Dalibor Klucký

Afinity v třírozměrném afinním prostoru [Dokončení]

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 5 (1960), No. 2, 147--157

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/137046

[4] Dorfman, Samuelsen, Solow: *Linear Programming and Economic Analysis*, New York 1958.
[5] Churchmann, Ackoff, Arnoff: *Introduction to Operations Research*, New York 1957.
[6] Habr: *Lineární programování — výklad pro ekonomy*; Praha, 1958.
[7] Pokorná: *Instruční síť pro simplexovou metodu*; Zpráva Výzkumného ústavu matematických strojů, 1958.

AFINITY V TŘÍROZMĚRNÉM AFFINNÍM PROSTORU

(Dokončení)

Dalibor Klucký, *VŠP* Praha

4. Samodružné směry afinity

Podle věty 2.7 je obrazem každé lineární soustavy vektorů v afinitě opět lineární soustava vektorů téže dimense. Víme, že každá lineární soustava vektorů dimense 1 je směrem určité přímky a naopak směr každé přímky je lineární soustavou vektorů dimense 1. Budeme proto nadále užívat místo termínu lineární soustava vektorů dimense 1 užívat většinou termínu směr. Je-li $\mathbf{x}$ nenulový vektor, $\mathscr{A}$ afinní zobrazení, potom nutná a postačující podmínka pro to, aby směr $\mathbf{x}$ byl v afinitě $\mathscr{A}$ samodružný je, aby

$$\mathscr{A}(\mathbf{x}) = k\mathbf{x}, \quad k \neq 0 . \tag{4.1}$$

Určit samodružné směry afinity $\mathscr{A}$ znamená tedy určit všechny lineárně nezávislé vektory, které vyhovují rovnici (4.1).

Pro počet samodružných směrů afinity jsou tyto logické možnosti:

1. Afinita nemá žádný samodružný směr.
2. Afinita má jeden samodružný směr.
3. Afinita má dva různé samodružné směry.
4. Afinita má tři různé samodružné směry, které

a) nenáležejí témuž dvojsměru[8])

b) náležejí témuž dvojsměru.

V případě b) je uvedený dvojsměr dvojsměrem samodružných směrů podle věty 3.6

5. Afinita má čtyři různé samodružné směry:

a) Všechny čtyři náležejí témuž dvojsměru; pak tento případ splývá s 4b).

b) Všechny čtyři nenáležejí témuž dvojsměru, avšak tři z nich — označme je $\{\mathbf{u}\}$, $\{\mathbf{v}\}$, $\{\mathbf{w}\}$ náležejí témuž dvojsměru např. $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$. Podle věty 3.5 je každý směr dvojsměru $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ samodružný. Afinita má tedy dvojsměr samodružných směrů a další samodružný směr, který tomuto dvojsměru nenáleží.

c) Žádné tři nenáleží témuž dvojsměru, potom podle věty 3.7 je každý směr samodružný.

Kdyby v případě 5b) měla afinita ještě další samodružný směr, pak by měla všechny směry za samodružné, což je případ 5c).

Úkolem 4. části tohoto článku je zjistit, které z uvedených logických možností pro samodružné směry mohou nastat. Při tom budeme zjišťovat existenci jednotlivých případů v opačném pořadí, než jsou vyjmenovány logické možnosti.

[8]) Název dvojsměr budeme užívat pro lineární soustavu vektorů dimense 2 z téhož důvodu jako názvu směr pro lineární soustavu vektorů dimense 1.

Je zřejmé, že identita má všechny směry samodružné. Existují však neidentické afinity, které mají všechny směry samodružné: Buďte $A \neq A'$ dva body prostoru $\mathbf{A}_3$, $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ base l. v. prostoru $\mathbf{V}_3$. Afinita $\mathscr{A}(A \to A', \mathbf{u} \to \mathbf{u}, \mathbf{v} \to \mathbf{v}, \mathbf{w} \to \mathbf{w})$ je neidentická afinita, avšak každý vektor je jejím samodružným vektorem podle věty 3.4. Proto je také každý směr samodružný.

Věta 4.1. *Budiž $\mathscr{A}$ afinita, která převádí basi*

$$A, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$$

v basi

$$A', k\mathbf{u}, k\mathbf{v}, h\mathbf{w} \quad k \neq 0, h \neq 0{,}1, h \neq k .$$

Pak má afinita $\mathscr{A}$ právě dvojsměr $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ samodružných směrů a samodružný směr $\{\mathbf{w}\}$, který nenáleží dvojsměru $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$.

Důkaz: I. Budiž $\{\mathbf{x}\}$ směr, který náleží dvojsměru $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$. Pak $\mathbf{x} = x\mathbf{u} + y\mathbf{v}$, proto $\mathscr{A}(\mathbf{x}) = x\mathscr{A}(\mathbf{u}) + y\mathscr{A}(\mathbf{v}) = x(k\mathbf{u}) + y(k\mathbf{v}) = k(x\mathbf{u} + y\mathbf{v}) = k\mathbf{x}$. Podle věty 3.5 je směr $\{\mathbf{x}\}$ samodružný. Podle téže věty je i směr $\{\mathbf{w}\}$ samodružným.

II. Zbývá dokázat, že afinita již nemá žádných dalších samodružných směrů. Budiž tedy $\{\mathbf{x}\}$ libovolný samodružný směr afinity $\mathscr{A}$. Pak

$$\mathbf{x} = t\mathbf{u} + r\mathbf{v} + s\mathbf{w} .$$

Avšak $\mathscr{A}(\mathbf{x}) = k'\mathbf{x}$, $k' \neq 0$. Proto platí jednak

$$k'\mathbf{x} = (k't)\,\mathbf{u} + (k'r)\,\mathbf{v} + (k's)\,\mathbf{w}$$

jednak

$$k'\mathbf{x} = \mathscr{A}(\mathbf{x}) = (kt)\,\mathbf{u} + (kr)\,\mathbf{v} + (hs)\,\mathbf{w} .$$

Porovnáním obou vztahů dostaneme soustavu homogenních rovnic

$$(k - k')\,t = 0 ,$$
$$(k - k')\,r = 0 ,$$
$$(h - k')\,s = 0 .$$

Aspoň jedno z čísel $k - k'$ a $h - k'$ je různé od nuly, neboť v opačném případě by bylo $k = k' = h$, což je spor s předpokladem. Proto je buď $s = 0$ a $\{\mathbf{x}\} \subset \subset \{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$, nebo $t = r = 0$ a $\{\mathbf{x}\} = \{\mathbf{w}\}$, což se mělo dokázat.

