Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Jiří Fábera

O Carathéodoryově algebraizaci míry a integrálu

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 6 (1961), No. 5, 249--254

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/137060

O CARATHÉODORYOVĚ ALGEBRAIZACI MÍRY A INTEGRÁLU

JIŘÍ FÁBERA, Praha

Constantin Carathéodory, jeden z nejvýznamnějších matematiků našeho století, vytvořil ke konci svého života teorii míry a integrálu na Booleových σ-okruzích. Svůj postup nazývá „algebraizací". Úkolem tohoto článku je seznámit čtenáře Pokroků s osobností tohoto velikého vědce a se základními myšlenkami jeho algebraizace míry a integrálu.

Sotva by se našel matematik, který by neznal jméno CONSTANTINA CARATHÉODORYHO. Carathéodory byl bezesporu jedním z největších a nejznámějších matematiků poslední doby.

Narodil se roku 1873 v Berlíně. Pocházel z rodiny řeckého diplomata. Původně byl inženýrem. Po studiu na École polytechnique v Bruselu pracoval nejdříve jako inženýr v Egyptě při stavbě velkých přehrad na Nilu. V pracovních přestávkách, vyvolávaných každoročně velikými zátopami, horlivě studoval matematiku z děl SALMONOVÝCH-FIEDLEROVÝCH a ze spisů C. JORDANA. V této době se také rozhodl, že se bude věnovat výhradně matematice. Proto odchází roku 1900 do Berlína, kde studuje u SCHWARZE a FROBENIUSE; navštěvuje tu také přednášky PLANCKOVY a BAUSCHINGEROVY. Po dvou letech přechází do Göttingen, kde tehdy působili vyznační matematikové HILBERT, KLEIN, MINKOWSKI a ZERMELO. Zde získává v roce 1904 doktorát a o rok později se na naléhání Hilbertovo habilituje. Od roku 1908 působí jako profesor na různých vysokých školách, v Bonnu, v Hannoveru, ve Vratislavě, v Göttingen (jako nástupce Felixe Kleina), v Berlíně, ve Smyrně, v Athénách a konečně od roku 1924 trvale na mnichovské universitě.

Těžiště Carathéodoryovy tvůrčí činnosti spočívá v hluboce propracovaných matematických teoriích, kromě toho věnoval řadu svých prací optice, mechanice, pohybu planet; je také tvůrcem matematických základů termodynamiky.

Carathéodory zdaleka nebyl jenom tvůrčím matematikem úžasné geniality, ale i vynikajícím učitelem a obdivuhodným znalcem dějin matematiky. Znal podrobně díla FERMATOVA, HUYGHENSOVA, EULEROVA, LAGRANGEOVA, LEGENDROVA, HAMILTONOVA, JACOBIOVA atd. Ostatně dějiny vůbec byly jeho velikou láskou.

Je skutečně jen málo oborů matematiky, do nichž by Carathéodory tvořivě nezasáhl. Pojednání o jeho pracích, byť i skrovné, by vyžádalo mnoho místa. Carathéodory byl světovým badatelem např. v teorii analytických funkcí, v teorii konformního zobrazení, ve variačním počtu, v teorii diferenciálních rovnic aj. Zdá se však, že jednou z jeho nejoblíbenějších oblastí byla tehdy nová a rychle se vyvíjející teorie reálných funkcí. Zabýval se jí téměř po celý život a obohatil ji mnoha výsledky základního významu, jež jsou dodnes východiskem závažných prací. Vzpomeňme tu např. jen Carathéodoryovu teorii míry založenou na pojmu vnější míry (měrové funkce).

Ještě krátce před svou smrtí (zemřel 2. února 1950) přednáší v mnichovském matematickém kolokviu na téma „Délka a povrch".

