečno. Smysl tohoto pojmu spočívá v tom, že se uvažuje nekonečná množina uskutečnitelných možností. Každá z nich odděleně je uskutečnitelná, rovněž každý konečný počet těchto možností je uskutečnitelný, avšak všechny zároveň uskutečnitelny nejsou. Vezměme příklad. Přirozené číslo budeme považovat za uskutečnitelné, lze-li udat jakoukoli množinu objektů, jejichž počet je vyjádřen právě tímto číslem. Takto lze tedy ke každému přirozenému číslu principiálně udat odpovídající množinu. Rovněž je možno to učinit pro každý konečný počet přirozených čísel. Avšak nelze to provést pro všechna přirozená čísla najednou.

K pochybování o oprávněnosti používání pojmu potenciálního nekonečna není za současného stavu vědy žádných rozumných důvodů. Bez takového druhu nekonečna se neobejde nejen matematika, ale žádné přesné zkoumání. Také kritika základů matematiky se v žádném případě nevztahuje k tomuto pojmu. Myšlenka potenciálního nekonečna tvoří jeden ze základů Hilbertovy koncepce.

Pojednáme nyní poněkud podrobněji o základních principech Hilbertovy teorie. Jde o tyto dvě úlohy:

1. Najít soubor pojmů a principů bez použití pochybných částí teorie množin.

2. V rámci tohoto souboru pojmů a principů položit otázku bezespornosti a nezávislosti pro každý systém axiomů, speciálně i pro systém axiomů teorie množin.

Kdyby se touto cestou dala řešit otázka bezespornosti a nezávislosti, získali bychom tak i možnost odůvodnit používání aktuálního nekonečna a stanovit omezení, za kterých to lze. Začneme s první úlohou, tj. sestrojením soustavy pojmů a principů, vyhovující uvedeným požadavkům.

Budeme vyšetřovat systémy, které jsou tvořeny z konečného počtu prvků, jistých vlastností těchto prvků a vztahů mezi nimi. Nezáleží nám zatím na kvalitě těchto prvků, vlastností a vztahů. Žádáme toliko, aby tyto prvky byly vzájemně dobře odlišitelné a totéž o jejich vlastnostech a vzájemných vztazích mezi nimi. Dále pro každou vyznačenou vlastnost a vztah musí být vymezeno, pro které z prvků platí a pro které nikoli. Vezměme příklad:

1. Je dán řádek písmen a cifer

$$a2c45e3\,.$$

U prvků tohoto řádku budeme uvažovat tyto dvě vlastnosti: 1) být cifrou; 2) být písmenem; a jeden vztah mezi dvěma prvky x, y, totiž „prvek x je v řádku umístěn před prvkem y“.

2. Uvažujme systém koulí, jehož prvky jsou tři koule bílé a čtyři koule černé, přičemž žádné dvě z těchto koulí nemají stejný průměr. Barvy koulí jsou voleny tak, aby při jejich uspořádání podle velikosti, od nejmenší k největší, se střídaly barvy takto: bílá, černá, bílá, černá, černá, bílá, černá. Vyznačenou vlastností v tomto systému bude barva koule. Vyznačeným vztahem mezi dvěma koulemi x a y nechť je: průměr koule x je menší než průměr koule y.

3. Systém se skládá z kovových kroužků. Jediný vyznačený vztah mezi kroužky nechť spočívá v tom, že jeden kroužek lze navléknout na druhý.

Uvažujíce systémy, budeme abstrahovat od kvality jejich elementů, vyznačených vlastností a vztahů. Dva systémy nazveme isomorfními, jestliže mezi jejich elementy existuje taková vzájemně jednoznačná korespondence, při níž vyznačeným vlastnostem (vztahům) prvků jedné soustavy odpovídají vyznačené vlastnosti (vztahy) odpovídajících prvků soustavy druhé. Snadno zjistíme, že ze shora uvedených systémů jsou první dva isomorfní. Vzájemně isomorfní systémy nebudeme rozlišovat. To znamená, že nevyšetřujeme v podstatě konkrétní systémy, ale třídy systémů. Každá třída obsahuje všechny vzájemně isomorfní systémy, přičemž každý z nich můžeme považovat za representanta třídy; musíme však přitom pracovat pouze s takovými výroky, které mají smysl pro každý systém takové třídy.