Věta 4.2. *Budiž $\mathscr{A}$ afinita, která převádí basi*

$$A, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$$

v basi

$$A', k\mathbf{u}, \mathbf{u} + k\mathbf{v}, k\mathbf{w}, k \neq 0 .$$

Pak má afinita $\mathscr{A}$ právě dvojsměr $\{\mathbf{u}, \mathbf{w}\}$ samodružných směrů.

Důkaz: I. Budiž $\{\mathbf{x}\} \subset \{\mathbf{u}, \mathbf{w}\}$. Potom $\mathbf{x} = x\mathbf{u} + z\mathbf{w}$, $\mathscr{A}(\mathbf{x}) = x\mathscr{A}(\mathbf{u}) + z\mathscr{A}(\mathbf{w}) = x(k\mathbf{u}) + z(k\mathbf{w}) = k(x\mathbf{u} + z\mathbf{w}) = k\mathbf{x}$ a tedy $\{\mathbf{x}\}$ je samodružný směr.

II. Budiž nyní $\{\mathbf{x}\}$ libovolný samodružný směr afinity $\mathscr{A}$: Potom je

$$\mathbf{x} = t\mathbf{u} + r\mathbf{v} + s\mathbf{w} .$$

Avšak $\mathscr{A}(\mathbf{x}) = k'\mathbf{x}$, $k' \neq 0$. Proto je jednak

$$k'\mathbf{x} = (k't)\,\mathbf{u} + (k'r)\,\mathbf{v} + (k's)\,\mathbf{w}$$

jednak

$$k'\mathbf{x} = \mathscr{A}(\mathbf{x}) = (kt + r)\,\mathbf{u} + (kr)\,\mathbf{v} + (ks)\,\mathbf{w} .$$

Porovnáním obou vztahů obdržíme soustavu homogenních rovnic

$$\begin{aligned}(k-k')\,t + r \qquad\quad &= 0\,,\\ (k-k')\,r \qquad &= 0\,,\\ (k-k')\,s &= 0\,.\end{aligned}$$

Aby soustava měla netriviální řešení, musí být $k - k' = 0$ a tedy $r = 0$. To znamená, že $\{\mathbf{x}\} \subset \{\mathbf{u}, \mathbf{w}\}$.

Protože důkazy následujících tří vět jsou analogické důkazům vět 4.1 a 4.2 přenecháváme je čtenáři:

Věta 4.3. *Budiž $\mathscr{A}$ afinita, která převádí basi*

$$A, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$$

v basi

$$A', k\mathbf{u}, h\mathbf{v}, m\mathbf{w}, \quad k, h, m \neq 0\,,$$
$$k \neq h \neq m \neq k\,.$$

Pak má afinita $\mathscr{A}$ právě tři samodružné směry $\{\mathbf{u}\}$, $\{\mathbf{v}\}$, $\{\mathbf{w}\}$.

Věta 4.4. *Budiž $\mathscr{A}$ afinita, která převádí basi*

$$A, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$$

v basi

$$A', k\mathbf{u}, \mathbf{u} + k\mathbf{v}, h\mathbf{w}, \quad k, h \neq 0, \quad k \neq h\,.$$

Pak má afinita $\mathscr{A}$ právě dva samodružné směry $\{\mathbf{u}\}$ a $\{\mathbf{w}\}$.

Věta 4.5. *Budiž $\mathscr{A}$ afinita, která převádí basi*

$$A, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$$

v basi

$$A', k\mathbf{u}, \mathbf{u} + k\mathbf{v}, \mathbf{v} + k\mathbf{w}\,.$$

Pak má afinita $\mathscr{A}$ právě jeden samodružný směr $\{\mathbf{u}\}$.

Zbývá rozřešit otázku, zda-li existují afinity bez samodružných směrů. Odpověď dává věta:

Věta 4.6. *Každá afinita prostoru $\mathbf{A}_3$ má aspoň jeden samodružný směr.*

Důkaz: Budiž $\mathscr{A}$ libovolná afinita, $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ base l. v. prostoru $\mathbf{V}_3$, $\mathbf{u}', \mathbf{v}', \mathbf{w}'$ její obraz. Vyjádřeme nejprve vektory $\mathbf{u}', \mathbf{v}', \mathbf{w}'$ pomocí base $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}' &= a_{11}\mathbf{u} + a_{12}\mathbf{v} + a_{13}\mathbf{w}\,,\\ \mathbf{v}' &= a_{21}\mathbf{u} + a_{22}\mathbf{v} + a_{23}\mathbf{w}\,,\\ \mathbf{w}' &= a_{31}\mathbf{u} + a_{32}\mathbf{v} + a_{33}\mathbf{w}\,.\end{aligned} \tag{4.2}$$

Je-li $\mathbf{x}$ base samodružného směru, je $\mathbf{x} \neq \mathbf{o}$, $\mathbf{x}' = \mathscr{A}(\mathbf{x}) = k\mathbf{x}$, $k \neq 0$. Vyjádříme-li vektor $\mathbf{x}$ pomocí vektorů $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ je

$$\mathbf{x} = x\mathbf{u} + y\mathbf{v} + z\mathbf{w}\,,$$

při tom aspoň jedno z čísel x, y, z je různé od nuly. Proto je

$$\mathbf{x}' = x\mathbf{u}' + y\mathbf{v}' + z\mathbf{w}'\,.$$

Ze samodružnosti směru $\{\mathbf{x}\}$ vyplývá

$$(kx)\,\mathbf{u} + (ky)\,\mathbf{v} + (kz)\,\mathbf{w} = x\mathbf{u}' + y\mathbf{v}' + z\mathbf{w}'\,. \tag{4.3}$$

Obráceně, jsou-li čísla x, y, z netriviálním řešením rovnice (4.3) a $k \neq 0$, je směr $\{x\}$ v afinitě $\mathscr{A}$ samodružný. Vyšetřujme tedy nutnou a postačující podmínku pro to, aby rovnice (4.3) měla netriviální řešení pro nějaké $k \neq 0$.

