Miroslav Novotný

O některých problémech souvisících s kardinální aritmetikou

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 6 (1961), No. 6, 314--318

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/137062

[5] R. L. Mössbauer: Uspechi fizičeskich nauk LXXII, 658 (1960).
[6] R. L. Mössbauer: Z. Phys. *151*, 124 (1958).
[7] F. L. Šapiro: Uspechi fizičeskich nauk LXXII, 685 (1960).
[8] H. J. Hay, I. P. Schiffer, T. E. Cranshaw, P. A. Egelstaff: Phys. Rev. Letters *4*, 165 (1960).
[9] T. E. Cranshaw, J. P. Schiffer, A. B. Whitehead: Phys. Rev. Letters *4*, 163 (1960).
[10] R. V. Pound, G. A. Rebka, Jr.: Phys. Rev. Letters *4*, 337 (1960).
[11] G. Cocconi, E. E. Salpeter: Phys. Rev. Letters *4*, 176 (1960).
[12] C. W. Scherwin, H. Fraunfelder, E. L. Garwin, E. Lüscher, S. Margulies, R. N. Peacock: Phys. Rev. Letters *4*, 399 (1960).

O NĚKTERÝCH PROBLÉMECH SOUVISÍCÍCH S KARDINÁLNÍ ARITMETIKOU

Miroslav Novotný, Brno

1. V klasické teorii množin byla aritmetika kardinálních čísel budována odděleně od aritmetiky ordinálních čísel. Americký matematik G. Birkhoff vybudoval teorii obecnější[1]) tak, že definoval kardinální součet, součin a mocninu a ordinální součet, součin a mocninu pro libovolné dvě uspořádané množiny. Ukázalo se přitom, že většina pravidel platných v aritmetice kardinálních i ordinálních čísel zůstává zachována. Birkhoffova zobecněná aritmetika umožňuje „počítat“ i s objekty, které do rámce klasické aritmetiky kardinálních a ordinálních čísel nezapadají.

V tomto článku si všimneme kardinálních operací a některých problémů, které s nimi souvisí.

Základním pojmem Birkhoffovy zobecněné aritmetiky je pojem uspořádané množiny. Množina A se nazývá *uspořádaná*, když je v ní definována binární relace $\leqq$, která má tyto vlastnosti:

1. Pro každé $x \in A$ platí $x \leqq x$.
2. Platí-li pro prvky $x, y \in A$ vztahy $x \leqq y$, $y \leqq x$, je $x = y$.
3. Platí-li pro prvky $x, y, z \in A$ vztahy $x \leqq y$, $y \leqq z$, je $x \leqq z$.

Jsou-li $x, y \in A$ takové prvky, že platí buďto $x \leqq y$, nebo $y \leqq x$, říkáme, že tyto prvky jsou *srovnatelné*; v opačném případě je nazýváme *nesrovnatelnými*. Je patrné, že každá podmnožina uspořádané množiny je uspořádaná. Je-li $x \leqq y$, $x \neq y$, píšeme $x < y$.

Příklad 1. Buď M neprázdná množina, $\mathfrak{M}$ systém všech jejích podmnožin. Pro množiny $A \in \mathfrak{M}$, $B \in \mathfrak{M}$ položme $A \leqq B$, když a jen když $A \subseteqq B$. Pak $\mathfrak{M}$ je uspořádaná množina.

Příklad 2. Buď M neprázdná množina. Pro její prvky x, y položme $x \leqq y$, když a jen když $x = y$. Takovou množinu nazveme podle Birkhoffa *kardinálním číslem*. Libovolné dva různé prvky takové množiny jsou nesrovnatelné.

Příklad 3. Buď M neprázdná uspořádaná množina, v níž není nesrovnatelných prvků. Pak M se nazývá *řetězec* nebo též *jednoduše uspořádaná množina*. Příkladem řetězce je množina složená z prvků 0, 1 takových, že $0 < 1$. Označujeme ji symbolem $\mathbf{2}$.

