Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Dalibor Klucký

Afinity v třírozměrném afinním prostoru

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 5 (1960), No. 1, 41--52

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/137078

lze postupovat různými způsoby. Jeden z nich spočívá v tom, že se systém sloupců $\boldsymbol{k}_{ij}$, jimž odpovídají kladné prvky řešení x_{ij}, doplní některými dalšími sloupci tak, aby výsledný systém tvořil basi $(m + n - 1)$ — rozměrného prostoru. Prakticky to znamená: v tabulce řešení se vyznačí potřebná pole, obsazená nulami, jichž lze užít jako vrcholů v uvedených cestách. To znamená, že čísel c_{ij}, jim odpovídajících, lze užít v kriteriích typu (12), (13). Jedno pravidlo pro vyhledání polí, kterými lze systém doplnit, uvádí např. Habr v [6].

Výchozí řešení $\boldsymbol{x}^{(0)}$, které se pak postupně zlepšuje, se může vyhledat např. tzv. indexovou metodou, která bude rovněž popsána v části II.

(Dokončení.)

Literatura

(Citovaná díla jsou uvedena v tom pořadí, v jakém se vyskytují v článku.)

[1] A. Charnes, W. Cooper, A. Henderson, *An Introduction to Linear Programming*, New York 1953.

[2] I. M. Gelfand, *Lineární algebra*, Praha 1953.

[3] A. Charnes, *Optimality and Degeneracy in Linear Programming*, Econometrica 20 (1952).

[4] J. Machek, *A Note on the Solution of the Transportation Problem by the Simplex Method*, Časopis pro pěstování matematiky.

[5] F. Nožička, *O jednom minimálním problému v theorii lineárního programování*, Aplikace matematiky, 1957.

[6] J. Habr, *Lineární programování*, Praha 1959.

AFINITY V TŘÍROZMĚRNÉM AFINNÍM PROSTORU

DALIBOR KLUCKÝ, *VŠP* Praha

1. Vektorový a afinní prostor

Moderní analytická geometrie lineárních útvarů si vytvořila mohutný aparát ve vektorové algebře, který umožňuje definovat a vyšetřovat vlastnosti těchto útvarů nezávisle na volbě soustavy souřadnic. Dokladem toho je např. kniha akademika E. Čecha: „Základy analytické geometrie", zejména její 1. díl, kde jsou pomocí vektorové algebry definovány nejen základní pojmy afinní geometrie (jako pojem rovnoběžnosti, uspořádání, afinního zobrazení a podobně), nýbrž i pojmy geometrie metrické (kolmost, velikost úhlu, goniometrické funkce atd.)[1])

Tento článek má být ukázkou, jak lze podrobněji studovat vlastnosti afinního zobrazení v třírozměrném afinním prostoru metodou vektorové algebry. V rámci tohoto článku použijeme všech vlastností vektorového a afinního prostoru potřebných k sledování dalšího textu. Jde však o vlastnosti známé jistě každému čtenáři, který se zajímá o moderní analytickou geometrii případně o algebru. Poučení o vektorovém prostoru najde čtenář např. v již zmíněné knize akademika Čecha „Základy analytické geometrie", dále ve knihách Gelfand: „Lineární algebra"[2]) (užívá místo názvu „vektorový pro-

---

[1]) Eduard Čech, *Základy analytické geometrie I*; vyd. Přírodovědecké nakladatelství, Praha 1951.

[2]) I. M. Gelfand, *Lineární algebra*, přeložil RNDr. Miroslav Fiedler; vyd. Nakladatelství ČSAV, Praha 1953.

stor" název „afinní prostor") a Malcev: „Základy lineární algebry"[3]) (ruský originál, užívá místo názvu „vektorový prostor" název „lineární prostor"). Jak vidno, není terminologie dosud jednotná, a proto uvedeme přehled nejdůležitějších pojmů vektorové algebry, kterých budeme dále používat:

Neprázdnou množinu $\mathbf{V}$ libovolných matematických objektů nazveme vektorovým prostorem a její prvky vektory, bude-li množina $\mathbf{V}$ splňovat tyto axiomy:

I. Ke každým dvěma vektorům $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ z $\mathbf{V}$ (v daném pořadí) je přiřazen právě jeden vektor $\mathbf{w}$ z $\mathbf{V}$, zvaný součet vektorů $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$, označení

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}\,.$$

II. Pro každé dva vektory $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ z $\mathbf{V}$ platí

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}\,.$$

III. Pro každé tři vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ z $\mathbf{V}$ platí

$$\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}\,.$$

IV. Ve $\mathbf{V}$ existuje aspoň jeden vektor $\mathbf{o}$, který má tu vlastnost, že pro každý vektor $\mathbf{u}$ z $\mathbf{V}$ platí

$$\mathbf{u} + \mathbf{o} = \mathbf{o} + \mathbf{u} = \mathbf{u}\,.$$

Vektor $\mathbf{o}$ se nazývá nulovým vektorem (vektorového prostoru $\mathbf{V}$).

V. Ke každému vektoru $\mathbf{u}$ z $\mathbf{V}$ existuje vektor $\mathbf{u}'$ z $\mathbf{V}$ takový, že

$$\mathbf{u} + \mathbf{u}' = \mathbf{o}$$

(při tom $\mathbf{o}$ je nulový vektor).