Dosadíme-li do (4.3) z rovnic (4.2), dostaneme po úpravě soustavu homogenních rovnic, která je ekvivalentní s rovnicí (4.3):

$$\begin{aligned} (a_{11} - k)\,x + \quad a_{21}y + a_{31}z &= 0\,, \\ a_{12}x + (a_{22} - k)y + a_{32}z &= 0\,, \\ a_{13}x + \quad a_{23}y + (a_{33} - k)\,z &= 0\,. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Soustava (4.4) má netriviální řešení tehdy a jen tehdy, je-li její determinant D roven nule. To nastane právě tehdy, bude-li reálné číslo k řešením rovnice $D = 0$. Tato rovnice je rovnicí 3. stupně s reálnými koeficienty, takže má vždy aspoň jedno reálné řešení k. Je vždy $k \neq 0$, neboť pro $k = 0$ by byl determinant afinity $\mathscr{A}$ roven nule, což není možné. Věta 4.6 je dokázána.

Pro samodružné směry afinního zobrazení jsou tedy možné následující případy:

I. Afinita má všechny směry samodružné.

II. Afinita má právě dvojsměr samodružných směrů a samodružný směr, který tomuto dvojsměru nenáleží.

III. Afinita má právě dvojsměr samodružných směrů.

IV. Afinita má právě tři navzájem různé samodružné směry, které nenáležejí žádnému dvojsměru.

V. Afinita má právě dva navzájem různé samodružné směry.

VI. Afinita má právě jeden samodružný směr.

Z rámce tohoto článku se vymyká studium samodružných dvojsměrů afinity. Provedeme alespoň přehlednou klasifikaci afinit podle samodružných dvojsměrů. (V následujícím textu rozumíme např. afinitou typu III. afinitu, která má právě dvojsměr samodružných směrů apod.)

I. Afinita typu I. má každý dvojsměr samodružný.

II. Označíme-li $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ dvojsměr samodružných směrů afinity typu II. a $\{\mathbf{w}\}$ samodružný směr této afinity, která nenáleží dvojsměru $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$, pak množina samodružných dvojsměrů této afinity se skládá ze všech dvojsměrů, které obsahují směr $\{\mathbf{w}\}$ a z dvojsměru $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$.

III. Množina samodružných dvojsměrů afinity typu III. se skládá ze všech dvojsměrů obsahujících jistý směr $\{\mathbf{t}\}$. Směr $\{\mathbf{t}\}$ náleží dvojsměru samodružných směrů afinity.

IV. Afinita typu IV. má právě tři samodružné dvojsměry, z nichž každý obsahuje právě dva samodružné směry této afinity, při čemž každý samodružný směr je obsažen právě ve dvou samodružných dvojsměrech.

V. Afinita typu V. obsahuje právě dva různé samodružné dvojsměry, při tom jeden z těchto dvojsměrů obsahuje oba samodružné směry, druhý obsahuje právě jeden z těchto směrů.

VI. Afinita typu VI. má právě jeden samodružný dvojsměr, tento dvojsměr může avšak nemusí obsahovat samodružný směr této afinity.[9])

5. Rovinová afinita

V této části si všimneme jednoho druhu afinních zobrazení prostoru $\mathbf{A}_3$, který má zásadní důležitost při vyšetřování grupových vlastností afinit. Jsou jím rovinové afinity.

[9]) Čtenáři, který zná princip duality, je poslední klasifikace naprosto zřejmá.

Věta 5.1. (Věta o určenosti rovinové afinity.)
Budiž $\{A; \mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ libovolná rovina, $\mathbf{w} \neq \mathbf{w}'$ dva vektory, z nichž žádný není lineární kombinací vektorů $\mathbf{u}, \mathbf{v}$. Pak existuje právě jedna rovinová afinita, pro kterou je $\{A; \mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ rovina afinity a která převádí vektor $\mathbf{w}$ ve vektor $\mathbf{w}'$.

Důkaz je triviální a přenecháváme jej čtenáři.

Věta 5.2. *Budiž A rovinová afinita s rovinou $\{A; \mathbf{u}, \mathbf{v}\}$. Jediné samodružné vektory této afinity jsou vektory dvojsměru $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$.*

Důkaz: I. Je zřejmé, že každý vektor dvojsměru $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ je samodružný.

II. Budiž $\mathbf{x} = B - A$ vektor, který nenáleží dvojsměru $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$. Potom bod B není bodem roviny $\{A; \mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ a tedy $\mathscr{A}(B) = B' \neq B$. Protože $\mathscr{A}(\mathbf{x}) = B' - A$ je $\mathscr{A}(\mathbf{x}) \neq \mathbf{x}$.

Nyní se obrátíme k vyšetřování samodružných směrů rovinových afinit.

Věta 5.3. *Budiž dána rovinová afinita s rovinou $\{A, \mathbf{u}, \mathbf{v}\}$, která převádí vektor $\mathbf{w}$ ve vektor $\mathbf{w}' \neq \mathbf{w}$. Budiž $\mathbf{t}$ další vektor, který není lineární kombinací vektorů $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$. Pak je $\mathbf{t} \neq \mathbf{t}'$ a vektory $\mathbf{w}' - \mathbf{w}$* a *$\mathbf{t}' - \mathbf{t}$ jsou lineárně závislé.*

Důkaz: Tvrzení $\mathbf{t}' \neq \mathbf{t}$ plyne z věty 5.2. Budiž

$$\mathbf{t} = x\mathbf{u} + y\mathbf{v} + z\mathbf{w}\,,$$

pak

$$\mathbf{t}' = x\mathbf{u} + y\mathbf{v} + z\mathbf{w}'\,.$$

Proto

$$\mathbf{t}' - \mathbf{t} = z(\mathbf{w}' - \mathbf{w})\,,$$

což se mělo dokázat.

Věta 5.4. *Budiž $\mathscr{A}$ rovinová afinita s rovinou $\{A; \mathbf{u}, \mathbf{v}\}$, která převádí nesamodružný vektor $\mathbf{w}$ ve vektor $\mathbf{w}'$. Jediné samodružné směry afinity $\mathscr{A}$ jsou směry dvojsměru $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ a směr $\{\mathbf{w}' - \mathbf{w}\}$.*

Důkaz: I. 1. Je-li $\{\mathbf{x}\}$ libovolný samodružný směr náležející dvojsměru $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$, je tento směr samodružný podle věty 5.2.