[1]) Sr. G. Birkhoff, *Lattice Theory*, rev. ed. 1948, Chap. I § 7,8; kniha byla přeložena do ruštiny pod názvem Теория структур, 1952. Další prameny z redakčních důvodů neuvádím. Zájemci o tuto problematiku se mohou obrátit přímo na autora článku.

Buďte A, B uspořádané množiny, $f(x)$ zobrazení množiny B do množiny A. Řekneme, že toto zobrazení je *izotonní*, jestliže pro každé $x, y \in B$, $x \leqq y$ platí $f(x) \leqq f(y)$.

Mějme dvě uspořádané množiny A, B. Nechť existuje prosté zobrazení f množiny B na množinu A, které je izotonní a má tu vlastnost, že také inverzní zobrazení f^{-1} je izotonní. Pak zobrazení f nazveme *izomorfismem* množiny B na množinu A. Množiny A, B nazýváme *izomorfními* a píšeme $A = B$. Zřejmě platí pro libovolné uspořádané množiny A, B, C:

1. Jest $A = A$.
2. Je-li $A = B$, je také $B = A$.
3. Je-li $A = B$, $B = C$, je také $A = C$.

Podle této definice rovnosti považujeme izomorfní množiny za rovné. To tedy znamená, že nepracujeme s uspořádanými množinami, nýbrž s jejich typy.

Příklad 4. Buďte A, B kardinální čísla. Rovnost $A = B$ platí podle naší definice, když a jen když existuje aspoň jeden izomorfismus množiny A na množinu B. Takový izomorfismus však existuje právě tehdy, když existuje aspoň jedno prosté zobrazení množiny A na množinu B, tedy právě tehdy, když množiny A, B mají stejná kardinální čísla ve smyslu klasické teorie. Proto můžeme kardinální číslo ve smyslu Birkhoffově (uspořádanou množinu) i jeho kardinální číslo ve smyslu klasickém (mohutnost této množiny) označovat stejným symbolem. Je-li tedy např. $\aleph$, resp. m, libovolná mohutnost (kardinální číslo v klasickém slova smyslu), značí $\aleph$, resp. m, také uspořádanou množinu o mohutnosti $\aleph$, resp. m, v níž jsou libovolné dva různé prvky nesrovnatelné. V dalším textu bude kardinální číslo značit vždy kardinální číslo ve smyslu Birkhoffově; kardinální číslo ve smyslu klasickém budeme nazývat mohutností.

V dalším textu rozumíme uspořádanou množinou vždy neprázdnou uspořádanou množinu. V následujících třech definicích buďte A, B uspořádané množiny; v první definici předpokládejme nadto, že A, B jsou disjunktní.

Množinu $A \cup B$ uspořádejme tímto způsobem: Uspořádání v množině A i v množině B zůstane a libovolné prvky $x \in A$, $y \in B$ jsou nesrovnatelné. Pak množinu $A \cup B$ uspořádanou podle tohoto pravidla nazýváme *kardinálním součtem* množin A, B a označujeme ji symbolem $A + B$.

Množinu $A \times B$ uspořádejme tímto způsobem: Pro $[x, y] \in A \times B$, $[x', y'] \in A \times B$ klademe $[x, y] \leqq [x', y']$, když a jen když $x \leqq x'$, $y \leqq y'$. Pak množinu $A \times B$ s tímto uspořádáním nazýváme *kardinálním součinem* množin A, B a označujeme ji symbolem AB.

V množině všech izotonních zobrazení množiny B do množiny A definujeme uspořádání podle tohoto pravidla:
Pro izotonní zobrazení f, g položíme $f \leqq g$, když a jen když platí $f(x) \leqq g(x)$ pro každé $x \in B$. (*)

Množinu všech těchto zobrazení uspořádanou podle uvedeného pravidla nazýváme pak *kardinální mocninou* se základem A a exponentem B a označujeme ji symbolem A^B.