Ukážeme, jak lze sestrojit representanta třídy. Stačí vzít libovolnou množinu s odpovídajícím počtem prvků:

$$x_1, x_2, \ldots, x_n .$$

Podmnožiny prvků, majících vyznačené vlastnosti, označíme:

$$\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_{m_1} .$$

Nyní utvoříme množiny $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \ldots, \mathbf{B}_{m_2}$, uspořádaných dvojic prvků (x_i, x_j), které odpovídají dvoučlenným vyznačeným vztahům. Podobně tvoříme množiny uspořádaných trojic (x_i, x_j, x_k), které odpovídají vyznačeným trojčlenným vztahům a tak pokračujeme, až vyčerpáme všechny vyznačené vztahy, takže nakonec např. sestrojíme množiny uspořádaných s-tic prvků

$$\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \ldots, \mathbf{U}_{m_s} ,$$

které odpovídají všem vyznačeným s-členným vztahům. Za representanta třídy můžeme nyní považovat souhrn symbolů $x_1, x_2, \ldots, x_n$, s vyznačenými vlastnostmi $\mathbf{A}_i$ a vyznačenými vztahy $\mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{U}_{m_s}$.

V dalším budeme pracovat jen s třídami systémů, jejichž vyznačené vztahy jsou pouze dvoučlenné. V mnohých případech se omezíme jen na takové třídy, jejichž representanta lze zapsat jako řádek symbolů tak, že vyznačený vztah je udán pořadím symbolů v tomto řádku a prvky jsou symboly samy. Např.

$$\alpha\beta\gamma .$$

Zde vyznačený vztah vypadá takto: α je před β, β je před γ, α je před γ. Pro všechny ostatní dvojice neplatí vztah „je před". Budeme používat také řádky, v nichž se některý symbol opakuje několikrát. Na příklad:

$$aabacddc ;$$

to znamená, že zároveň nepřímo zavádíme speciální vyznačenou vlastnost: „být prvkem a", „být prvkem b", atd. Dva prvky, právě uvedené vlastnosti, nazveme stejnými.

Každou třídu isomorfních systémů nazveme krátce konfigurací. Uveďme příklady konfigurací.

1. Každé přirozené číslo n můžeme považovat za konfiguraci obsahující n prvků[4]). V této konfiguraci nejsou zavedeny vyznačené vlastnosti a vztahy. Všichni representanti takové konfigurace mají stejný počet prvků, jsou isomorfní a proto takovou konfiguraci můžeme považovat za definici „počtu prvků".

2. Konfiguraci tvoří n prvků s jedinou vyznačenou relací vyjádřenou slovy „x je před y". Přitom axiomy vymezující tento vztah jsou výše uvedené axiomy uspořádání spolu s třetím axiomem:

je-li x různé od y, potom je buď „x před y" nebo „y před x".

Snadno nahlédneme, že representantem takové konfigurace je řádek

$$x_1x_2 \ldots x_n ,$$

v němž vztah „x je před y" znamená: „x stojí v tomto řádku vlevo od y".

---

[4]) tj. representant této konfigurace obsahuje n prvků. *Pozn. překl.*

Dále zavedeme konstruktivní třídy konfigurací a konstruktivní operace nad konfiguracemi. Příslušné definice musí vyhovovat těmto požadavkům: O každém prvku konstruktivní třídy se musí dát podle definice principiálně, souborem efektivně proveditelných úkonů, ověřit, že k této třídě náleží. Nechť konstruktivní operace $\mathscr{T}$ $(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \dots, \mathfrak{A}_n)$ přiřazuje n-tici konfigurací $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \dots$ $\dots, \mathfrak{A}_n$ konfiguraci $\mathfrak{B}$. Při tom operace $\mathscr{T}$ $(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \dots, \mathfrak{A}_n)$ musí být definována tak, aby konstrukce konfigurace $\mathfrak{B}$ z konfigurací $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \dots, \mathfrak{A}_n$ byla principiálně proveditelná.

Poznamenejme, že v některých případech nemusí být konstruktivní operace $\mathscr{T}$ $(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \dots, \mathfrak{A}_n)$ definována pro libovolné konfigurace $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \dots, \mathfrak{A}_n$, nýbrž jen pro konfigurace z jisté třídy. Dále pro $i \neq k$ mohou konfigurace $\mathfrak{A}_i$, $\mathfrak{A}_k$, pro něž je definována operace $\mathscr{T}$, náležet do různých tříd.