2. Dokážeme, že směr $\{\mathbf{w}' - \mathbf{w}\}$ je samodružný. K tomu stačí dokázat, že $\mathscr{A}(\mathbf{w}' - \mathbf{w}) = k \,.\, (\mathbf{w}' - \mathbf{w})$, $k \neq 0$. Protože vektor $\mathbf{w}$ není samodružný, nenáleží dvojsměru $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ a tedy $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ je base pro $\mathbf{V}_3$. Budiž

$$\mathbf{w}' = a\mathbf{u} + b\mathbf{v} + k\mathbf{w}\,.$$

pak

$$\mathscr{A}(\mathbf{w}') = a\mathbf{u} + b\mathbf{v} + k\mathbf{w}'\,.$$

Vektor $\mathbf{w}'$ nenáleží dvojsměru $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ neboť pak by bylo $\mathbf{w}' = \mathbf{w}$, což není možné. Proto je $k \neq 0$. Dále platí $\mathscr{A}(\mathbf{w}' - \mathbf{w}) = \mathscr{A}(\mathbf{w}') - \mathscr{A}(\mathbf{w}) = k(\mathbf{w}' - \mathbf{w})$, což se mělo dokázat.

II. Budiž nyní $\{\mathbf{x}\}$ libovolný samodružný směr afinity $\mathscr{A}$. Pak je $\mathbf{x}' = \mathscr{A}(\mathbf{x}) = k\mathbf{x}$, $k \neq 0$. Budiž

$$\mathbf{x} = t\mathbf{u} + r\mathbf{v} + s\mathbf{w}\,,$$

potom

$$k\mathbf{x} = \mathbf{x}' = t\mathbf{u} + r\mathbf{v} + s\mathbf{w}'\,.$$

Zároveň však je

$$k\mathbf{x} = (kt)\,\mathbf{u} + (kr)\,\mathbf{v} + (ks)\,\mathbf{w}\,.$$

Porovnáním obou posledních vztahů dostaneme

$$(k - 1)\,t\mathbf{u} + (k - 1)\,r\mathbf{v} + s(k\mathbf{w} - \mathbf{w}') = \mathbf{o} \tag{5.1}$$

a) Je-li $k = 1$, pak z (5.1) plyne $s = 0$ a

$$\mathbf{x} = t\mathbf{u} + r\mathbf{v}\,, \quad \text{čili} \quad \{\mathbf{x}\} \subset \{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}\,.$$

b) Budiž $k \neq 1$. Vyjádřeme vektor $\mathbf{w}'$ pomocí base $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$:

$$\mathbf{w}' = a\mathbf{u} + b\mathbf{v} + c\mathbf{w}\,.$$

Rovnice (5.1) potom přejde v rovnici:

$$[(k - 1)\,t - as]\,\mathbf{u} + [(k - 1)\,r - bs]\,\mathbf{v} + s(k - c)\,\mathbf{w} = \mathbf{o} \tag{5.2}$$

Rovnice (5.2) je ekvivalentní se soustavou rovnic:

$$\begin{aligned} (k - 1)\,t \qquad\qquad - as &= 0\,,\\ (k - 1)\,r - bs &= 0\,,\\ (k - c)\,s &= 0\,. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Protože soustava (5.3) má netriviální řešení t, r, s, je její determinant roven nule. To nastane právě tehdy bude-li $k = 1$ nebo $k = c$. Protože předpokládáme $k \neq 1$ musí být $k = c \neq 1$. Soustava (5.3) má potom všechna řešení

$$t = \frac{as}{s - 1}\,, \quad r = \frac{bs}{s - 1}\,, \quad s = s\,. \tag{5.4}$$

Pro vektor $\mathbf{w}' - \mathbf{w}$ platí

$$\mathbf{w}' - \mathbf{w} = a\mathbf{u} + b\mathbf{v} + (c - 1)\,\mathbf{w}\,.$$

Ze vztahů (5.4) zjistíme snadno, že matice

$$\begin{pmatrix} t & r & s \\ a & b & c - 1 \end{pmatrix}$$

má hodnost 1, a proto jsou vektory $\{\mathbf{x}\}$ a $\{\mathbf{w}' - \mathbf{w}\}$ lineárně závislé, tedy $\{\mathbf{x}\} = \{\mathbf{w}' - \mathbf{w}\}$.

Věta 5.5. *Budiž $\mathscr{A}$ rovinová afinita s rovinou $\{A; \mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ Je-li $\mathscr{A}$ přímá afinita, pak reprodukuje každý z obou poloprostorů určených rovinou $\{A; \mathbf{u}, \mathbf{v}\}$; je-li $\mathscr{A}$ nepřímá afinita, pak oba poloprostory vyměňuje (tj. obrazem každého z nich je poloprostor opačný).*

Důkaz: Budiž $\{A; \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ libovolný poloprostor určený rovinou $\{A; \mathbf{u}, \mathbf{v}\}$. Jeho obrazem v afinitě $\mathscr{A}$ je poloprostor $\{A; \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}'\}$ podle věty 2.7. Oba poloprostory splynou tehdy a jen tehdy, budou-li base $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ a $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}'$ souhlasné tj. bude-li $\mathscr{A}$ přímá afinita.

Poznámka. Existenci přímých i nepřímých rovinových afinit dokážeme takto: Budiž $\mathscr{A}$ afinita, která převádí basi A, $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ v basi A, $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}'$, kde $\mathbf{w}' = c\,.\,\mathbf{w}$, $c \neq 0, 1$. $\mathscr{A}$ je potom zřejmě rovinová afinita s rovinou $\{A; \mathbf{u}, \mathbf{v}\}$, její determinant je roven c. Je tedy $\mathscr{A}$ přímá pro $c > 0$, nepřímá pro $c < 0$.