VI. Ke každému reálnému číslu a a každému vektoru $\mathbf{u}$ z $\mathbf{V}$ je přiřazen právě jeden vektor $\mathbf{v}$ z $\mathbf{V}$, zvaný součin reálného čísla a a vektoru $\mathbf{u}$; označení

$$\mathbf{v} = a\mathbf{u}\,.$$

VII. Pro každá dvě reálná čísla a, b a každý vektor $\mathbf{u}$ z $\mathbf{V}$ platí

$$a(b\mathbf{u}) = (ab)\,\mathbf{u}\,.$$

VIII. Pro každé reálné číslo a a každé dva vektory $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ z $\mathbf{V}$ platí

$$a(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = a\mathbf{u} + a\mathbf{v}\,.$$

IX. Pro každá dvě reálná čísla a, b a pro každý vektor $\mathbf{u}$ z $\mathbf{V}$ platí

$$(a + b)\,\mathbf{u} = a\mathbf{u} + b\mathbf{u}\,.$$

X. Pro každý vektor $\mathbf{u}$ z $\mathbf{V}$ platí

$$1\mathbf{u} = \mathbf{u}\,.$$

Lze dokázat, že v každém vektorovém prostoru existuje právě jeden nulový vektor a že ke každému vektoru $\mathbf{u}$ existuje právě jeden vektor $\mathbf{u}'$, mající vlastnost požadovanou axiomem V. Tento vektor se pak nazývá vektorem opačným k vektoru $\mathbf{u}$ a značí se $-\mathbf{u}$. Dále ke každým dvěma vektorům $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ existuje právě jeden vektor $\mathbf{x}$ tak, že

[3]) А. И. Малцев, Основы линейной алгебры, vyd. OGIZ Moskva, Leningrad 1948.

$$\mathbf{u} + \mathbf{x} = \mathbf{v}\,,$$

vektor $\mathbf{x}$ se nazývá rozdílem vektorů $\mathbf{v}$ a $\mathbf{u}$ a značí se $\mathbf{x} = \mathbf{v} - \mathbf{u}$. Platí $\mathbf{v} - \mathbf{u} = \mathbf{v} + (-\mathbf{u})$.

O vektoru $\mathbf{v}$ říkáme, že je lineární kombinací vektorů

$$\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\,, \tag{1.1}$$

platí-li

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + \ldots + c_k\mathbf{u}_k\,,$$

kde $c_1, c_z, \ldots, c_k$ jsou reálná čísla.

Má-li rovnice

$$x_1\mathbf{u}_1 + x_2\mathbf{u}_2 + \ldots + x_k\mathbf{u}_k = 0 \tag{1.2}$$

pro neznámé koeficienty $x_1, x_2, \ldots, x_k$ pouze triviální (nulové) řešení, říkáme, že vektory (1.1) jsou lineárně nezávislé, má-li rovnice (1.2) také řešení netriviální, říkáme, že vektory (1.1) jsou lineárně závislé.

Vektorový prostor $\mathbf{V}$ se nazývá lineárním vektorovým prostorem dimense n, má-li tyto dvě vlastnosti:

1. Ve $\mathbf{V}$ existuje n lineárně nezávislých vektorů

$$\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\,. \tag{1.3}$$

2. Každých $n + 1$ vektorů z $\mathbf{V}$ jsou vektory lineárně závislé.

Lineární vektorový prostor (zkratka l. v. prostor) $\mathbf{V}$ dimense n označíme $\mathbf{V}_n$. Libovolná uspořádaná n-tice lineárně nezávislých vektorů z $\mathbf{V}_n$ se nazývá base l. v. prostoru $\mathbf{V}_n$.

Je-li (1.3) libovolná base l. v. prostoru $\mathbf{V}_n$, pak všechny jeho ostatní base

$$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n \tag{1.4}$$

dostaneme ve tvaru

$$\mathbf{v}_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\mathbf{u}_k,\; i = 1, 2, \ldots, n\,, \tag{1.5}$$

kde determinant $|a_{ik}| \neq 0$. Rovnice (1.5) se nazývají transformační rovnice pro přechod od base (1,3) k basi (1.4), matice (a_{ik}) je matice transformace, determinant $|a_{ik}|$ je determinant transformace.

Každá podmnožina l. v. prostoru $\mathbf{V}_n$, která je opět vektorovým prostorem, se nazývá lineární soustava vektorů. Nulový vektor l. v. prostoru $\mathbf{V}_n$ tvoří sám lineární soustavu vektorů, která se nazývá triviální lineární soustava vektorů. Každá netriviální lineární soustava vektorů l. v. prostoru $\mathbf{V}_n$ je opět lineárním vektorovým prostorem dimense k, kde $1 \leqq k \leqq n$. Triviální lineární soustavu vektorů pokládáme za lineární soustavu vektorů dimense nula.

Afinní prostor, jakožto pojem obecnější, než je pojem prostoru euklidovského, zavedeme do svých úvah rovněž axiomaticky:

Budiž dán libovolný vektorový prostor $\mathbf{V}$. Každou neprázdnou množinu $\mathbf{A}$ libovolných matematických objektů nazveme afinním prostorem a její prvky body, bude-li množina $\mathbf{A}$ splňovat tyto axiomy:

I. Ke každému bodu A z $\mathbf{A}$ a každému vektoru $\mathbf{u}$ z $\mathbf{V}$ je přiřazen právě jeden bod B z $\mathbf{A}$, který označíme

$$B = A + \mathbf{u}\,. \tag{1.6}$$

II. Ke každé uspořádané dvojici bodů A, B z $\mathbf{A}$ existuje právě jeden vektor $\boldsymbol{u}$ z V tak, že platí (1.6). Tento vektor označíme

$$(1.7) \qquad \boldsymbol{u} = B - \mathbf{A}\,.$$

O uspořádané dvojici bodů A, B, pro níž platí (1.6), říkáme, že je umístěním vektoru $\boldsymbol{u}$.

III. Pro každý bod A z $\mathbf{A}$ a každé dva vektory $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ z $\mathbf{V}$ platí

$$(1.8) \qquad A + (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = (A + \boldsymbol{u}) + \boldsymbol{v}\,.$$