Již v roce 1918 vydal Carathéodory světoznámou knihu o teroii reálných funkcí,[1]) obsahující jeden z prvních ucelených výkladů této teorie. Generace matematiků čerpaly z této knihy poučení o reálných funkcích. Tímto dílem se Carathéodory proslavil nejen jako geniální matematik, ale i jako velký mistr psaného slova. Kniha je napsána jasnou dikcí a jazykem vpravdě klasickým; tyto vlastnosti jsou ostatně přímo typické pro každou práci, která vyšla z Carathéodoryova pera.

Před druhou světovou válkou Carathéodory tuto knihu úplně přepracoval. Látka byla rozvržena do tří svazků, z nichž zejména třetí, pojednávající o míře a integrálu, byl napsán z hlediska zcela nového. Vyšel však pouze svazek první[2]), vydání zbývajících dvou svazků znemožnily válečné poměry.

Carathéodory tehdy intenzívně pracoval na své „algebraizaci" míry a integrálu. Publikoval svoje výsledky v řadě prací a svou teorii souhrnně vyložil v právě zmíněném třetím svazku knihy o reálných funkcích, k jehož vydání, jak již řečeno, nedošlo. Připravil proto rukopis samostatné knihy o algebraizaci míry a integrálu. Tato kniha se stala jeho posledním velikým dílem. Se vzácným mistrovstvím tu podal výklad této teorie. Bylo mu ještě dopřáno rukopis dokončit, avšak vydání knihy se již nedožil; vyšla až v roce 1956, tedy šest let po jeho smrti[3]).

V čem záleží ona Carathéodoryovská „algebraizace"? Tuto otázku osvětlím v další části svého článku. Jde mi o to, abych čtenáře aspoň zběžně seznámil s touto tendencí, jež se projevuje ostatně i v jiných odvětvích matematiky, např. v topologii[4]).

Řekněme si nejdříve zhruba, oč jde. Při definici integrálu se zpravidla vychází z předpokladu, že integračním oborem je bodová množina (např. interval jednorozměrný nebo vícerozměrný, křivka, plocha apod.), že integrační obor a některé jeho části dovedeme „měřit" (např. délkou, obsahem, objemem, povrchem apod.) a že integrand je reálnou funkcí (např. jedné nebo více reálných proměnných) definovanou na integračním oboru. Vzpomeňte si např. na definici jednorozměrného Riemannova integrálu.

Carathéodory ukázal, že takový předpoklad je zbytečně silný, že ke konstrukci integrálu stačí jen některé vlastnosti bodových množin a reálných funkcí. Přesněji vyjádřeno, ukázal, že ke konstrukci integrálu stačí, aby integrační obor, resp. integrand byl prvkem množiny jisté struktury definované soustavou axiomů[5]). Při tom se jeví jako fundamentální struktura částečného uspořádání. Vyložíme si nyní Carathéodoryovův postup podrobněji.

---

[1]) *Vorlesungen über reelle Funktionen*, Verlag B. G. Teubner, Leipzig und Berlin, 1918.

[2]) *Reelle Funktionen I*, Verlag B. G. Teubner, Leipzig und Berlin, 1939.

[3]) *Mass und Integral und ihre Algebraisierung*, Birkhäuser Verlag Basel und Stuttgart, 1956.

[4]) Viz např. G. Nöbeling, *Grundlagen der analytischen Topologie*, Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1954.

[5]) O pojmu struktury množiny, o axiomatické metodě a jejím významu pojednává formou velmi přístupnou článek N. Bourbakiho *L'Architecture des mathématiques*, jehož český překlad je otištěn v tomto časopise, PMFA *5* (1960), 509—518, pod názvem Architektura matematiky. Viz též článek *O matematické logice* (je to český překlad úvodu knihy П. С. Новиков, Элементы математической логики, Moskva 1959), rovněž v tomto časopise, PMFA *5* (1960), 629—643.