Definice 5.1. *Nepřímá rovinová afinita se nazývá základní afinita.*

Definice 5.2. *Nechť rovinová afinita s rovinou $\{A; \mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ převádí nesamodružný vektor $\mathbf{w}$ ve vektor $\mathbf{w}'$. Směr $\{\mathbf{w}' - \mathbf{w}\}$ (který je kromě směrů dvojsměru $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ jediným samodružným směrem dané rovinové afinity) se nazývá směr rovinové afinity.*

Věta 5.6. *Přímka je samodružná v rovinové afinitě tehdy a jen tehdy, náleží-li buď rovině této afinity nebo je-li její směr směrem afinity.*

Důkaz: Budiž $\{A; \mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ rovina dané rovinové afinity $\mathscr{A}$, $\{P; \mathbf{p}\}$ přímka. Doplňme vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ vektorem $\mathbf{w}$ na basi l. v. prostoru $\mathbf{V}_3$. Je-li $\mathbf{w}' = \mathscr{A}(\mathbf{w})$, pak $\{\mathbf{w}' - \mathbf{w}\}$ je směr afinity.

I. Abychom dokázali, že daná přímka je samodružná, stačí dokázat, že obraz každého jejího bodu je opět jejím bodem, neboť obrazem přímky v afinitě je opět přímka a ta je určena dvěma navzájem různými body. Zřejmě je každá přímka roviny $\{A; \mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ samodružná. Předpokládejme tedy, že směr $\{\mathbf{p}\}$ přímky $\{P; \mathbf{p}\}$ je směrem afinity. Budiž

$$P = A + r\mathbf{u} + r\mathbf{v} + s\mathbf{w}$$

potom

$$P' = A + t\mathbf{u} + r\mathbf{v} + s\mathbf{w}'$$

a tedy $P' - P = s(\mathbf{w}' - \mathbf{w})$, což znamená, že vektor $P' - P$ náleží směru afinity. Proto je $P' - P = k\mathbf{p}$ a tedy $P' = P + k\mathbf{p}$ je bodem přímky $\{P; \mathbf{p}\}$. Je-li X libovolný bod přímky $\{P; \mathbf{p}\}$ je $X = P + x\mathbf{p}$ a tedy $X' = P' + x\mathbf{p}'$, kde P' je bod přímky $\{P; \mathbf{p}\}$ a $\mathbf{p}'$ je vektor směru $\{\mathbf{p}\}$. Proto X' je bod přímky $\{P; \mathbf{p}\}$, což se mělo dokázat.

II. Nechť je přímka $\{P; \mathbf{p}\}$ samodružná. Náleží-li rovině $\{A; \mathbf{u}, \mathbf{v}\}$, pak není co dokazovat. Nechť tedy přímka $\{P; \mathbf{p}\}$ nenáleží rovině $\{A; \mathbf{u}, \mathbf{v}\}$. Pak existuje aspoň jeden bod přímky $\{P; \mathbf{p}\}$, který není bodem roviny $\{A; \mathbf{u}, \mathbf{v}\}$. Můžeme bez újmy obecnosti předpokládat, že je to bod P. Jako v části I. se dokáže, že $P' - P$ náleží směru afinity. Protože je přímka $\{P; \mathbf{p}\}$ samodružná, je P' jejím bodem a protože $P' \neq P$ je $\{P' - P\}$ jejím směrem. Směr přímky $\{P; \mathbf{p}\}$ je tedy směrem afinity.

Zároveň jsme dokázali větu:

Věta 5.7. *Je-li P libovolný bod, $P' \neq P$ jeho obraz v rovinové afinitě $\mathscr{A}$, pak vektor $P' - P$ náleží směru afinity $\mathscr{A}$.*

Definice 5.3. *Rovinová afinita, jejíž směr náleží dvojsměru roviny afinity se jmenuje elace.*

Věta 5.8. *Elace je přímá afinita.*

Důkaz: Budiž $\{A; \mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ rovina afinity, $A; \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ base prostoru $\mathbf{A}_3$, $\mathbf{w}'$ obraz vektoru $\mathbf{w}$ v dané elaci. Pak je

$$\mathbf{w}' = t\mathbf{u} + r\mathbf{v} + s\mathbf{w} .$$

Determinant elace je tedy roven s. Protože směr $\{\mathbf{w}' - \mathbf{w}\}$ náleží dvojsměru $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ je

$$\mathbf{w}' - \mathbf{w} = a\mathbf{u} + b\mathbf{v} .$$

Zároveň je

$$\mathbf{w}' - \mathbf{w} = t\mathbf{u} + r\mathbf{v} + (s - 1)\,\mathbf{w} .$$

Proto $s = 1 > 0$ a věta je dokázána.

Definice 5.4. *Budiž $\mathbf{w} \neq \mathbf{o}$ vektor směru rovinové afinity, která není elací, $k\mathbf{w}$ jeho obraz. Reálné číslo k nazveme charakteristikou rovinové afinity.*

Poznámka: Je-li $\mathbf{x} \neq \mathbf{o}$ libovolný vektor směru dané rovinové afinity z definice 5.4, je $\mathbf{x}' = k\mathbf{x}$ podle věty 3.5, takže charakteristika afinity nezávisí na volbě vektoru $\mathbf{w}$. Charakteristika afinity je zřejmě různá od nuly a jedné. Dále je patrné, že přímé rovinové afinity, které nejsou elacemi mají positivní charakteristiku, nepřímé negativní charakteristiku.

Věta 5.9. *Budiž dána rovina $\{A; \mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ a směr $\{\mathbf{w}\}$, který nenáleží dvojsměru $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ a reálné číslo $k \neq 0, 1$. Potom existuje právě jedna rovinová afinita s rovinou $\{A; \mathbf{u}, \mathbf{v}\}$, směrem $\{\mathbf{w}\}$ a charakteristikou k.*

Důkaz: Afinita, která převádí basi $A, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ v basi $A, \mathbf{u}, \mathbf{v}, k\mathbf{w}$ je zřejmě rovinová afinita s rovinou $\{A; \mathbf{u}, \mathbf{v}\}$, směrem $\{\mathbf{w}\}$ a charakteristikou k.

Protože každá rovinová afinita s rovinou $\{A; \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\}$, směrem $\boldsymbol{w}$ a charakteristikou k musí převádět basi A, $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ v basi A, $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $k\boldsymbol{w}$, je tato afinita určena jednoznačně.