IV. Pro každý bod A z $\mathbf{A}$ platí $A + \boldsymbol{o} = A$.

Je-li $\mathbf{V}$ lineární vektorový prostor dimense n, nazýváme číslo n také dimensí příslušného afinního prostoru, který označíme $\mathbf{A}_n$. Nechť vektor $\boldsymbol{x}$ probíhá lineární soustavou vektorů $\mathbf{W}_k$ dimense k l. v. prostoru $\mathbf{V}_n$, potom množinu všech bodů X z $\mathbf{A}_n$, pro něž platí

$$X = A + \boldsymbol{x}$$

nazveme lineárním podprostorem dimense k afinního prostoru $\mathbf{A}_n$, určeným bodem A a lineární soustavou vektorů $\mathbf{W}_k$, označení $\{A, \mathbf{W}_k\}$. Má-li $\mathbf{W}_k$ basi (1.1), označíme lineární podprostor $\{A, \mathbf{W}_k\}$ také $\{A; \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_k\}$. Lze dokázat, že každý lineární podprostor afinního prostoru $\mathbf{A}$ je opět afinním prostorem. Lineární soustavu vektorů $\mathbf{W}_k$ nazveme k-směrem lineárního podprostoru $\{A, \mathbf{W}_k\}$ (ovšem pouze pro $k \geqq 1$). Pro $k = 1, 2$ užíváme pro lineární podprostory těchto dimensí názvu přímka a rovina. Libovolný bod U lineárního podprostoru $\{A, \mathbf{W}_k\}$ spolu s libovolnou basí jeho k-směru nazveme basí lineárního podprostoru $\{A, \mathbf{W}_k\}$. O dvou lineárních podprostorech $\{A, \mathbf{W}_k\}$. $\{B, \mathbf{W}_h'\}$ říkáme, že jsou rovnoběžné, je-li buď $\mathbf{W}_k \subset \mathbf{W}_h'$ nebo $\mathbf{W}_h' \subset \mathbf{W}_k$. Budiž $\{A, \boldsymbol{u}\}$ přímka. Množinu všech bodů X, pro něž platí

$$X = A + t\boldsymbol{u}\,, \quad t \geqq 0 \ (t > 0)$$

nazýváme uzavřenou (otevřenou) polopřímkou a označujeme $\{A; \boldsymbol{u}\}$ (stejně jako přímku $\{A; \boldsymbol{u}\}$). Bod A je počátek této polopřímky. Podobně, je-li $\{A; \boldsymbol{u}, v\}$ rovina, potom množinu všech bodů X, pro něž platí

$$X = A + t\boldsymbol{u} + r\boldsymbol{v}\,, \quad r \geqq 0 \ (r > 0)\,,$$

nazýváme uzavřenou (otevřenou) polorovinou a označujeme $\{A; \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\}$. Přímka $\{A; \boldsymbol{u}\}$ je hraniční přímkou této poloroviny. Konečně, je-li dimense afinního prostoru $n = 3$, a je-li $\{A; \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\}$ base tohoto afinního prostoru, potom množinu všech bodů X, pro něž platí

$$X = A + t\boldsymbol{u} + r\boldsymbol{v} + s\boldsymbol{w}\,, \quad s \geqq 0 \ (s > 0)\,,$$

nazýváme uzavřeným (otevřeným) poloprostorem a označujeme $\{A; \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\}$. Rovina $\{A; \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\}$ je hraniční rovinou poloprostoru $\{A; \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\}$. Přenecháváme čtenáři, aby si vyslovil sám definici opačných polopřímek, opačných polorovin a opačných poloprostorů. Podotkněme výslovně, že poloprostory $\{A, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\}$ a $\{A, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}'\}$ s touž hraniční rovinou $\{A; \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\}$ jsou opačné tehdy a jen tehdy, jsou-li base $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ a $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}'$ nesouhlasné tj. je-li determinant transformace base $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ v basi $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}'$ záporný.

Jak již bylo řečeno, není zde možno podat úplný výčet všech vlastností afinního prostoru, potřebných ke studiu afinních zobrazení tohoto prostoru.

Čtenáři, který se seznámil se základy moderní analytické geometrie však nebude odvození těchto vlastností činit potíže. Na závěr podotkněme, že rovnost definovaná ve vektorovém i afinním prostoru je základní rovností na množině.

2. Pojem a základní vlastnosti afinního zobrazení

Dříve než vyslovíme definici afinního zobrazení, proveďme tuto přípravnou úvahu:

Budiž $\mathscr{X}$ libovolné vzájemně jednoznačné zobrazení afinního prostoru $\mathbf{A}_3$. Obraz bodu X v tomto zobrazení označíme buď X' nebo určitěji $\mathscr{X}(X)$, případně také použijeme zápisu $\mathscr{X}(X \to X')$. Předpokládejme, že zobrazení $\mathscr{X}$ má vlastnost vyjádřenou touto ekvivalencí:

$$B - A = D - C \Leftrightarrow B' - A' = D' - C \tag{2.1}$$

(při tom A', B', C', D' jsou po řadě obrazy bodů A, B, C, D v zobrazení $\mathscr{X}$). Můžeme proto v zobrazení $\mathscr{X}$ definovat obraz vektoru $\mathbf{u}$ takto: Je-li $\mathbf{u} = B - A$, pak $\mathbf{u}' = B' - A'$. Tato definice vzhledem k (2.1) nezávisí na umístění vektoru $\mathbf{u}$. Z (2.1) také plyne, že ke každému vektoru $\mathbf{v}'$ existuje právě jeden vektor $\mathbf{v}$, jehož je $\mathbf{v}'$ obrazem. Vektor $\mathbf{v}$ nazveme vzorem vektoru $\mathbf{v}'$ v zobrazení $\mathscr{X}$. O vzájemně jednoznačném zobrazení $\mathscr{X}$ afinního $\mathbf{A}_3$, pro které platí (2.1) říkáme, že indukuje vzájemně jednoznačné zobrazení ve vektorovém prostoru $\mathbf{V}_3$.

Nyní již můžeme vyslovit definici afinního zobrazení:

Definice 2.1. *Vzájemně jednoznačné zobrazení $\mathscr{A}$ afinního prostoru $\mathbf{A}_3$ na týž afinní prostor $\mathbf{A}_3$ nazveme afinním zobrazením nebo také afinitou, bude-li mít toto zobrazení vlastnosti:*

(I.) Zobrazení $\mathscr{A}$ indukuje vzájemně jednoznačné zobrazení ve vektorovém prostoru $\mathbf{A}_3$.

(II.) Pro každé dva vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ platí

$$\mathscr{A}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathscr{A}(\mathbf{u}) + \mathscr{A}(\mathbf{v})\text{[4]} . \tag{2.2}$$

(III.) Pro každý vektor $\mathbf{u}$ a každé reálné číslo t platí

$$\mathscr{A}(t\mathbf{u}) = t\mathscr{A}(\mathbf{u}) . \tag{2.3}$$

Poznámka: Čtenář, který je seznámen s pojmem lineárního zobrazení, může vyslovit definici 2.1 stručněji: Vzájemně jednoznačné zobrazení afinního prostoru $\mathbf{A}_3$ na sebe, které indukuje vzájemně jednoznačné lineární zobrazení ve vektorovém prostoru $\mathbf{V}_3$ nazýváme afinním zobrazením.