Příklad 5. Buď $\aleph$ kardinální číslo. Pak $2^\aleph$ je množina všech funkcí definovaných na množině $\aleph$ a nabývajících jen hodnot 0, 1; je uspořádána podle pravidla (*). Je to tedy množina charakteristických funkcí všech podmnožin množiny $\aleph$ a ta je izomorfní se systémem všech podmnožin množiny $\aleph$ uspořádaným jako v příkladě 1.

Snadno se nahlédne toto: Je-li $A = C$, $B = D$, je $A + B = C + D$; podobné vztahy platí také pro kardinální součin a mocninu. Tedy operace s uspořádanými množinami definují jednoznačně operace s jejich typy. Kromě toho je zcela patrné, že aplikace těchto operací na kardinální čísla vede na klasické operace s mohutnostmi.

Pro kardinální operace platí tato pravidla:

Věta 1.
$$X + Y = Y + X\,, \qquad X + (Y + Z) = (X + Y) + Z\,,$$
$$XY = YX\,, \qquad X(YZ) = (XY)\,Z\,,$$
$$X(Y + Z) = XY + XZ\,, \qquad (X + Y)\,Z = XZ + YZ\,,$$
$$X^{Y+Z} = X^Y X^Z\,, \qquad (XY)^Z = X^Z Y^Z\,,$$
$$(X^Y)^Z = X^{YZ}\,.$$

Uvedeme nyní několik problémů, které souvisí s kardinální aritmetikou.

2. Ve všech odvětvích matematiky je velmi důležitý problém tzv. *univerzálních objektů*. Tak např. Cantorova rovinná křivka, která ke každé rovinné Cantorově křivce obsahuje homeomorfní část, se nazývá univerzální rovinná Cantorova křivka. Buď $\aleph$ libovolná nekonečná mohutnost; uspořádaná množina M se nazývá *$\aleph$-univerzální*, jestliže ke každé uspořádané množině N o mohutnosti $\aleph$ existuje v M izomorfní podmnožina s N.

Věta 2. *Kardinální mocnina $\mathbf{2}^\aleph$ je $\aleph$-univerzální uspořádaná množina.*

Tato univerzální množina má ovšem mohutnost $2^\aleph$. Z platnosti obecné hypotézy kontinua ($2^{\aleph_\nu} = \aleph_{\nu+1}$) se dá dokázat ke každé nekonečné mohutnosti $\aleph$ existence $\aleph$-univerzální uspořádané množiny o mohutnosti $\aleph$.

3. Jak jsme již uvedli, je $\mathbf{2}^\aleph$ systém všech funkcí nabývajících jen hodnot 0, 1 definovaných na množině $\aleph$ a uspořádaný podle pravidla (*). Na množině $\aleph$ definujeme libovolné dobré uspořádání $\preceq$, a množinu funkcí nabývajících na množině $\aleph$ jen hodnot 0, 1 uspořádejme lexikograficky, tj. podle tohoto pravidla: Pro funkce f, g položíme $f \prec g$, existuje-li prvek $x_0 \in \aleph$ tak, že $f(x_0) < g(x_0)$ a $f(x) = g(x)$ pro každé $x \in \aleph$, $x \prec x_0$. Pak množina všech těchto funkcí uspořádaná relací $\preceq$ je řetězec, který označíme ${}^\omega\mathbf{2}$. Identické zobrazení i je zřejmě prostým izotonním zobrazením množiny $\mathbf{2}^\aleph$ na množinu ${}^\omega\mathbf{2}$.

Je-li nyní A libovolná uspořádaná množina o mohutnosti $\aleph$, lze ji podle věty 2 vnořit do množiny $\mathbf{2}^\aleph$ a zobrazení i zobrazí množinu A prostě na jistou část množiny ${}^\omega\mathbf{2}$, tedy na jistý řetězec K. Platí tedy:

Věta 3. *Ke každé uspořádané množině A existuje aspoň jeden řetězec K a prosté izotonní zobrazení množiny A na množinu K.*

Poznámka. Sestrojený řetězec K se někdy nazývá douspořádáním (uspořádané) množiny A. Konstrukci lze dokonce zařídit tak, že pro libovolnou uspořádanou dvojici nesrovnatelných prvků $x, y \in A$ existuje řetězec $K_{x,y}$ a prosté izotonní zobrazení $h_{x,y}$ množiny A na množinu $K_{x,y}$ tak, že $h_{x,y}(x) < h_{x,y}(y)$.