Nejjednodušší příklady konstruktivních tříd konfigurací tvoří přirozená čísla nebo výše uvažované řádky.

Pro řádky definujeme operaci $\mathscr{S}$ $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$: provést operaci $\mathscr{S}$ nad řádky $\mathfrak{A}$ a $\mathfrak{B}$ znamená připsat řádek $\mathfrak{B}$ vpravo k řádku $\mathfrak{A}$. Prvky konfigurace $\mathscr{S}$ $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ jsou všechny prvky konfigurace $\mathfrak{A}$ a všechny prvky konfigurace $\mathfrak{B}$. V konfiguraci $\mathscr{S}$ $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ je uspořádání zavedeno takto: předně každý prvek konfigurace $\mathfrak{A}$ je před libovolným prvkem konfigurace $\mathfrak{B}$; za druhé je-li prvek x před prvkem y v konfiguraci $\mathfrak{A}$ resp. $\mathfrak{B}$, je x před y i v konfiguraci $\mathscr{S}$ $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$. Je-li konfigurace $\mathfrak{A}$ representovatelná řádkem

$$x_1x_2 \dots x_n$$

a konfigurace $\mathfrak{B}$ řádkem

$$y_1y_2 \cdots y_m \,,$$

je konfigurace $\mathscr{S}$ $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ zřejmě representovatelná řádkem

$$x_1x_2 \dots x_n \, y_1y_2 \cdots y_m \,.$$

Místo $\mathscr{S}$ $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ napíšeme stručně $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$. Konstruktivní charakter této operace je zřejmý. Touto operací získáme vycházejíce od jednoprvkových konfigurací jakoukoli konfiguraci representovatelnou řádkem.

Jiným příkladem konstruktivní operace je operace

$$\mathscr{R} \, (\mathfrak{A}, a, \mathfrak{B}) \;;$$

provést tuto operaci znamená v řádku $\mathfrak{A}$ všude nahradit písmeno a řádkem $\mathfrak{B}$.

Operace $\mathscr{R}$ $(\mathfrak{A}, a, \mathfrak{B})$, jíž se často používá, se nazývá „pravidlo substituce". Použijeme ji hned k definici poněkud složitější operace

$$\mathscr{T} \, (\mathfrak{A}, a, \mathfrak{B}, n) \;;$$

a je libovolný prvek, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ jsou řádky a n značí přirozené číslo. Tato operace se definuje takto:

konfigurace $\mathscr{T}$ $(\mathfrak{A}, a, \mathfrak{B}, 1)$ je shodná s konfigurací $\mathscr{R}$ $(\mathfrak{A}, a, \mathfrak{B})$;

konfiguraci $\mathscr{T}$ $(\mathfrak{A}, a, \mathfrak{B}, 2)$ dostaneme, nahradíme-li všude v řádku $\mathscr{T}$ $(\mathfrak{A}, a, \mathfrak{B}, 1)$ písmeno a řádkem $\mathfrak{B}$, tj. konfigurace $\mathscr{T}$ $(\mathfrak{A}, a, \mathfrak{B}, 2)$ je shodná s konfigurací $\mathscr{R}$ $[\mathscr{T}(\mathfrak{A}, a, \mathfrak{B}, 1)\, a, \mathfrak{B}]$.

Analogicky sestrojíme konfiguraci $\mathscr{T}$ $(\mathfrak{A}, a, \mathfrak{B}, 3)$ pomocí konfigurace $\mathscr{T}$ $(\mathfrak{A}, a, \mathfrak{B}, 2)$, atd.

Pro konfiguraci $\mathscr{T}$ $(\mathfrak{A}, a, \mathfrak{B}, n)$, $n > 1$, můžeme tedy napsat tuto rekurentní formuli:

$$\mathscr{T}\ (\mathfrak{A}, a, \mathfrak{B}, n) = \mathscr{R}\ [\mathscr{T}(\mathfrak{A}, a, \mathfrak{B}, n - 1), a, \mathfrak{B}]\ .$$

Snadno nahlédneme konstruktivní charakter i této operace.