Věta 2.1. *Je-li $\mathscr{A}$ afinita, $B = A + \mathbf{u}$, je $B' = A' + \mathbf{u}'$.*

Věta 2.2. *Pro každou afinitu $\mathscr{A}$ platí*

$$\mathscr{A}\left(\sum_{i=1}^{k} a_i \mathbf{u}_i\right) = \sum_{i=1}^{k} a_i \mathscr{A}(\mathbf{u}_i) . \tag{2.4}$$

Věta 2.3. *Je-li $\mathscr{A}$ afinita, $B = \mathscr{A} + \sum_{i=1}^{k} a_i \mathbf{u}_i$, pak*

---

[4]) Obrazy vektorů značíme analogicky jako obrazy bodů.

$$(2.5) \qquad \mathscr{A}(B) = \mathscr{A}(A) + \sum_{i=1}^{k} a_i \mathscr{A}(\mathbf{u}_i) \, .$$

Věta 2.4. *Obrazem nulového vektoru v každé afinitě je nulový vektor, obrazem nenulového vektoru je nenulový vektor.*

Důkazy vět 2.1.—2.4. jsou triviální a přenecháváme je čtenáři.

Věta 2.5. *Buďte*

$$(2.6) \qquad \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k$$

vektory,

$$(2.7) \qquad \mathbf{u}_1', \mathbf{u}_2', \ldots, \mathbf{u}_k'$$

jejich obrazy v afinitě $\mathscr{A}$. *Pak vektory* (2.7) *jsou lineárně závislé tehdy a jen tehdy, jsou-li lineárně závislé vektory* (2.6).

Důkaz: I. Nechť jsou vektory (2.6) lineárně závislé, pak je

$$(2.8) \qquad a_1\mathbf{u}_1 + a_2\mathbf{u}_2 + \ldots + a_k\mathbf{u}_k = 0 \, ,$$

kde aspoň jedno z čísel

$$(2.9) \qquad a_1, a_2, \ldots, a_k$$

je různé od nuly. Obrazem vektoru (2.8) je podle vět 2.2 a 2.4 vektor

$$(2.10) \qquad a_1\mathbf{u}_1' + a_2\mathbf{u}_2' + \ldots + a_k\mathbf{u}_k' = 0 \, .$$

Vzhledem k tomu, že aspoň jedno z čísel (2.9) je různé od nuly, jsou vektory (2.7) lineárně závislé.

II. Nechť jsou vektory (2.7) lineárně závislé. Pak platí (2.10), kde aspoň jedno z čísel (2.9) je různé od nuly. Vzorem vektoru (2.10) je vektor (2.8), proto jsou vektory (2.6) lineárně závislé.

Věta 2.6. *Buďte*

$$(2.11) \qquad \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3 \, ,$$

$$(2.12) \qquad \mathbf{v}_1 \, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$$

dvě base l. v. prostoru $\mathbf{V}_3$,

$$(2.13) \qquad \mathbf{u}_1', \mathbf{u}_2', \mathbf{u}_3' \, ,$$

$$(2.14) \qquad \mathbf{v}_1', \mathbf{v}_2', \mathbf{v}_3'$$

jejich obrazy v afinitě $\mathscr{A}$. *Potom determinant transformace base* (2.11) *v basi* (2.13) *je roven determinantu transformace base* (2.12) *v basi* (2.14).

Důkaz: Podle věty 2.5 tvoří vektory (2.13) a (2.14) basi l. v. prostoru $\mathbf{V}_3$. Z věty 2.2 plyne, že determinant C transformace base (2.11) v basi (2.12) je roven determinantu transformace base (2.13) v basi (2.14). Označíme-li D determinant transformace base (2.11) v basi (2.13), D' determinant transformace base (2.12) v basi (2.14), je determinant transformace base (2.11) v basi (2.14) roven jednak DC, jednak CD', takže platí

$$DC = CD'$$

a odtud, protože $C \neq 0$ plyne $D = D'$, což se mělo dokázat.

Definice 2.2. *Nechť afinita $\mathscr{A}$ převádí basi* (2.11) *v basi* (2.13)[5]. *Determinant transformace base* (2.11) *v basi* (2.13) *nazveme determinantem afinity $\mathscr{A}$.*

Poznámka: Determinant afinity, jakožto determinant transformace je vždy různý od nuly. Podle věty 2.6 nezávisí determinant transformace na volbě base (2.11). Má tedy každá afinita právě jeden determinant.

Z vět 2.2, 2.3, 2.5 si čtenář snadno dokáže větu:

Věta 2.7. *Budiž dána afinita $\mathscr{A}$. Potom platí:*

1. *Obrazem lineární soustavy vektorů $\{\mathbf{u}\}$ resp. $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ je lineární soustava vektorů $\{\mathbf{u}'\}$ resp. $\{\mathbf{u}', \mathbf{v}'\}$.*

2. *Obrazem přímky $\{A, \mathbf{u}\}$ resp. roviny $\{A; \mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ je přímka $\{A'; \mathbf{u}'\}$ resp. rovina $\{A'; \mathbf{u}', \mathbf{v}'\}$.*

3. Obrazem dvou souhlasných (nesouhlasných) basí l. v. prostoru $\mathbf{V}_3$ jsou opět souhlasné (nesouhlasné) base l. v. prostoru $\mathbf{V}_3$.

4. Obrazem polopřímky $\{A; \mathbf{u}\}$ resp. poloroviny $\{A; \mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ resp. poloprostoru $\{A; \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ je polopřímka $\{A'; \mathbf{u}'\}$ resp. polorovina $\{A'; \mathbf{u}', \mathbf{v}'\}$ resp. poloprostor $\{A'; \mathbf{u}', \mathbf{v}', \mathbf{w}'\}$.