6. Afinní grupa

Mějme dvě zobrazení $\mathscr{X}_1$ a $\mathscr{X}_2$ afinního prostoru $\mathbf{A}_3$ do sebe sama. Přiřadíme-li bodu X prostoru $\mathbf{A}_3$ bod X', který je obrazem bodu $Y = \mathscr{X}_1(X)$ v zobrazení $\mathscr{X}_2$, je toto přiřazení opět zobrazením prostoru $\mathbf{A}_3$ do sebe sama. O popsaném zobrazení říkáme, že vzniklo složením zobrazení $\mathscr{X}_1$ a $\mathscr{X}_2$ (v daném pořadí) a označujeme je $\mathscr{X}_1 . \mathscr{X}_2$.

Čtenář si snadno sám dokáže větu:

Věta 6.1. *Složením dvou afinních zobrazení afinního prostoru $\mathbf{A}_3$ vznikne opět afinní zobrazení tohoto prostoru.*

Definice 6.1. *Operaci, která každým dvěma afinitám $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ prostoru $\mathbf{A}_3$ přiřazuje afinitu $\mathscr{C} = \mathscr{A} . \mathscr{B}$ (tj. afinitu složenou z afinit $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$) nazýváme skládáním afinit.*

Věta 6.2. *Pro skládání afinit platí zákon asociativní, tj. jsou-li $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$ tři afinity, je*

$$\mathscr{A} . (\mathscr{B} . \mathscr{C}) = (\mathscr{A} . \mathscr{B}) . \mathscr{C} \tag{6.1}$$

Důkaz: Budiž X libovolný bod prostoru $\mathbf{A}_3$. Označme $Y = \mathscr{A}(X)$, $Z = \mathscr{B}(Y)$, $U = \mathscr{C}(Z)$. Pak je

$$U = \mathscr{C}(Z) = \mathscr{C}[\mathscr{B}(Y)] = \mathscr{B} . \mathscr{C}(Y) = \mathscr{B} . \mathscr{C}[\mathscr{A}(X)] = \mathscr{A} . (\mathscr{B} . \mathscr{C})(X) .$$

Dále je

$$Z = \mathscr{B}(Y) = \mathscr{B}[\mathscr{A}(X)] = \mathscr{A} . \mathscr{B}(X)$$

takže

$$U = \mathscr{C}(Z) = \mathscr{C}[\mathscr{A} . \mathscr{B}(X)] = (\mathscr{A} . \mathscr{B}) . \mathscr{C}(X) .$$

Platí tedy pro každý bod X

$$\mathscr{A} . (\mathscr{B} . \mathscr{C})\ (X) = (\mathscr{A} . \mathscr{B}) . \mathscr{C}\ (X)$$

a tedy platí (6.1).

Věta 6.3. *Je-li $\mathscr{I}$ identita, platí pro každou afinitu $\mathscr{A}$*

$$\mathscr{I} . \mathscr{A} = \mathscr{A} . \mathscr{I} = \mathscr{A} . \tag{6.2}$$

Důkaz: Je-li X libovolný bod prostoru $\mathbf{A}_3$ je

$$\mathscr{I} . \mathscr{A}(X) = \mathscr{A}[\mathscr{I}(X)] = \mathscr{A}(X)\ , \quad \mathscr{A} . \mathscr{I}(X) = \mathscr{I}[\mathscr{A}(X)] = \mathscr{A}(X) .$$

Proto platí (6.2).

Věta 6.4. *Budiž $\mathscr{A}$ libovolná afinita prostoru $\mathbf{A}_3$. Přiřaďme každému bodu X bod X', pro nějž platí $X = \mathscr{A}(X')$. Popsané přiřazení $\mathscr{B}$ je afinita.*

Důkaz: Ke každému bodu X z $\mathbf{A}_3$ existuje právě jeden bod X' takový, že $X = \mathscr{A}(X')$, je tedy předpisem $\mathscr{B}$ přiřazen každému bodu X z $\mathbf{A}_3$ právě jeden bod X'. Je-li nyní Y' libovolný bod z $\mathbf{A}_3$, pak k němu existuje jediný bod $\mathscr{A}(Y') = Y$. Je tedy bod Y' obrazem právě jednoho bodu Y. Proto je $\mathscr{B}$ vzájemně jednoznačné zobrazení afinního prostoru $\mathbf{A}_3$ na sebe sama. Pro zobrazení $\mathscr{B}$ platí

$$X' = \mathscr{B}(X) \Leftrightarrow X = \mathscr{A}(X') . \tag{6.3}$$

Budiž $Y - X = V - U$, označme $Y' = \mathscr{B}(Y)$, $X' = \mathscr{B}(X)$, $V' = \mathscr{B}(V)$ a $U' = \mathscr{B}(U)$. Pak je podle (6.3) $Y = \mathscr{A}(Y')$, $X = \mathscr{A}(X')$, $V = \mathscr{A}(V')$, $U =$

$= \mathscr{A}(U')$. Podle definice 2.1 je $Y' - X' = V' - U'$. Obráceně, je-li $Y' - X' = V' - U'$ je za použití předchozího označení opět podle definice 2.1 $Y - X = V - U$, takže zobrazení $\mathscr{B}$ indukuje vzájemně jednoznačné zobrazení l. v. prostoru $\mathbf{V}_3$. Ze vztahu (6.3) plyne, že

$$\mathbf{u}' = \mathscr{B}(\mathbf{u}) \Leftrightarrow \mathbf{u} = \mathscr{A}(\mathbf{u}') . \tag{6.4}$$

Budiž $\mathbf{w}' = \mathscr{B}(\mathbf{u} + \mathbf{v})$, to znamená, že $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathscr{A}(\mathbf{w}')$. Označíme-li ještě $\mathbf{u}' = \mathscr{B}(\mathbf{u})$, $\mathbf{v}' = \mathscr{B}(\mathbf{v})$, je $\mathbf{u} = \mathscr{A}(\mathbf{u}')$, $\mathbf{v} = \mathscr{A}(\mathbf{v}')$. Protože je $\mathscr{A}(\mathbf{u}' + \mathbf{v}') = \mathscr{A}(\mathbf{u}') + \mathscr{A}(\mathbf{v}') = \mathbf{u} + \mathbf{v}$, je $\mathbf{w}' = \mathbf{u}' + \mathbf{v}'$, čili $\mathscr{B}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathscr{B}(\mathbf{u}) + \mathscr{B}(\mathbf{v})$.