Konfigurace, konstruktivní třídy konfigurací, jakož i konstruktivní operace tvoří právě onen okruh pojmů, který je základem všech dalších konstrukcí. Na tyto pojmy neredukovatelné pojmy vyloučíme. Abychom vyloučili používání aktuálního nekonečna, musíme učinit ještě další omezení. Třídy konfigurací, jež jsme již zavedli, mohou být obecně nekonečné a kdybychom na ně používali takových logických principů jako je např. zákon vyloučeného třetího, zbavili bychom pojem nekonečna potenciálního charakteru. Stanovíme nyní přípustné logické a matematické principy. Pracujeme-li pouze s jednou nebo konečným počtem konfigurací, neklademe na úvahy, jež se smí týkat pouze prvků těchto konfigurací, jejich vlastností a vztahů mezi nimi, žádných omezení. V úvahách, v nichž se používá pojmu nekonečna, vyloučíme z obecných logických principů zákon vyloučeného třetího. Ostatní logické principy používáme bez omezení. Speciálně připustíme i zákon sporu. Tento zákon, jak známo, tvrdí, že žádný výrok nemůže být pravdivý zároveň se svou negací. Následkem toho i některé formy nepřímých důkazů (důkazů sporem) zůstávají v okruhu přípustných úvah v platnosti. Pojem „existence“ budeme používat ve smyslu „možnost konstrukce“. Z matematických principů podržíme axiom úplné indukce. Použití tohoto principu totiž souvisí s konstruktivními definicemi. Předpokládejme, že jsme definovali nějaký soubor objektů, vycházejíce od udaných výchozích objektů pomocí jistých operací (jimiž lze sestrojit každý objekt daného souboru). Takovým způsobem se např. vymezují konstruktivní třídy. Pro takový případ použití vypadá formulace principu úplné indukce takto: nechť nějaké tvrzení platí pro výchozí objekty daného souboru; nechť platnost tohoto tvrzení pro prvek, jež je výsledkem libovolné z daných operací, plyne z platnosti tohoto tvrzení pro objekty, na něž tato operace byla provedena; potom toto tvrzení platí pro všechny objekty daného souboru.

Tento princip použijeme jak pro konstruktivní třídy tak pro konstruktivní operace. O jeho korektnosti vzhledem k pojmu potenciálního nekonečna nemůže být pochyb. Právě popsaný okruh pojmů a principů uvažování tvoří určitý systém myšlení. Úvahy a konstrukce prováděné v rámci tohoto systému nazveme konstruktivními nebo finitními a celý systém nazveme Hilbertovým finitismem.

Přejdeme nyní k druhé úloze: v rámci tohoto systému, tj. použitím toliko uvedených pojmů a principů, formulovat problém bezespornosti a nezávislosti pro libovolný systém axiomů. Kdybychom podrželi dřívější stanovisko, tj. kdybychom se snažili pro daný systém axiomů sestrojit interpretaci v rámci finitismu, značně bychom omezili naše možnosti, neboť finitismus poskytuje velmi slabý prostředek pro konstrukci interpretací již nejjednodušších systémů axiomů. Hilbert přistupoval k soustavě axiomů z jiného hlediska. Axiomy jsou totiž jistými výroky a výroky, ať mají jakýkoli smysl, vždy tvoří jistá spojení termínů, případně symbolů. Logické odvozování potom vlastně znamená, že přecházíme od jednoho spojení k jinému spojení. Tak vzniká přirozeně otázka, zda nelze operace dedukce nad výroky považovat za mechanismus v pojmech finitního systému myšlení. Přesněji: je možné všechny výroky nějakého matematického oboru považovat za konfigurace a používaná logická pravidla za konstruktivní operace?

Je-li tomu tak, lze každý systém axiomů považovat za soubor jistých konfigurací a všechny z tohoto systému axiomů odvoditelné důsledky za konstruktivní třídu konfigurací. Ukázalo se, že taková representace výroků a logických pravidel je možná.

Předpokládejme, že máme definovánu třídu konfigurací, representující jistý okruh výroků, a v ní vymezeny jisté konfigurace, které nazveme axiomy. Kromě toho nechť jsou vymezeny konstruktivní operace representující pravidla logického odvozování. Takový systém potom nazveme formalismem, formálním logickým systémem, deduktivním kalkulem nebo prostě kalkulem. Názvy „formalismus" a „kalkul" budeme považovat za synonyma. Každý výrok formalismu nazveme formulí. Operace representující logické odvozování nazveme pravidla odvozování. Axiomy a formule, získané z axiomů použitím pravidel odvozování, nazveme odvoditelnými formulemi v daném formalismu (v daném kalkulu). Někdy takové formule budeme nazývat pravdivými v daném kalkulu. Ve formalismu mohou figurovat i konfigurace, jež nejsou formulemi, jež se však ve formulích objevují a používají při definici formulí. Tvrzení, že nějaká konfigurace je odvoditelná, nazveme formální větou a faktickou konstrukci odvoditelné formule pomocí pravidel odvozování formálním důkazem.