Definice 2.3. *Afinity s positivním determinantem se nazývají přímé, afinity s negativním determinantem se nazývají nepřímé.*

Z věty 2.6. a definice 2.3 plyne okamžitě:

Věta 2.8. *Přímá afinita převádí každou basi l. v. prostoru $\mathbf{V}_3$ v basi s ní souhlasnou, nepřímá afinita převádí každou basi l. v. prostoru $\mathbf{V}_3$ v basi s ní nesouhlasnou.*

Věta 2.9. (*Věta o určenosti afinního zobrazení.*) *Buďte*

$$A, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\,, \tag{2.15}$$

$$A', \mathbf{u}', \mathbf{v}', \mathbf{w}' \tag{2.16}$$

dvě base afinního prostoru $\mathbf{A}_3$. Potom existuje právě jedno[6]) *afinní zobrazení prostoru $\mathbf{A}_3$, které převádí basi* (2.15) *v basi* (2.16).

Důkaz: I. Existence: Budiž X libovolný bod prostoru $\mathbf{A}_3$. Pak je

$$X = A + x_1\mathbf{u} + x_2\mathbf{v} + x_3\mathbf{w}\,. \tag{2.17}$$

Bodu X přiřaďme jako obraz bod

$$\mathscr{X}(X) = A' + x_1\mathbf{u}' + x_2\mathbf{v}' + x_3\mathbf{w}'\,. \tag{2.18}$$

Zobrazení $\mathscr{X}$ definované vztahy (2.17) a (2.18) je zřejmě vzájemně jednoznačné zobrazení afinního prostoru $\mathbf{A}_3$ na sebe. Dokážeme, že $\mathscr{X}$ je afinita.

1. Budiž $Y - X = V - U$, pak je

$$\begin{aligned} Y &= A + y_1\mathbf{u} + y_2\mathbf{v} + y_3\mathbf{w}\,,\\ X &= A + x_1\mathbf{u} + x_2\mathbf{v} + x_3\mathbf{w}\,,\\ V &= A + v_1\mathbf{u} + v_2\mathbf{v} + v_3\mathbf{w}\,,\\ U &= A + u_1\mathbf{u} + u_2\mathbf{v} + u_3\mathbf{w}\,, \end{aligned} \tag{2.19}$$

[5]) Tj. nechť je obrazem base (2.11) v afinitě $\mathscr{A}$ base (2.13).

[6]) Rovnost dvou afinit definujeme jako rovnost dvou zobrazení, tj. dvě zobrazení afinního prostoru $\mathbf{A}_3$ $\mathscr{X}$ a $\mathscr{X}'$ jsou si rovna tehdy a jen tehdy, je-li pro každý bod X, $\mathscr{X}(X) = \mathscr{X}'(X)$.

dále

$$
\begin{aligned}
Y' &= Z(Y) = A' + y_1\mathbf{u}' + y_2\mathbf{v}' + y_3\mathbf{w}' ,\\
X' &= Z(X) = A' + x_1\mathbf{u}' + x_2\mathbf{v}' + x_3\mathbf{w}' ,\\
V' &= Z(V) = A' + v_1\mathbf{u}' + v_2\mathbf{v}' + v_3\mathbf{w}' ,\\
U' &= Z(U) = A' + u_1\mathbf{u}' + u_2\mathbf{v}' + u_3\mathbf{w}' .
\end{aligned} \tag{2.20}
$$

Ze vztahu $Y - X = V - U$ a ze vztahů (2.19) vyplývá

$$y_1 - x_1 = y_1 - u_1, y_2 - x_2 = v_2 - u_2, y_3 - x_3 = v_3 - u_3 \tag{2.21}$$

a odtud pomocí vztahů (2.20) dostáváme $Y' - X' = V' - U'$. Jestliže je naopak $Y' - X' = V' - U'$, pak (2.21) plyne z (2.20) a pomocí (2.19) dostáváme $Y - X = V - U$. Zobrazení $\mathscr{Z}$ tedy indukuje vzájemně jednoznačné zobrazení v l. v. prostoru $\mathbf{V}_3$.

2., 3. Budiž $\mathbf{x}$ libovolný vektor z $\mathbf{V}_3$. Položme $X = A + \mathbf{x}$. Budiž

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{u} + x_2\mathbf{v} + x_3\mathbf{w} . \tag{2.22}$$

Protože je $\mathbf{x} = X - A$, platí podle části 1.: $\mathbf{x}' = X' - A'$. Z (2.22) proto plyne, že

$$\mathbf{x}' = x_1\mathbf{u}' + x_2\mathbf{v}' + x_3\mathbf{w}' . \tag{2.23}$$

Ze vztahů (2.22) a (2.23) pak vyplývá, že zobrazení $\mathscr{Z}$ má vlastnosti (II.) a (III.) požadované definicí afinního zobrazení. Je tedy $\mathscr{Z}$ afinita.

Položíme-li v (2.17) a (2.18) $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, zjistíme, že obrazem bodu A je bod A'. Položíme-li ve vztazích (2.22) a (2.23) nejprve $x_1 = 1$, $x_2 = x_3 = 0$, pak $x_2 = 1$, $x_1 = x_3 = 0$ a konečně $x_1 = x_2 = 0$, $x_3 = 1$, dostaneme, že obrazy vektorů $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ jsou po řadě vektory $\mathbf{u}'$, $\mathbf{v}'$, $\mathbf{w}'$. Zobrazení $\mathscr{Z}$ je tedy afinní zobrazení, které převádí basi (2.15) v basi (2.16).

II. Unicita: Je-li X libovolný bod prostoru $\mathbf{A}_3$, platí (2.17). Jestliže afinita $\mathscr{A}$ převádí basi (2.15) v basi (2.16), pak podle věty 2.3 platí pro obraz $X' = \mathscr{A}(X)$ bodu X (2.18). Je tedy pro každý bod X $\mathscr{A}(X) = \mathscr{Z}(X)$, proto $\mathscr{A} = \mathscr{Z}$, což se mělo dokázat.

Zároveň jsme dokázali větu:

Věta 2.10. *Jsou-li* (2.15) *a* (2.16) *dvě base afinního prostoru* $\mathbf{A}_3$, *pak zobrazení* $\mathscr{Z}$ *definované vztahy* (2.17) *a* (2.18) *je afinitou, která indukuje vzájemně jednoznačné zobrazení v l. v. prostoru* $\mathbf{V}_3$ *definované vztahy* (2.22) *a* (2.23).