1. ČÁSTEČNÉ USPOŘÁDÁNÍ

Nechť $\boldsymbol{M}$ je neprázdná množina; její prvky označujeme malými písmeny latinské abecedy, např. $a, b, \ldots$. Říkáme, že množina $\boldsymbol{M}$ je *částečně uspořádaná* (obšírněji, že má strukturu částečného uspořádání), jestliže pro některé dvojice prvků z $\boldsymbol{M}$ je definována relace — použijeme pro ni znaku $\prec$ — tak, že jsou splněny tyto axiomy:

AXIOM A. Pro každý prvek a z $\boldsymbol{M}$ je $a \prec a$ (tzv. zákon reflexivní).

AXIOM B. Je-li pro tři prvky a, b, c z $\boldsymbol{M}$ $a \prec b$ a $b \prec c$, potom je i $a \prec c$ (tzv. zákon tranzitivní).

AXIOM C. Je-li pro dva prvky a, b z $\boldsymbol{M}$ zároveň $a \prec b$ a $b \prec a$, je $a = b$, při čemž $a = b$ znamená, že písmeny a a b je označen týž prvek množiny $\boldsymbol{M}$.

Místo $a \prec b$ se také píše $b \succ a$. Všimněte si, že relace $\prec$ nemusí být definována pro každou dvojici prvků z $\boldsymbol{M}$. Je-li $a \prec b$, vyjadřujeme to obvykle slovy „a je částí b“ nebo „a je pod b“ apod.

Jednoduchý příklad částečně uspořádané množiny nám poskytuje množina reálných čísel, stanovíme-li, že pro dvě reálná čísla a, b je $a \prec b$ právě tehdy, je-li $a \leqq b$. Množina reálných čísel se často rozšiřuje o dva (nevlastní) elementy $-\infty$ a $+\infty$, pro něž se stanoví, že $-\infty \leqq a \leqq +\infty$ pro každé reálné číslo a. V dalším budeme vždy pracovat s takto rozšířenou množinou reálných čísel.

Dalším pro nás důležitým příkladem částečně uspořádané množiny je systém všech podmnožin $\boldsymbol{A}$ nějaké množiny $\boldsymbol{M}$[6]), interpretujeme-li relaci $\prec$ jako množinovou inkluzi, tj. určíme-li, že pro dvě podmnožiny $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ množiny $\boldsymbol{M}$ je $\boldsymbol{A} \prec \boldsymbol{B}$ právě tehdy, když každý prvek množinp $\boldsymbol{A}$ je také prvkem množiny $\boldsymbol{B}$.

Uvažujme ještě množinu všech reálných funkcí f definovaných na nějaké neprázdné množině $\boldsymbol{A}$ (např. na intervalu číselné osy). Určíme-li, že pro dvě takové funkce f, g je $f \prec g$ právě tehdy, když $f(x) \leqq g(x)$ pro každý prvek x z $\boldsymbol{A}$, získáme opět příklad částečně uspořádané množiny. Zde se obvykle píše $f \leqq g$ místo $f \prec g$.

2. INFIMUM A SUPREMUM

Obdobně jako v teorii reálných čísel zavádí se pojem infima a suprema pro částečně uspořádané množiny. Nechť $\boldsymbol{M}$ je částečně uspořádaná množina a $\boldsymbol{N}$ nějaká její neprázdná podmnožina (není vyloučen případ $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{N}$). Prvek u z $\boldsymbol{M}$ nazýváme *infimem* podmnožiny $\boldsymbol{N}$, jestliže platí:

1. $u \prec a$ pro každý prvek a z $\boldsymbol{N}$;
2. je-li pro prvek u' z $\boldsymbol{M}$ rovněž $u' \prec a$ pro každý prvek a z $\boldsymbol{N}$, potom $u' \prec u$.

Infimum podmnožiny $\boldsymbol{N}$ označujeme symbolem inf $\boldsymbol{N}$[7]).