Problém bezespornosti v takových kalkulech se týká přirozeně formulí, pro něž je zavedena formální negace, což znamená, že jistým formulím je přiřazena formule, která se nazývá jejich negací. Formalismus (kalkul) nazveme sporným, jestliže v něm je odvoditelná každá formule (tj. tedy každá formule i její negace). Problém nezávislosti axiomů formalismu vypadá takto: je daný axiom ve formalismu odvoditelný ze systému axiomů, který vznikl z původního systému axiomů vynecháním tohoto axiomu? Krátce: je daný axiom, jehož nezávislost chceme dokázat, odvoditelný z ostatních axiomů?

Vyšetřování formalismů v rámci finitismu tvoří tzv. metalogiku. Je nutno ostře odlišovat logické závěry při důkazech různých tvrzení o kalkulech od formálních důkazů v samém kalkulu, jež jsou representovány operacemi nad konfiguracemi a toliko jako takové se smí chápat. Symboly, jež nepatří do skupiny symbolů, z nichž jsou tvořeny konfigurace, a jež jsou zavedeny k označování pojmů, týkajících se kalkulů, se často nazývají metalogickými symboly. Analogicky se hovoří o metalogických úvahách.

Poznamenejme ještě, že omezení, o kterých jsme pojednávali při popisu Hilbertova finitismu, se nevztahují na pojmy a odvození uvnitř kalkulů samých. Tato omezení (speciálně omezené používání zákonu vyloučeného třetího) se týkají toliko prostředků vymezení formalismu a úvah o formalismech.

Ukažme příklad kalkulu. Nejdříve vymezíme systém výroků, majících skutečný obsah (tj. nikoli formálních). Za takové výroky vezměme výroky o číslech (lhostejno zda jde o čísla přirozená, reálná či komplexní). Malé latinské písmeno nechť vždy označuje libovolné číslo. Tato písmena nazveme proměnnými, nabývajícími číselných hodnot. Uvažujme operaci sčítání a násobení a rovnost mezi čísly. Použijeme pro ně obvyklého označení. Vypíšeme základní rovnosti, jež platí pro libovolné hodnoty, které mohou v nich se vyskytující proměnné nabývat:

1. $a = a$,
2. $a + (b + c) = (a + b) + c$,
3. $ab = ba$
4. $(ab)\, c = a(bc)$,
5. $(a + b)\, c = ac + bc$.

Z těchto rovností můžeme odvozovat další, používajíce těchto dvou principů:

1. Ve správné rovnosti lze každou proměnnou, všude tam kde se vyskytuje, nahradit libovolným číselným výrazem, sestrojeným z libovolných proměnných;
2. v každé správné rovnosti lze libovolný číselný výraz zaměnit výrazem jemu rovným.

Formalisujme nyní tento systém, tj. sestrojme tento systém representující formalismus. Definujme nejdříve konfigurace odpovídající číselným výrazům a rovnostem. Konfigurace se budou skládat z prvků vyznačených těmito symboly:

1. malá latinská písmena $a, b, \ldots, x, y, \ldots$;
2. dvojice závorek (,);
3. znaky $=$, $+$.

Každou konfiguraci, odpovídající číselnému výrazu, nazveme termem. Termy definujeme takto:
každé malé latinské písmeno je termem;
jsou-li α a β termy, potom $(\alpha + \beta)$ a $(\alpha\beta)$ jsou také termy.

Tím je definována konstruktivní třída řádků, jež nazýváme termy. Podle naší definice jsou termy konfigurace, jež representují číselné výrazy i co do zápisu, jedině s tím rozdílem, že složitější termy se objevují v závorkách, např.:

$$(a + b),\ ((a + b)\ c) \text{ atd.}$$

Smluvíme se, že pro stručnost nebudeme psát vnější závorky.
Rovnosti zavedeme jako řádky tvaru

$$\alpha = \beta\,,$$

kde α a β jsou libovolné termy.
Formulemi našeho formalismu jsou rovnosti. Term není formulí, neboť neodpovídá výroku, nýbrž číslu.