Věta 2.11. *Identické zobrazení* (*identita*) *afinního prostoru* $\mathbf{A}_3$ [7]) *je afinita, která indukuje identické zobrazení v l. v. prostoru* $\mathbf{V}_3$.

Důkaz: Položíme-li v (2.16) $A' = A$, $\mathbf{u}' = \mathbf{u}$, $\mathbf{v}' = \mathbf{v}$ a $\mathbf{w}' = \mathbf{w}$, dostaneme z (2.18) $X' = \mathscr{Z}(X) = X$, tj. identitu. Podle věty 2.10 je zobrazení definované pomocí (2.17) a (2.18) afinitou.

3. Samodružné body a vektory afinního zobrazení

Definice 3.1. *Bod* X *prostoru* $\mathbf{A}_3$ *nazveme samodružným bodem afinního zobrazení* $\mathscr{A}$, *je-li* $\mathscr{A}(X) = X$.

Vektor $\mathbf{u}$ l. v. prostoru $\mathbf{V}_3$ nazveme samodružným vektorem afinního zobrazení $\mathscr{A}$, je-li $\mathscr{A}(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$.

---

[7]) Tj. zobrazení $\mathscr{Z}$ definované vztahem $\mathscr{Z}(X) = X$ pro každý bod X.

Množinu $\mathbf{M}$ bodů (vektorů) nazveme samodružnou množinou afinního zobrazení $\mathscr{A}$, je-li obraz každého jejího bodu (vektoru) opět bodem (vektorem) množiny $\mathbf{M}$; a obráceně, je-li každý bod (vektor) množiny $\mathbf{M}$ vzorem bodu (vektoru) množiny $\mathbf{M}$. Je-li množina $\mathbf{M}$ bodů (vektorů) samodružnou množinou afinního zobrazení $\mathscr{A}$, říkáme, že afinní zobrazení $\mathscr{A}$ množinu $\mathbf{M}$ reprodukuje.

Věta 3.1. *Nulový vektor je v každé afinitě samodružný.*

Důkaz: Budiž $\mathscr{A}$ afinita, $\mathbf{u}$ libovolný vektor, pak je $\mathbf{o} = 0 \,.\, \mathbf{u}$ a tedy $\mathscr{A}(\mathbf{o}) = O \,.\, \mathscr{A}(\mathbf{u}) = \mathbf{o}$.

Věta 3.2. *Je-li $\mathbf{u}$ nenulový samodružný vektor afinity $\mathscr{A}$, je každý vektor lineární soustavy vektorů $\{\mathbf{u}\}$ samodružný.*

Důkaz: Je-li $\mathbf{v} \in \{\mathbf{u}\}$, je $\mathbf{v} = t \,.\, \mathbf{u}$ a tudíž $\mathscr{A}(\mathbf{v}) = \mathscr{A}(t\mathbf{u}) = t\mathscr{A}(\mathbf{u}) = t\mathbf{u} = \mathbf{v}$.
Podobně se dokáží následující dvě věty:

Věta 3.3. *Jsou-li dva lineárně nezávislé vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ samodružné v afinitě $\mathscr{A}$, je každý vektor lineární soustavy vektorů $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ samodružný.*

Věta 3.4. *Je-li každý vektor jisté base $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ l. v. prostoru $\mathbf{V}_3$ samodružný, je každý vektor z $\mathbf{V}_3$ samodružný.*

Věta 3.5. *Nechť je obrazem nenulového vektoru $\mathbf{u}$ v afinitě $\mathscr{A}$ vektor $k\mathbf{u}$, $k \neq O$. Potom je lineární soustava vektorů $\{\mathbf{u}\}$ samodružná a obrazem každého vektoru $\mathbf{v}$ z $\{\mathbf{u}\}$ je vektor $k\mathbf{v}$.*

Důkaz: Podle vlastnosti (II.) afinního zobrazení je $\mathscr{A}(\mathbf{v}) = \mathscr{A}(t\mathbf{u}) = t\mathscr{A}(\mathbf{u}) = tk\mathbf{u} = k(t\mathbf{u}) = k\mathbf{v}$. Obrazem každého vektoru $\mathbf{v}$ z $\{\mathbf{u}\}$ je tedy vektor $k\mathbf{v}$, což je opět vektor z $\{\mathbf{u}\}$. Protože obrazem lineární soustavy vektorů je opět lineární soustava vektorů téže dimense, je věta dokázána.

Věta 3.6. *Buďte $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ po dvou lineárně nezávislé vektory, které náležejí téže lineární soustavě vektorů $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$. Nechť pro afinitu $\mathscr{A}$ platí $\mathscr{A}(\mathbf{u} \to a\mathbf{u}, \mathbf{v} \to b\mathbf{v}, \mathbf{w} \to c\mathbf{w})$. Potom je $a = b = c$ a každá lineární soustava vektorů dimense 1 obsažená v $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ je samodružná.*

Důkaz: I. Platí $\mathbf{w} = x\mathbf{u} + y\mathbf{v}$, $x \neq 0$, $y \neq 0$. Dále platí $\mathscr{A}(\mathbf{w}) = x\mathscr{A}(\mathbf{u}) + y\mathscr{A}(\mathbf{v}) = (xa)\,\mathbf{u} + (yb)\,\mathbf{v}$, současně však je $\mathscr{A}(\mathbf{w}) = c\mathbf{w} = (cx)\,\mathbf{u} + (cy)\,\mathbf{v}$, proto $cx = xa$, $cy = yb$ a tedy $c = a$, $c = b$.

II. Dokážeme, že každá lineární soustava vektorů dimense 1 obsažená v $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ je samodružná. Protože obrazem lineární soustavy vektorů $\{\mathbf{x}\}$ je lineární soustava vektorů $\{\mathscr{A}(\mathbf{x})\}$ stačí dokázat, že $\mathscr{A}(\mathbf{x}) = a\mathbf{x}$, $a \neq O$. Budiž tedy $\{\mathbf{x}\} \subset \{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$, pak $\mathbf{x} = k\mathbf{u} + h\mathbf{v}$, proto $\mathscr{A}(\mathbf{x}) = k\mathscr{A}(\mathbf{u}) + h\mathscr{A}(\mathbf{v}) = (ka)\,\mathbf{u} + (ha)\,\mathbf{v} = a(k\mathbf{u} + h\mathbf{v}) = a\mathbf{x}$.