Analogicky definujeme supremum: prvek v z $\boldsymbol{M}$ nazýváme *supremem* podmnožiny $\boldsymbol{N}$, jestliže platí:

1. $a \prec v$ pro každý prvek a z $\boldsymbol{N}$;
2. je-li pro prvek v' z $\boldsymbol{M}$ rovněž $a \prec v'$ pro každý prvek a z $\boldsymbol{N}$, potom $v \prec v'$.

[6]) Do tohoto systému patří tedy i prázdná množina.

Supremum podmnožiny $\boldsymbol{N}$ označujeme symbolem sup $\boldsymbol{N}$[7]).

Infimum a supremum jsou jednoznačně definovány; to je triviální důsledek axiomu C částečného uspořádání (čl. 1).

Všimněte si, že v prvním z příkladů částečně uspořádané množiny popsaných v čl. 1 (množina reálných čísel) se pojmy infima a suprema kryjí s těmito pojmy zavedenými pro reálná čísla, rozumí se s tím přirozeným doplněním, že infimum množiny reálných čísel, která není zdola omezená, je $-\infty$ a supremum množiny reálných, která není shora omezená, je $+\infty$. V druhém příkladě odpovídá infimu množinový průnik a supremu množinové sjednocení. Konečně ve třetím příkladě je pro množinu $\boldsymbol{F}$ reálných funkcí definovaných na množině $\boldsymbol{A}$ infimem, resp. supremem reálná funkce u, resp. v definovaná v každém bodě x z $\boldsymbol{A}$ vztahem $u(x) = \inf\limits_{f \in \boldsymbol{F}} f(x)$, resp. $v(x) = \sup\limits_{f \in \boldsymbol{F}} f(x)$, kde na pravé straně je infimum, resp. supremum množiny reálných čísel. V každé z těchto částečně uspořádaných množin existuje infimum a supremum každé její podmnožiny.

3. SYSTÉM SOMAT

Připojením několika dalších vhodných axiomů k axiomům A, B, C z čl. 1 dostaneme částečně uspořádanou množinu, jež má řadu vlastností společných s částečně uspořádanou množinou všech podmnožin nějaké množiny (čl. 1). Takovou částečně uspořádanou množinu nazývá Carathéodory *systémem somat*[8]) a její prvky *somata*[9]).

V dodatku ke zmíněné knize definuje Carathéodory systém somat originální — v ostatní literatuře neobvyklou — soustavou axiomů. Uveďme si zde tyto axiomy.

Množinu $\boldsymbol{S}$ nějakých prvků nazveme *systémem somat*, její prvky nazveme *somata* a budeme je označovat velkými písmeny latinské abecedy $A, B, C, \ldots, X, Y, \ldots$, jestliže má vlastnosti vymezené těmito axiomy:

AXIOM I. V $\boldsymbol{S}$ je zavedena relace částečného uspořádání vyhovující dále uvedeným axiomům II—V.

Pro tuto relaci částečného uspořádání použijeme znaku $\subset$; $A \subset B$ čteme: „soma A je částí somatu B“.

AXIOM II. V $\boldsymbol{S}$ existuje inf $\boldsymbol{S}$.

Axiomem II postulované inf $\boldsymbol{S}$ se označuje znakem O a nazývá se *prázdným somatem*. Pro každé soma A z $\boldsymbol{S}$ tedy platí $O \subset A$. Dvě somata A, B nazveme *disjunktními*, jestliže z $C \subset A$ a $C \subset B$ plyne $C = O$.

AXIOM III. Pro každou nejvýše spočetnou podmnožinu $\boldsymbol{M}$ množiny $\boldsymbol{S}$ existuje v $\boldsymbol{S}$ supremum.

Tím se ovšem nevylučuje existence suprema i nespočetných podmnožin množiny $\boldsymbol{S}$. V systému somat nazýváme supremum nějaké množiny somat $\boldsymbol{M}$

[7]) Předně pro každou podmnožinu částečně uspořádané množiny nemusí infimum, resp. supremum existovat. Za druhé je třeba si uvědomit, že pojem infima a suprema závisí na zavedené relaci částečného uspořádání; zavedeme-li jinak relaci částečného uspořádání, může týž prvek přirozeně ztratit charakter infima, resp. suprema.