Za axiomy našeho formalismu použijeme výše napsaných formulí 1—5. Považujíce axiomy za výchozí pravdivé (čili odvoditelné) formule, získáme všechny ostatní odvoditelné formule použitím pravidel odvozování našeho formalismu, tj. pomocí jistých konstruktivních operací.
Zavedeme tato dvě pravidla odvozování:

I. Je-li $\mathfrak{A}(a)$ odvoditelnou rovností obsahující písmeno a, a β libovolný term, potom i rovnost $\mathfrak{A}(\beta)$ vzniknuvší z $\mathfrak{A}(a)$ nahrazením písmena a všude, kde se v $\mathfrak{A}(a)$ objeví, termem β, je odvoditelná.

Tato operace nahrazování je operací typu $\mathscr{R}(\mathfrak{A}, a, \mathfrak{B})$, o níž jsme pojednali výše a kterou jsme nazvali pravidlem substituce. Víme také že to je konstruktivní operace.

II. Je-li $\mathfrak{A}(\alpha)$ odvoditelnou rovností, α v ní se vyskytující term, a je-li dále $\alpha = \beta$ rovněž odvoditelnou rovností, potom rovnost $\mathfrak{A}(\beta)$, vzniknuvší nahrazením v $\mathfrak{A}(\alpha)$ termu α termem β, je rovněž odvoditelná.

Operace nahrazování jednoho termu termem jiným je rovněž konstruktivní. Její finitně proveditelný charakter je zřejmý. Zavedením axiomů a pravidel odvozování jsme tak definovali třídu odvoditelných rovností. Vidíme tedy, že systém axiomů pro operace s čísly můžeme chápat zcela formálně. To znamená, že můžeme abstrahovat od konkrétního obsahu těchto axiomů a považovat je prostě za řádky prvků a pravidla logického odvozování, za operace nad těmito řádky. Jestliže tento formalismus budeme chápat isolovaně, nepřihlížejíce k jeho vnějšímu významu, bude se nám jevit jako formálně definovaný systém, skládající se ze souboru řádků, z jakýchsi důvodů nazývaných rovnostmi. Z nich jsou potom vyděleny jisté řádky, jež se nazývají odvoditelnými rovnostmi; tyto se získají z několika vybraných řádků použitím jistých operací.

Pro tento formalismus nemá otázka bezespornosti smysl, neboť v něm není zavedena negace. V jistém smyslu analogická otázka, totiž zda náš formalismus je „prázdný", má smysl. Formalismus nazveme „prázdným", je-li v něm odvoditelná každá rovnost. (Analogie tohoto pojmu s pojmem bezespornosti spočívá v tom, že, jak dále uvidíme, v každé sporné soustavě, obsahující obvyklé logické principy, jsou odvoditelné všechny formule.) Snadno se dokáže, že náš formalismus není prázdný. Formule $a = b$, totiž není v něm odvoditelná. To nahlédneme snadno, uvědomíme-li si původní význam tohoto formalismu. Kdyby totiž řádek $a = b$ byl pravdivý ve formálním smyslu, musela by být číselná rovnost pravdivá pro každá dvě čísla a a b, což ovšem není. Takový důkaz je však cizí našemu formalismu, neboť v něm uvažované řádky a operace s nimi nikde neobsahují pojem čísla. Přesněji řečeno, nedostatek tohoto důkazu spočívá v tom, že se opírá o předpoklad bezespornosti číselné soustavy, pomocí níž sestrojujeme interpretaci. Avšak tuto interpretaci lze sestrojit tak jednoduchou, že otázka bezespornosti se stává triviální.