Poznámka: Zároveň jsme dokázali, že jsou-li splněny předpoklady věty 3.6 existuje reálné číslo $a \neq O$ tak, že pro každý vektor $\mathbf{x} \in \{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ platí $\mathscr{A}(\mathbf{x}) = a\mathbf{x}$.

Věta 3.7. *Buďte $\mathbf{u}$. $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$, $\mathbf{t}$ vektory, z nichž žádné tři nejsou lineárně závislé. Nechť pro afinitu $\mathscr{A}$ platí $\mathscr{A}(\mathbf{u} \to a\mathbf{u}, \mathbf{v} \to b\mathbf{v}, \mathbf{w} \to c\mathbf{w}, \mathbf{t} \to \mathrm{d}\mathbf{t})$. Potom je $a = b = c = d$ a obrazem libovolného vektoru $\mathbf{x}$ je vektor $a\mathbf{x}$ a tedy každá lineární soustava vektorů dimense 1 je samodružná.*

Důkaz věty 3.7 je analogický důkazu věty 3.6 a přenecháváme jej čtenáři.

Věta 3.8. *Nechť jsou v dané afinitě $\mathscr{A}$ dva různé body A, B samodružné. Potom je každý bod přímky*

$$X = A + t(B - A) \tag{3.1}$$

samodružný.

Důkaz: Buďte A', B', X' po řadě obrazy bodů A, B, X v afinitě $\mathscr{A}$. Pak $X' = A' + t(B' - A') = A + t(B - A) = X$.

Věta 3.9. *Nechť jsou v dané afinitě $\mathscr{A}$ tři body A, B, C, které nenáležejí žádné přímce, samodružné. Potom je každý bod roviny*

$$X = A + t(B - A) + r(C - A) \tag{3.2}$$

samodružný.

Věta 3.10. *Nechť jsou v dané afinitě $\mathscr{A}$ čtyři body A, B, C, D, které nenáležejí žádné rovině, samodružné. Potom je každý bod prostoru $\mathbf{A}_3$ samodružný.*

Věty 3.9 a 3.10 se dokáží stejně jako věta 3.8.

Pro samodružné body afinity jsou tedy možné následující případy:

1. Afinita má všechny body samodružné.
2. Afinita má právě rovinu samodružných bodů.
3. Afinita má právě přímku samodružných bodů.
4. Afinita má právě jeden samodružný bod.
5. Afinita nemá žádný samodružný bod.

Naším úkolem bude dokázat existenci všech těchto pěti typů afinit. Dříve zavedeme názvy:

Definice 3.2. *Afinitu, která má všechny body samodružné nazveme identickou afinitou nebo krátce identitou.*

Afinitu, která má právě rovinu samodružných bodů nazveme rovinovou afinitou, rovinu samodružných bodů této afinity nazveme rovinou afinity.

Afinitu, která má právě přímku samodružných bodů nazveme osovou afinitou, přímku samodružných bodů této afinity nazveme osou afinity.

Afinitu, která má právě jeden samodružný bod, nazveme středovou afinitou, její samodružný bod nazveme středem afinity.

Věta 3.11. *Existuje identická afinita.*

Věta 3.11 je přímým důsledkem věty 2.11.

Věta 3.12. *K libovolné rovině $\{A; \mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ existuje aspoň jedna rovinová afinita, pro níž je rovina $\{A; \mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ rovinou afinity.*

Důkaz: Volme vektory $\mathbf{w} \neq \mathbf{w}'$ tak, aby $A, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ a $A, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}'$ byly base pro $\mathbf{A}_3$. Afinní zobrazení $\mathscr{A}(A \to A,\ \mathbf{u} \to \mathbf{u},\ \mathbf{v} \to \mathbf{v},\ \mathbf{w} \to \mathbf{w}')$ je určeno jednoznačně podle věty 2.9. Protože je $\mathbf{w}' \neq \mathbf{w}$ není $\mathscr{A}$ identitou (viz větu 2.11). Budiž $X \in \{A; \mathbf{u}, \mathbf{v}\}$, pak $X = A + t\mathbf{u} + r\mathbf{v}$ a $\mathscr{A}(X) = \mathscr{A}(A) + t\mathscr{A}(\mathbf{u}) + r\mathscr{A}(\mathbf{v}) = A + t\mathbf{u} + r\mathbf{v} = X$. Každý bod roviny $\{A; \mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ je proto samodružný. Další samodružné body této afinity neexistují podle věty 3.10. $\mathscr{A}$ je rovinovou afinitou s rovinou $\{A; \mathbf{u}, \mathbf{v}\}$.

Věta 3.13. *Ke každé přímce $\{A; \mathbf{u}\}$ existuje aspoň jedna osová afinita, která má přímku $\{A; \mathbf{u}\}$ za osu afinity.*

Důkaz: Dokážeme nejprve, že ke každé basi $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ l. v. prostoru $\mathbf{V}_3$ existuje base $\mathbf{u}, \mathbf{v}', \mathbf{w}'$ taková, že vektory $\mathbf{v}' - \mathbf{v}$, $\mathbf{w}' - \mathbf{w}$ jsou lineárně nezávislé. Budiž $\mathbf{v}' = 2\mathbf{v}$, $\mathbf{w}' = 2\mathbf{w}$. Potom je zřejmě $\mathbf{u}, \mathbf{v}', \mathbf{w}'$ basí l. v. prostoru $\mathbf{V}_3$. Řešme rovnici

$$x(\mathbf{v}' - \mathbf{v}) + y(\mathbf{w}' - \mathbf{w}) = \mathbf{o}\,. \tag{3.3}$$

Dosadíme-li do rovnice (3.3) za $\mathbf{v}'$ a $\mathbf{w}'$, obdržíme $x\mathbf{v} + y\mathbf{w} = \mathbf{o}$, proto $x = y = 0$ a vektory $\mathbf{v}' - \mathbf{v}$, $\mathbf{w}' - \mathbf{w}$ jsou lineárně nezávislé.