Buď A uspořádaná množina, I množina. Nechť je ke každému $\iota \in I$ přiřazen řetězec K_ι a prosté izotonní zobrazení h_ι množiny A na množinu K_ι tak, že pro libovolné $x, y \in A$ platí $x \leqq y$, když a jen když je $h_\iota(x) \leqq h_\iota(y)$ při každém $\iota \in I$. Pak řekneme, že systém řetězců K_ι spolu se systémem zobrazení h_ι je *realizátor* uspořádání $\leqq$ množiny A. *Mohutností* tohoto realizátoru rozumíme mohutnost množiny I.

Věta 4. *Ke každé uspořádané množině existuje aspoň jeden realizátor jejího uspořádání.*

Důkaz. Ke každé uspořádané dvojici x, y nesrovnatelných prvků uspořádané množiny A přiřaďme podle poznámky řetězec $K_{x,y}$ a prosté izotonní zobrazení $h_{x,y}$ množiny A na množinu $K_{x,y}$ tak, že je $h_{x,y}(x) < h_{x,y}(y)$. Systém všech těchto řetězců se všemi těmito zobrazeními tvoří zřejmě realizátor uspořádání množiny A.

Mezi všemi realizátory uspořádání množiny A existuje aspoň jeden, který má nejmenší možnou mohutnost. Jeho mohutnost pak nazveme *dimenzí* množiny A a označíme ji symbolem $\dim A$.

Pojem dimenze uspořádané množiny a různá jeho zobecnění se studují v četných pracích. Z uveřejněných výsledků plyne zejména:

Věta 5. $\dim A$ *je nejmenší mohutnost* m, *k níž existuje řetězec* K *tak, že* A *je izomorfní s vhodnou podmnožinou množiny* K^m.

4. Kardinální mocniny tvaru K^A, kde K je řetězec, jsou zajímavé z několika důvodů. Především jsou mezi nimi zahrnuty mocniny tvaru $2^{\aleph}$, o nichž jsme mluvili v odst. 2. Kromě toho jsou mezi nimi zahrnuty mocniny tvaru K^m, jejichž důležitost jsme poznali v odst. 3. Konečně jsou mezi nimi zahrnuty mocniny tvaru E^A, kde E je množina všech reálných čísel při obvyklém uspořádání. Prvky této mocniny jsou izotonní reálné funkce, tedy reálné funkce, které zachovávají uspořádání na A. Jsou tedy prvky množiny E^A k množině A v podobném poměru jako aditivní a homogenní funkcionály definované na vektorovém prostoru k tomuto prostoru; je tedy E^A jakýsi adjungovaný prostor k množině A. Jsou-li A, B uspořádané množiny, h izotonní zobrazení množiny A do B, lze ke každému prvku $X \in E^B$ přiřadit prvek $Y \in E^A$ předpisem $Y(T) = X[h(T)]$ pro každé $T \in A$. Zobrazení $\tilde{h}$ přiřazující k prvku X prvek Y je *adjungované zobrazení* k zobrazení h a zobrazuje E^B do E^A. Je-li h izomorfismus množiny A na množinu B, je $\tilde{h}$ izomorfismus množiny E^B na množinu E^A. Přirozená je obrácená otázka, zda z izomorfismu množin E^B, E^A plyne izomorfismus množin A, B. Platí obecněji:

Věta 6. *Buď* K *řetězec aspoň o dvou prvcích,* A, B *uspořádané množiny. Je-li* $K^A = K^B$, *je* $A = B$.

5. Podobné otázky si můžeme položit také pro kardinální součet a součin: Za jakých předpokladů z rovnice

$$A + X = A + Y\,, \quad \text{resp.} \quad AX = AY\,,$$

plyne $X = Y$?