Všimněme si ještě další otázky, totiž zda v našem formalismu existuje neodvoditelná formule taková, že jejím přidáním k původní soustavě axiomů, jakožto nový axiom, získáme opět neprázdný systém. S takovými otázkami se často setkáváme. Přidáme-li k soustavě axiomů 1—5 neodvoditelnou formuli $a = b$, dostaneme systém prázdný. Jestliže totiž podle pravidla substituce nahradíme a a b libovolnými termy, vidíme, že každá rovnost $\alpha = \beta$ je v takovém systému odvoditelná. Přidáme-li však k systému axiomů 1—5 rovněž neodvoditelnou formuli

$$ab + c = (a + c)(b + c),$$

získáme neprázdný systém. Neodvoditelnost poslední formule plyne z toho, že představuje nesprávnou rovnost mezi čísly. Avšak pro tento nový systém snadno najdeme jinou interpretaci. Proměnné $a, b, c, \ldots$ budeme považovat za konečné množiny (včetně množiny prázdné), výraz $(\alpha + \beta)$ jako množinové sjednocení množiny α a množiny β, tj. jako množinu všech prvků patřících do množiny α nebo do množiny β, a výraz $(\alpha\beta)$ za množinový průnik množin α a β, tj. za množinu všech prvků patřících do množiny α a do množiny β zároveň. Rovností $\alpha = \beta$ budeme rozumnět totožnost množin α a β. Pro tuto interpretaci budou všechny axiomy splněny a pravidla odvozování vedou opět k správným rovnostem. Avšak rovnost $a = b$ nebude ani v tomto formalismu odvoditelná, neboť a a b mohou být různé. Náš nový formalismus tedy rovněž není prázdný.

Otázka, zda náš formalismus je prázdný (jež je analogická otázce bezespornosti), se snadno řešila metodou interpretací. Při řešení takových otázek však už nejsme jenom odkázáni na metodu interpretací, která, jak jsme již ukázali, má dosti omezený dosah. Podívejme se nyní na příklad na otázku nezávislosti prvního axiomu našeho formalismu: $a = a$. Ptáme se tedy, zda rovnost $a = a$

je pomocí pravidel odvozování odvoditelná ze zbývajících axiomů. Kdyby tomu tak bylo, byl by tento axiom v soustavě axiomů 1—5 zbytečný v tom smyslu, že třída odvoditelných rovností našeho formalismu se nezmění vynecháním tohoto axiomu. Nezávislost tohoto axiomu se dá, i když obtížněji, dokázat interpretací. Jinou cestou tuto nezávislost však dokážeme daleko jednodušeji. Všimněme si totiž, že ve všech ostatních axiomech jsou rovnítkem spojovány termy, tvořené více než jedním prvkem. Jinými slovy, žádný z těchto termů se neskládá pouze z jediného písmene. Každá rovnost odvoditelná z těchto rovností pravidly odvozování, má zřejmě tutéž vlastnost. Podle prvního pravidla totiž nahrazujeme písmena termy a tudíž tím můžeme uvažované termy jen komplikovat. Ani použitím druhého pravidla nemůžeme získat rovnost, jejíž každá strana by se skládala pouze z jediného písmene, neboť term β, kterým nahrazujeme term α ve formuli $\mathfrak{A}(\alpha)$, musí figurovat již v odvozené rovnosti $\alpha = \beta$ a proto se musí skládat z více než jednoho písmene. Odtud plyne, že všechny formule odvoditelné z axiomu 2—5, mají vždy tvar $\alpha = \beta$, kde α a β obsahují více než jedno písmeno. Axiom $a = a$ je tedy neodvoditelný z ostatních axiomů našeho formalismu.

V našem případě jsme měli ovšem co činit jen s velmi slabým formalismem. Avšak analogicky lze konstruovat mohutné systémy, zahrnující principy dedukce, používané v různých oborech matematiky, např. v aritmetice, v analyse, v teorii funkcí atd.