[8]) Pro čtenáře, který je obeznámen s teorií Booleových okruhů (algeber), uvádím, že systém somat tvoří Booleův σ-okruh.

[9]) Z řečtiny: $\tau\grave{o}\,\sigma\tilde{\omega}\mu\alpha$ = těleso.

sjednocením somat množiny $\boldsymbol{M}$ a označujeme je — podobně jako v teorii množin — znakem $\bigcup_{A \in \boldsymbol{M}} A$, popřípadě $A \cup B$, obsahuje-li $\boldsymbol{M}$ pouze dvě somata A a B, nebo $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ či $\bigcup_{k=1}^{n} A_k$, jestliže se $\boldsymbol{M}$ skládá z konečného počtu somat $A_1, A_2, \ldots, A_n$; je-li $\boldsymbol{M}$ spočetnou množinou, dají se její prvky očíslovat přirozenými čísly, a proto se v tomto případě místo $\bigcup_{A \in \boldsymbol{M}} A$ píše také $A_1 \cup A_2 \cup \ldots$ nebo $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$.

AXIOM IV. Je-li soma C disjunktní se somatem A i se somatem B, je C disjunktní i se sjednocením $A \cup B$.

AXIOM V. Ke každým dvěma somatům A, B existuje aspoň jedno soma X, které je disjunktní se somatem A a pro které platí $A \cup X = A \cup B$.

Systém všech podmnožin nějaké množiny částečně uspořádaný vzhledem k množinové inkluzi jistě tvoří systém somat. Existují však systémy somat, které nelze interpretovat jako systém podmnožin nějaké množiny.

Není úkolem tohoto článku odvozovat důsledky z axiomů I—V potřebné pro budování teorie míry a integrálu. Čtenář, který by se o to hlouběji zajímal, sáhne jistě ke Carathéodoryově knize; najde tam i elegantně dokázanou vzájemnou nezávislost axiomů I—V. Zde jen tolik, že z axiomů I—V plyne, že v každém systému somat existuje i infimum každé nejvýše spočetné množiny $\boldsymbol{M}$ somat; nazýváme je *průnikem* somat množiny $\boldsymbol{M}$ a označujeme je symbolem $\bigcap_{A \in \boldsymbol{M}} A$. Může ovšem existovat i průnik (tj. infimum) nespočetné množiny somat. Obdobně jako pro sjednocení somat používá se pro průnik dvou somat A, B symbolu $A \cap B$, pro průnik konečného počtu somat $A_1, A_2, \ldots, A_n$ symbolu $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$ nebo $\bigcap_{k=1}^{n} A_k$; konečně průnik spočetné množiny somat se označuje symbolem $A_1 \cap A_2 \cap \ldots$ nebo $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$. Ke každým dvěma somatům A, B existuje právě jedno soma C tak, že B, C jsou disjunktní $C \subset A$ a $C \cup (A \cap B) = A$. Soma C nazýváme *rozdílem* somat A a B a značíme je $A - B$. Dále z axiomů I—V plyne, že se sjednocením, průnikem a rozdílem somat se „počítá" tak jako se stejně pojmenovanými operacemi množinovými.

Pozoruhodné je především to, že vlastnoti vyjádřené těmito pěti axiomy úplně stačí k tomu, aby bylo možné na somatech definovat tzv. *funkci místa* a její integrál. Těmto otázkám bude věnována druhá a třetí část tohoto článku.

4. MĚROVÁ FUNKCE

Podobně jako měříme intervaly na číselné ose, křivky v rovině nebo prostoru jejich délkou, rovinné a prostorové obory obsahem a objemem, dají se měřit somata nějakého systému somat. Carathédory to provádí způsobem dnes již klasickým, kterým proslavil svůj matematický talent jiz ve dvacátých letech. Nastíním nyní tento postup.