Budiž dále $\mathbf{v}' = \mathscr{B}(t\mathbf{u})$, to znamená, že $t\mathbf{u} = \mathscr{A}(\mathbf{v}')$. Označme opět $\mathbf{u}' = \mathscr{B}(\mathbf{u})$. Pak $\mathscr{A}(\mathbf{u}') = \mathbf{u}$, $\mathscr{A}(t\mathbf{u}) = t\mathbf{u}'$, $\mathbf{v}' = t\mathbf{u}'$ a $\mathscr{B}(t\mathbf{u}') = t\mathscr{B}(\mathbf{u})$. Proto je $\mathscr{B}$ afinním zobrazením prostoru $\mathbf{A}_3$.

Definice 6.2. *Afinní zobrazení $\mathscr{B}$ definované vztahy* (6.3) *se nazývá inversním afinním zobrazením k zobrazení $\mathscr{A}$ a označuje se $\mathscr{B} = \mathscr{A}^{-1}$.*

Poznámka: Z (6.3) plyne, že ke každému afinnímu zobrazení $\mathscr{A}$ existuje právě jedno inversní afinní zobrazení a že inversním zobrazením k $\mathscr{A}^{-1}$ je opět původní afinní zobrazení $\mathscr{A}$, tedy $(\mathscr{A}^{-1})^{-1} = \mathscr{A}$.

Věta 6.5. *Budiž $\mathscr{A}^{-1}$ inversní afinita k afinitě $\mathscr{A}$. Potom platí*

$$\mathscr{A} \,.\, \mathscr{A}^{-1} = \mathscr{A}^{-1} \,.\, \mathscr{A} = \mathscr{I} . \tag{6.5}$$

(*$\mathscr{I}$ je identita.*)

Důkaz: Budiž X libovolný bod. Potom $\mathscr{A} \,.\, \mathscr{A}^{-1}(X) = \mathscr{A}^{-1}[\mathscr{A}(X)] = X = \mathscr{I}(X)$. Podobně $\mathscr{A}^{-1} \,.\, \mathscr{A}(X) = \mathscr{A}[\mathscr{A}^{-1}(X)] = X = \mathscr{I}(X)$. Věta 6,5 je dokázána.

Věta 6.6. *Množina všech afinních zobrazení afinního prostoru $\mathbf{A}_3$ je nekomutativní grupa vzhledem k operaci skládání afinit. Jednotkovým prvkem této grupy je identická afinita, inversním prvkem k afinitě $\mathscr{A}$ je inversní afinita $\mathscr{A}^{-1}$.*

Důkaz: Tvrzení, že množina všech afinit prostoru $\mathbf{A}_3$ je grupou plyne z vět 6.1, 6.2, 6.3, 6.4. a 6.5. Identita je jednotkovým prvkem podle (6.2), $\mathscr{A}^{-1}$ je inversním prvkem k $\mathscr{A}$ podle (6.5). Zbývá dokázat, že operace skládání afinit se neřídí zákonem komutativním:

Budiž $\mathscr{A}$ afinita, která převádí basi

$$P, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$$

v basi

$$P, \mathbf{u}, \mathbf{v}, -\mathbf{w} ,$$

$\mathscr{B}$ budiž afinita, která převádí basi

$$P, \mathbf{u}, \mathbf{v}, -\mathbf{w}$$

v basi

$$P + \mathbf{w}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, -\mathbf{w} .$$

Potom je $\mathscr{A} \,.\, \mathscr{B}(P) = \mathscr{B}[\mathscr{A}(P)] = \mathscr{B}(\mathbf{P}) = P + \mathbf{w}$; $\mathscr{B} \,.\, \mathscr{A}(P) = \mathscr{A}[\mathscr{B}(P)] = \mathscr{A}(P + \mathbf{w}) = P - \mathbf{w}$. Protože je $\mathbf{w} \neq \mathbf{o}$ je $\mathscr{A} \,.\, \mathscr{B}(P) \neq \mathscr{B} \,.\, \mathscr{A}(P)$ a tedy $\mathscr{A} \,.\, \mathscr{B} \neq \mathscr{B} \,.\, \mathscr{A}$.

Věta 6.7. *Má-li afinita $\mathscr{A}$ determinant D, afinita $\mathscr{B}$ determinant D', má afinita $\mathscr{A} \,.\, \mathscr{B}$ determinant DD'.*

Důkaz: Nechť afinita $\mathscr{A}$ převádí basi $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ v basi $\{\mathbf{u}', \mathbf{v}', \mathbf{w}'\}$, afinita $\mathscr{B}$ nechť převádí basi $\{\mathbf{u}', \mathbf{v}', \mathbf{w}'\}$ v basi $\{\mathbf{u}'', \mathbf{v}'', \mathbf{w}''\}$. Potom afinita $\mathscr{A} \,.\, \mathscr{B}$ převádí basi $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ v basi $\{\mathbf{u}'', \mathbf{v}'', \mathbf{w}''\}$. Determinant afinity $\mathscr{A} \,.\, \mathscr{B}$ je determinant transformace base $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ v basi $\{\mathbf{u}'', \mathbf{v}'', \mathbf{w}''\}$ ten je roven součinu determinantů transformací base $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ v basi $\{\mathbf{u}', \mathbf{v}', \mathbf{w}'\}$ a base $\{\mathbf{u}', \mathbf{v}'. \mathbf{w}'\}$ v basi $\{\mathbf{u}''. \mathbf{v}'', \mathbf{w}''\}$ tj. $D . D'$.