Původní Hilbertovou myšlenkou bylo redukovat matematické poznávání na finitismus, považovat matematické disciplíny za výše popsané formalismy, jež nepopisují žádnou skutečnost a tvoří jediný předmět matematiky. Tím by se tedy problémy základů matematiky daly formulovat v oblasti finitismu a dalo by se očekávat, že i jejich řešení by bylo možné prostředky finitismu. V tomto směru by však bylo nutné řešit otázku o možnosti používání teorie množin. Representací teorie množin formálními systémy a zkoumáním bezespornosti těchto systémů by se vyjasnily možnosti používání koncepce teorie množin, nebo by se našla aspoň taková omezení, za nichž by najisto nedošlo ke sporu. Tím by se zároveň vyjasnilo, do jaké míry je možno používat aktuálního nekonečna. Na prvý pohled by se zdálo, že takový program je proveditelný Avšak ukázalo se, že doslovně tato koncepce proveditelná není. Ačkoli skutečně lze všechny matematické výroky a všechny logické dedukce representovat Hilbertovými formalismy, jež mohou tedy v tomto smyslu zahrnovat veškeré matematické poznání, nestačí Hilbertův finitismus k řešení problémů bezespornosti základních matematických disciplín. To spočívá v tom, že pojmy a principy celé matematiky nelze zachytit žádným formálním systémem, byť by byl sebe mohutnější. Tato skutečnost se speciálně projevuje v Gödelem dokázaném tvrzení, že problém bezespornosti formálního systému nelze řešit prostředky, jež tento formální systém formalisuje. Ježto pak úvahy přípustné ve finitismu lze representovat formalismem (např. v axiomatické aritmetice), nelze v rámci finitismu dokázat bezespornost takového formalismu. Avšak není žádných důvodů k tomu, aby se hranice, které klade Hilbertův finitismus, považovaly za bezpodmínečně nutné pro vyloučení pochybných prvků matematického myšlení. Dá se vytvořit okruh spolehlivých bezesporných prostředků, nespadajících do finitismu, které jsou dostatečně silné pro řešení našich otázek. Tím, že překračují rámec finitismu, nenarušují základní Hilbertovu myšlenku formalisovat ony matematické obory, jejichž základy mají být zkoumány, pomocí jistých pojmů, jež byly vyznačeny za základní. I když k řešení shora uvedených otázek prostředky finitismu nestačí, lze tyto otázky formulovat v rámci finitismu.[5])

Z uvedeného vyplývá, že na bezespornost některých formalismů lze soudit jen z existence skutečných modelů, jež tyto formalismy representují. Jinak řečeno řešení problému bezespornosti vyžaduje opět metody interpretací. Avšak obsah formalismů popisujících části teorie množin potřebuje sám, jak jsme se již několikrát o tom zmínili, postavit na pevné základy. Pro nedostatek ničeho vhodnějšího se používá interpretací tvořených pomocí teorie množin ke studiu formalismu. Takovým úvahám je často připisován přívlastek „naivní". Zcela vyhovujícího řešení otázek základů matematiky touto cestou dosáhnout nelze. Zde se naráží na podstatné obtíže. Obsah formalismu nemusí nutně souviset s teorií množin. Kritický rozbor základu teorie množin vedl k jiným interpretacím formalismů, které se již neopírají o pochybné prvky teorie množin.

Dá se očekávat, že formalismy, na jejichž bezespornost soudíme z obsahu, který representují, tvoří soubor neobsahující sice všechny bezesporné formalismy, ale že bezespornost libovolného formalismu lze redukovat na bezespornost formalismů tohoto souboru prostředky Hilbertova finitismu.

Nové myšlenky, vzniklé při zkoumání základů matematiky, se rozvíjely tak, že, jak se to často stává, překročily okruh původních problémů. Daly vznik principiálně novým pojmům a metodám, jež se dnes používají při řešení otázek, které již nesouvisejí pouze se zkoumáním základů matematiky. Aparátu matematické logiky se dnes používá ve výpočtové technice, v technice sdělování a při konstrukci složitých automatických zařízení.

Přeložil Jiří Fábera

K TEORII KONEČNÝCH AUTOMATŮ (NEURONOVÝCH SÍTÍ)

MIROSLAV MLEZIVA

1. Teorie automatů

Teorie konečných automatů, také někdy zvaná teorií neuronových sítí, je velmi mladá disciplína, považovaná obecně za velmi důležitou součást kybernetiky. Základní myšlenky této teorie byly vysloveny poprvé McCullochem a Pittsem, kteří ukázali, že určitým způsobem idealisovaná nervová soustava může být studována prostředky jedné z disciplín symbolické logiky — výrokového kalkulu [1]. Ze zahraničních autorů, rozvíjejících dále tuto teorii, uvedeme alespoň tři: Kleeneho [2], von Neumanna [3] a Medveděva [4]. U nás se objevily zatím dvě práce tohoto charakteru: L. Riegera [5] a F. Svobody [6]. Ve všech těchto pracích vystupuje teorie automatů jako disciplína studující naprosto abstraktně pojaté automatické soustavy sestavené z jednoduchých prvků (konkrétní interpretací těchto soustav mohou být

[5]) Viz také Karl Schröter, *Dosah a hranice axiomatické metody*, v tomto časopise, III (1958), č. 3. *Pozn. překl.*