Pro kardinální součet je známo úplné řešení:

Pro prvky x, y uspořádané množiny A položme $x \equiv y$, když existuje v A konečný počet prvků

$$x = t_0, t_1, \ldots, t_n = y$$

tak, že prvky t_{i-1}, t_i jsou srovnatelné pro $i = 1, 2, \ldots, n$. Relace $\equiv$ je ekvivalence na A, a definuje tedy na množině A rozklad v třídy. (Dva prvky $x, y \in A$ leží v jedné a téže třídě, když a jen když $x \equiv y$.) Třídy tohoto rozkladu nazýváme *komponentami* množiny A. O množině A řekneme, že má *vlastnost* V, když ke každé její komponentě C existuje jen konečný počet komponent množiny A izomorfních s množinou C. Platí:

Věta 7. *Tyto dva výroky jsou ekvivalentní:*

(A) *Množina* A *má vlastnost* V.

(B) *A je taková uspořádaná množina, že pro jakékoliv uspořádané množiny* X, Y *z rovnice* $A + X = A + Y$ *plyne* $X = Y$.

Pro kardinální součin není známo úplné řešení; jsou známy jen některé částečné výsledky.

MODELY ATOMOVÝCH JADER II

JOSEF KVASNICA, Praha

A) ZOBECNĚNÝ MODEL JÁDRA

ÚVOD

V předešlém článku [1] jsme si ukázali, že model nezávislých částic se silnou spin-orbitální vazbou (slupkový model) dobře vysvětluje celou řadu vlastností jader v základním stavu, resp. v nejnižších excitovaných stavech. Tento úspěch slupkového modelu je však do značné míry zastíněn poměrně velkými odchylkami magnetických momentů od SCHMIDTOVÝCH hodnot a velkými rozdíly mezi teoretickými a experimentálními hodnotami elektrických kvadrupólových momentů jader.

Velké hodnoty kvadrupólových momentů celé řady jader ukazují, že značná část jader má spíše tvar rotačního elipsoidu než tvar koule. Magická jádra mají bezpochyby tvar koule (kvadrupólový moment těchto jader $Q = 0$), avšak sférický tvar jader je značně nestabilní, především u těžkých jader. Coulombovy síly se snaží jádro roztáhnout a síly povrchového napětí zmenšit jeho povrch. Tyto dvě síly se takřka kompenzují, takže stačí nevelká excitace aby jádro ztratilo sférický tvar. U těžkých jader pak může dojít k štěpení pod vlivem relativně slabých excitací (např. U_{92}^{235} po zachycení tepelného neutronu).

V slupkovém modelu se předpokládá, že nukleony se pohybují v daném sféricky symetrickém poli *navzájem nezávisle*. Je zřejmé, že takový přístup k problému má značně ohraničenou oblast použití. Jaderný potenciál, v němž se pohybují nukleony, není potenciálem fixovaného silového pole, nýbrž je určen pohybem nukleonů. Na druhé straně kapkový model je příliš klasickou aproximací, při níž se neberou v úvahu efekty, spojené s pohybem individuálních nukleonů. Skutečným poměrům v jádře bude proto lépe odpovídat dynamický kompromis mezi kapkovým modelem a modelem nezávislých částic. Takový model jádra navrhli a rozpracovali dánští fyzikové AAGE BOHR a BEN MOTTELSON. V literatuře bývá tento model označován různě: zobecněný, kolektivní, resp. sjednocený. Zde budeme užívat prvního z těchto termínů.

V zobecněném modelu se předpokládá, že jádro se skládá z vnitřní části tzv. *nuklidu*[1]), tvořené nukleony uzavřených slupek, a vnějších nukleonů, které se pohybují v poli nuklidu. Pohyb vnějších nukleonů v poli nuklidu však nelze chápat staticky, nýbrž dynamicky: v důsledku interakce vnějších nukleonů s nuklidem se nuklid deformuje a tyto deformace mají za následek změnu pole, v němž se pohybují vnější nukleony.

[1]) V naší literatuře není dosud ustálena terminologie pro tuto vnitřní část jádra, proto užitý termín „nuklid" nutno pokládat za prozatímní.