Z věty 6.7 plyne okamžitě:

Věta 6.8. *Složením dvou přímých (nepřímých) afinit vznikne přímá afinita. Složením přímé a nepřímé afinity v libovolném pořadí vznikne nepřímá afinita.*

Věta 6.9. *Každou afinitu lze složit ze základních afinit v počtu nejvýše sedmi.*

Důkaz: Budiž $\mathscr{A}$ libovolná afinita, A, B, C, D čtyři body, které nenáležejí žádné rovině, A', B', C', D' jejich obrazy v afinitě $\mathscr{A}$. Tyto body také nenáležejí žádné rovině. Při tom $\mathscr{A}$ je jediná afinita, která převádí body A, B, C, D po řadě v body A', B', C', D' (důkaz tohoto a jemu podobných dílčích tvrzení přenecháváme čtenáři). Budiž ϱ rovina, která odděluje body A, A'. Z věty 5.1 plyne, že pak existuje jediná rovinová afinita $\mathscr{A}_1$ s rovinou ϱ, která převádí bod A v bod A' a z věty 5.5 plyne, že je to základní afinita. Afinita $\mathscr{A}^{-1}$ je zřejmě také základní afinitou. Platí $\mathscr{A} . \mathscr{A}^{-1}$ $(A \to A,\ B \to B'')$. Rozlišme nyní dva případy:

I. Body A, B, B'' nenáležejí žádné přímce.

Budiž σ rovina, která obsahuje bod A a odděluje body B a B'', $\mathscr{A}_2$ rovinová afinita s rovinou σ, která převádí bod B v bod B''. $\mathscr{A}_2$ je základní afinita, proto $\mathscr{A}_2^{-1}$ je rovněž základní afinita. Platí $\mathscr{A} . \mathscr{A}_1^{-1}\mathscr{A}_2^{-1}$ $(A \to A,\ B \to B,\ C \to C''')$. Rozlišme nyní opět dva případy:

a) Body A, B, C, C''' nenáležejí žádné rovině. Potom existuje rovina τ obsahující přímku $\{A, B - A\}$ a oddělující body C a C'''. Rovinová afinita $\mathscr{A}_3$ s rovinou τ převádějící bod C v bod C''' je základní afinita a tedy $\mathscr{A}_3^{-1}$ je základní afinita. Platí $\mathscr{A} . \mathscr{A}_1^{-1} . \mathscr{A}_2^{-1} . \mathscr{A}_3^{-1}$ $(A \to A,\ B \to B,\ C \to C)$. Protože body A, B, C nenáležejí žádné přímce, je rovina $\{A, B - A,\ C - A\}$ v afinitě $\mathscr{B} = \mathscr{A} . \mathscr{A}_1^{-1} . \mathscr{A}_2^{-1} . \mathscr{A}_3^{-1}$ rovinou samodružných bodů. Pro afinitu $\mathscr{B}$ mohou nastat následující tři případy:

1. Afinita $\mathscr{B}$ je identita. Pak

$$\mathscr{A} . \mathscr{A}_1^{-1} . \mathscr{A}_2^{-1} . \mathscr{A}_3^{-1} = \mathscr{I}$$

a tedy

$$\mathscr{A} = \mathscr{A}_3 . \mathscr{A}_2 . \mathscr{A}_1$$

a věta je dokázána.

2. $\mathscr{B}$ je základní afinita. Označme $\mathscr{B} = \mathscr{A}_4$ a tedy

$$\mathscr{A} . \mathscr{A}_1^{-1} . \mathscr{A}_2^{-1} . \mathscr{A}_3^{-1} = \mathscr{A}_4 .$$

Odtud plyne, že

$$\mathscr{A} = \mathscr{A}_4 . \mathscr{A}_3 . \mathscr{A}_2 . \mathscr{A}_1$$

a věta je opět dokázána.

3. Konečně může být $\mathscr{B}$ přímá rovinová afinita. Budiž U bod, který není bodem roviny $\{A, B - A,\ C - A\}$ a $\mathscr{B}(U \to U_1)$. Je $U \neq U_1$ a body U, U_1 náležejí témuž otevřenému poloprostoru určenému rovinou $\{A, B - A,\ C - A\}$. Zvolme v opačném otevřeném poloprostoru bod U_2. Potom jsou jednoznačně určeny základní afinity $\mathscr{A}_5$, $\mathscr{A}_4$, které mají rovinu $\{A, B - A,\ C - A\}$ za rovinu afinity a z nichž první převádí bod U v bod U_2, druhá bod U_2 v bod U_1. Pak $\mathscr{B} = \mathscr{A}_5 . \mathscr{A}_4$ a tedy

$$\mathscr{A} . \mathscr{A}_1^{-1} . \mathscr{A}_2^{-1} . \mathscr{A}_3^{-1} = \mathscr{A}_5 . \mathscr{A}_4 ,$$

proto

$$\mathscr{A} = \mathscr{A}_5 \,.\, \mathscr{A}_4 \,.\, \mathscr{A}_3 \,.\, \mathscr{A}_2 \,.\, \mathscr{A}_1$$

což se mělo dokázat.

b) Body A, B, C, C''' náležejí téže rovině. Potom existuje základní afinita $\mathscr{A}_3(A \to A, B \to B, C''' \to D)$. Konečně existuje základní afinita $\mathscr{A}_4(A \to A, B \to B, D \to C)$. Pro afinitu $\mathscr{A} \,.\, \mathscr{A}_1^{-1} \,.\, \mathscr{A}_2^{-1} \,.\, \mathscr{A}_3^{-1} \,.\, \mathscr{A}_4^{-1}$ platí:

$$\mathscr{A} \,.\, \mathscr{A}_1^{-1} \,.\, \mathscr{A}_2^{-1} \,.\, \mathscr{A}_3^{-1} \,.\, \mathscr{A}_4^{-1} \,(A \to A,\, B \to B,\, C \to C)\,.$$

Tím je případ Ib) převeden na případ Ia). V případě Ia) byl počet základních afinit rozkladu nejvýše 5, v případě Ib) je roven nejvýše šesti.

II. Nechť body A, B, B'' náležejí téže přímce.

Potom existuje základní afinita $\mathscr{A}_2\,(A \to A, C \to B'')$. Dále existuje základní afinita $\mathscr{A}_3\,(A \to A, B \to C)$. Afinita $\mathscr{A} \,.\, \mathscr{A}_1^{-1} \,.\, \mathscr{A}_2^{-1} \,.\, \mathscr{A}_3^{-1}$ má samodružné body A, B. Tím je případ II. převeden na případ I, počet základních afinit rozkladu je nyní nejvýše roven sedmi. Věta je dokázána.

Poznámka: Jak již bylo naznačeno v textu důkazu, jsou v důkazu věty 6.9 vynechány určité existenční úvahy, které si čtenář snadno doplní.