Budiž $\{A; \mathbf{u}\}$ libovolná přímka. Volme vektory $\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{v}', \mathbf{w}'$ tak, aby $A, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ a $A, \mathbf{u}, \mathbf{v}', \mathbf{w}'$ byly base prostoru $\mathbf{A}_3$ a aby $\mathbf{v}' - \mathbf{v}$, $\mathbf{w}' - \mathbf{w}$ byly lineárně nezávislé vektory. Afinita $\mathscr{A}(A \to A,\ \mathbf{u} \to \mathbf{u},\ \mathbf{v} \to \mathbf{v}',\ \mathbf{w} \to \mathbf{w}')$ je jednoznačně určena podle věty 2.9.

Je-li $X \in \{A; \mathbf{u}\}$, je $X = A + t\mathbf{u}$ a tedy $\mathscr{A}(X) = \mathscr{A}(A) + t\mathscr{A}(\mathbf{u}) = A + t\mathbf{u} = X$. Každý bod přímky $\{A; \mathbf{u}\}$ je tedy samodružný.

Budiž nyní X libovolný samodružný bod afinity $\mathscr{A}$. Pak je

$$X = A + t\mathbf{u} + r\mathbf{v} + s\mathbf{w}$$

a současně

$$X = X' = A + t\mathbf{u} + r\mathbf{v}' + s\mathbf{w}' .$$

Porovnáním obou vztahů dostaneme

$$r(\mathbf{v}' - \mathbf{v}) + s(\mathbf{w}' - \mathbf{w}) = \mathbf{o} .$$

Protože $\mathbf{v}' - \mathbf{v}$ a $\mathbf{w}' - \mathbf{w}$ jsou lineárně nezávislé, je $r = s = 0$ a $X = A + t\mathbf{u}$ je bodem přímky $\{A; \mathbf{u}\}$.

Věta 3.14. *Ke každému bodu A existuje aspoň jedna středová afinita, pro níž je bod A středem afinity.*

Důkaz: Podobně jako ve větě 3.13 se dokáže, že ke každé basi $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ l. v. prostoru $\mathbf{V}_3$ existuje taková base $\{\mathbf{u}', \mathbf{v}', \mathbf{w}'\}$, že vektory $\mathbf{u}' - \mathbf{u}$, $\mathbf{v}' - \mathbf{v}$, $\mathbf{w}' - \mathbf{w}$ jsou lineárně nezávislé. Buďte tedy $A, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ a $A, \mathbf{u}', \mathbf{v}', \mathbf{w}'$ dvě base afinního prostoru $\mathbf{A}_3$ takové, že vektory $\mathbf{u}' - \mathbf{u}$, $\mathbf{v}' - \mathbf{v}$, $\mathbf{w}' - \mathbf{w}$ jsou lineárně nezávislé. Potom afinita $\mathscr{A}(A \to A,\ \mathbf{u} \to \mathbf{u}',\ \mathbf{v} \to \mathbf{v}',\ \mathbf{w} \to \mathbf{w}')$ je podle věty 2.9 určena jednoznačně. Bod A je zřejmě v této afinitě samodružný. Dokážeme, že $\mathscr{A}$ nemá dalších samodružných bodů.

Budiž X libovolný samodružný bod afinity $\mathscr{A}$. Pak je

$$X = A + t\mathbf{u} + r\mathbf{v} + s\mathbf{w}$$

a současně

$$X = X' = A + t\mathbf{u}' + r\mathbf{v}' + s\mathbf{w}' .$$

Porovnáním těchto vztahů zjistíme, že

$$t(\mathbf{u}' - \mathbf{u}) + r(\mathbf{v}' - \mathbf{v}) + s(\mathbf{w}' - \mathbf{w}) = \mathbf{o} .$$

Vzhledem k lineární nezávislosti vektorů $\mathbf{u}' - \mathbf{u}$, $\mathbf{v}' - \mathbf{v}$, $\mathbf{w}' - \mathbf{w}$ je $t = r = s = 0$ a $X = A$.

Věta 3.15. *Buďte $A; \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ a $A'; \mathbf{u}', \mathbf{v}', \mathbf{w}$ dvě base afinního prostoru $\mathbf{A}_3$ takové, že platí*

$$\mathbf{u}' = \mathbf{u}, \quad \mathbf{v}' = \mathbf{v}, \quad \mathbf{w}' = a\mathbf{u} + b\mathbf{v} + c\mathbf{w},$$
$$A' = A + p\mathbf{u} + q\mathbf{v} \tag{3.4}$$

při čemž $c \neq 0{,}1$ a aspoň jedno z čísel p, q je různé od nuly. Potom afinita $\mathscr{A}$ . . $(A \to A', \mathbf{u} \to \mathbf{u}', \mathbf{v} \to \mathbf{v}', \mathbf{w} \to \mathbf{w}')$ je afinita bez samodružných bodů, která je přímá pro $c > 0$, nepřímá pro $c < 0$.

Důkaz: Determinant afinity je zřejmě roven c, takže $\mathscr{A}$ je přímá afinita pro $c > 0$, nepřímá pro $c < 0$. Dokážeme nyní nepřímo, že $\mathscr{A}$ nemá samodružný bod. Budiž tedy X samodružným bodem afinity $\mathscr{A}$. Pak je jednak

$$X = A + t\mathbf{u} + r\mathbf{v} + s\mathbf{w} \tag{3.5}$$

a současně

(3.6) $$X = X' = A' + t\mathbf{u}' + r\mathbf{v}' + s\mathbf{w}'.$$

Dosadíme-li do (3.6) z (3.4), dostaneme

(3.7) $$X = A + (t + p + as)\,\mathbf{u} + (r + q + bs)\,\mathbf{v} + cs\mathbf{w}.$$

Porovnáme-li (3.7) s (3.5) dostaneme soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} t + p + as &= t\,, \\ r + q + bs &= r\,, \\ cs &= s\,. \end{aligned}$$

Protože $c \neq 1$ plyne z poslední rovnice, že $s = 0$ a z prvních dvou $p = q = 0$, což je spor s předpokladem. Tím je věta 3.15 dokázána.

(Dokončení)