Mějme nějaký systém somat $\boldsymbol{S}$. Reálnou funkci φ definovanou na $\boldsymbol{S}$, pro kterou platí

1. $\varphi(O) = 0$,

2. je-li soma A pokryto nejvýše spočetně mnoha somaty $A_1, A_2, \ldots$[10]), je

$$\varphi(A) \leqq \sum_{k=1}^{\infty} \varphi(A_k)\,, \tag{1}$$

nazýváme (Carathéodoryovou) *měrovou funkcí.*

Je tedy zřejmé, že měrová funkce nemůže nabývat záporných hodnot. Je totiž $O \subset A$ pro každé soma A a potom podle 1 a 2 máme $0 = \varphi(O) \leqq \varphi(A)$. Pro některá somata A může být i $\varphi(A) = +\infty$. Řada na pravé straně nerovnosti (1) je tedy řadou s nezápornými členy, a proto její součet, konečný či nekonečný, nezávisí na uspořádání členů.

Příklady měrových funkcí poznáme v dalších článcích.

5. MĚŘITELNOST

Dalším základním pojmem je pojem měřitelného somatu. Soma U z $\mathbf{S}$ se nazývá *měřitelným měrovou funkcí* φ, stručně φ-*měřitelným*, jestliže pro každé A z $\mathbf{S}$ platí

$$\varphi(A) = \varphi(A \cap U) + \varphi(A - U)\,. \tag{2}$$

Prázdné soma O je zřejmě měřitelné každou měrovou funkcí φ definovanou na $\mathbf{S}$. Pro každé soma A z $\mathbf{S}$ je totiž $A \cap O = O$, $A - O = A$, načež $\varphi(A) = \varphi(O) + \varphi(A) = \varphi(A \cap O) + \varphi(A - O)$.

Význam pojmu měřitelnosti poznáme z dalšího výkladu.

Množinu všech φ-měřitelných somat označme $\mathbf{M}_\varphi$. Právě jsme si ukázali, že prázdné soma O patří do $\mathbf{M}_\varphi$ ať je φ jakákoliv měrová funkce definovaná na $\mathbf{S}$. Ukazuje se, že sjednocení a průnik nejvýše spočetné množiny φ-měřitelných somat, jakož i rozdíl dvou φ-měřitelných somat je opět φ-měřitelným somatem. Říkáme, že $\mathbf{M}_\varphi$ tvoří σ-okruh somat. Měrová funkce φ se chová na $\mathbf{M}_\varphi$ velmi „příjemně". Pro každou posloupnost $A_1, A_2, \ldots$ disjunktních somat, tj. somat, pro něž je $A_i \cap A_j = O$, kdykoliv $i \neq j$, platí

$$\varphi\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi(A_i)\,. \tag{3}$$

Měrová funkce φ je na σ-okruhu $\mathbf{M}_\varphi$ φ-měřitelných somat, jak říkáme, *σ-aditivní* neboli je *měrou.*

Rovnost (3) vyjadřuje zřejmě právě onu vlastnost, kterou požadujeme např. na délce, obsahu, objemu, velikosti hmoty, velikosti elektrického náboje apod. Proto je jistě přirozené, že se především zkoumá struktura σ-okruhu měřitelných somat.

Zdálo by se snad být účelnějším vyšetřovat rovnou σ-aditivní měrové funkce neboli míry. Takovým způsobem také skutečně někteří autoři postupují. Má to svoje výhody i nevýhody. Zejména při řešení otázky existence měr a jejich konstrukce se nelze dost dobře obejít bez měrových funkcí.

(Pokračování)

[10]) To znamená, že soma A je částí sjednocení somat $A_1, A_2, \ldots$, tj. $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$.