Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Tibor Šalát

# O dokonalých číslach

*Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*, Vol. 9 (1964), No. 1, 1--13

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/137025

**Terms of use:**

© Jednota českých matematiků a fyziků, 1964

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://project.dml.cz

POKROKY MATEMATIKY, FYZIKY A ASTRONOMIE
ROČNÍK IX—ČÍSLO 1

# O DOKONALÝCH ČÍSLACH

TIBOR ŠALÁT, Bratislava

## ÚVOD

Už matematikom Pythagorovej školy a EUKLIDOVI bol známy pojem dokonalého čísla, od Euklida pochádza aj prvá metoda na vyznačenie párnych dokonalých čísel. V posledných rokoch vyšlo viacero pozoruhodných prác venovaných hlavne štúdiu štruktúry a rozloženia dokonalých čísel v množine všetkých prírodzených čísel. Cieľom tohto článku je podať stručný prehľad o súčasnom stave bádania v tejto zaujímavej problematike.

V tomto článku budeme predpokladať isté elementárne vedomosti z teorie čísel, ktoré sa nájdu v každej bežnej učebnici teorie čísel. Pripomeňme si niektoré z nich.

Je známe, že každé prírodzené číslo $n > 1$ možno jednoznačne (až na poradie činiteľov) písať vo tvare

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}, \tag{1}$$

kde $p_i (i = 1,2, \dots k)$ sú navzájom rôzne prvočísla a $\alpha_i (i = 1,2, \dots k)$ sú prírodzené čísla (tzv. *kanonický rozklad* čísla $n$).

Každý prírodzený deliteľ čísla $n$ (pozri (1)) má tvar

$$p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_k^{\beta_k}, \tag{2}$$

kde $0 \leqq \beta_i \leqq \alpha_i (i = 1,2, \dots k)$, $\beta_i (i = 1,2, \dots k)$ sú celé čísla a naopak každé číslo tvaru (2) je (prírodzeným) deliteľom čísla $n$.

Označme znakom $\sigma(n)$ súčet všetkých prírodzených deliteľov čísla $n$, potom na základe predošlého dostávame pre $n > 1$

$$\sigma(n) = \sum_{0 \leqq \beta_i \leqq \alpha_i \quad (i = 1,2,\dots k)} p_1^{\beta_1} \dots p_k^{\beta_k} =$$

$$= (1 + p_1 + \dots + p_1^{\alpha_1})(1 + p_2 + \dots + p_2^{\alpha_2}) \dots (1 + p_k + \dots + p_k^{\alpha_k}) = \tag{3}$$

$$= \frac{p_1^{\alpha_1 + 1} - 1}{p_1 - 1} \frac{p_2^{\alpha_2 + 1} - 1}{p_2 - 1} \dots \frac{p_k^{\alpha_k + 1} - 1}{p_k - 1}.$$

Označme znakom $\tau(n)$ počet všetkých prírodzených deliteľov čísla $n$, potom na základe predošlého dostávame pre $n > 1$

$$\tau(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_k + 1) . \tag{4}$$

Funkcie $\sigma$ a $\tau$ patria medzi najznámejšie aritmetické funkcie. Vzorcami (3), (4) sú udané ich hodnoty v prírodzenom $n$ na základe kanonického rozkladu (1), pre $n = 1$ je zrejme $\sigma(1) = \tau(1) = 1$.

*Pravými deliteľmi* prírodzeného čísla $n$ nazývame tých prírodzených deliteľov čísla $n$, ktorí sú menší než $n$. Tak 1 nemá pravých deliteľov, každé iné prírodzené číslo má aspoň jedného pravého deliteľa (je ním číslo 1).

Existuje nekonečne mnoho prírodzených čísel $n > 1$ s vlastnosťou: súčet všetkých pravých deliteľov čísla $n$ (tj. číslo $\sigma(n) - n$) je menší než číslo $n$ (tj. $\sigma(n) < 2n$). To sú tzv. *deficientné čísla* (numeri deficientes); takými číslami sú napr. všetky prvočísla. Existuje tiež nekonečne mnoho prírodzených čísel $n$ s vlastnosťou: súčet všetkých pravých deliteľov čísla $n$ je väčší než $n$ (tj. $\sigma(n) > 2n$). To sú tzv. *abundantné čísla* (numeri abundantes); takými číslami sú napr. včetky čísla $n$ tvaru $n = 2^\alpha . 3 (\alpha > 1)$. Naozaj, na základe (3) máme

$$\sigma(n) = \frac{2^{\alpha+1} - 1}{2 - 1} \frac{3^2 - 1}{3 - 1} = (2^{\alpha+1} - 1) . 4 > 2^{\alpha+1} . 3 .$$

Dodnes nevieme, či existuje nekonečne mnoho prírodzených čísel $n$ s vlastnosťou: $n$ sa rovná súčtu všetkých svojich pravých deliteľov (tj. $\sigma(n) = 2n$). To sú tzv. *dokonalé čísla* (numeri perfecti). Niektoré čísla tohoto druhu poznáme, najmenším z nich je 6 $(6 = 1 + 2 + 3)$, najväčšie známe dokonalé číslo je $2^{3216}(2^{3217} - 1)$.

V prvej časti tohto článku podáme prehľad elementárnych vlastností dokonalých čísel, v druhej prehľad výsledkov o rozdelení dokonalých čísel v postupnosti všetkých prírodzených čísel a v tretej časti poukážeme na čísla príbuzného typu a na isté zobecnenie pojmu dokonalého čísla.

## I

I keď nevieme dodnes určiť počet dokonalých čísel, predsa možno udať kritérium pre to, aby párne číslo bolo dokonalým.

**Veta 1,1.** *Nutná a postačujúca podmienka k tomu, aby párne číslo n bolo dokonalým, je, aby n malo tvar*

$$n = 2^{s-1}(2^s - 1) ,$$

*kde s je prirodzené* $> 1$ *a* $2^s - 1$ *je prvočíslo.*

Dôkaz uvedenej vety možno nájsť skoro v každej bežnej učebnici teorie čísel (pozri napr. [1] str. 117, [2] str. 310, [5] str. 239).

Uvedená veta sa zdá byť veľmi elegantným kritériom „dokonalosti" párnych čísel a zdalo by sa, že pomocou nej bude možné ľahko vyznačiť všetky párne dokonalé čísla. No nie je tomu tak. Celý háčik je v tom, že v tejto vete sa požaduje, aby $2^s - 1$ bolo prvočíslom. Ak $s$ je zložené a napr. $s = a \cdot b$ ; $a > 1$ , $b > 1$ , potom $2^s - 1$ zrejme nemôže byť prvočíslom, pretože je deliteľné číslom $2^a - 1$ a $1 < 2^a - 1 < 2^s - 1$. V dôsledku toho číslo $2^s - 1$ môže byť (ale nemusí) prvočíslom len vtedy, keď $s$ je prvočíslo. Čísla $M_s = 2^s - 1 (s = 1, 2, 3, \ldots)$ nazývame *Mersennovými číslami*, prvočísla tohoto tvaru zase *Mersennovými prvočíslami* (pozri [3] str. 370). Ak $p$ je prvočíslo, potom, ako už bolo povedané, $M_p$ môže, ale nemusí byť prvočíslom. Naozaj, čísla $M_2$, $M_3$, $M_5$, $M_7$ sú prvočísla (čitateľ to ľahko overí), ale $M_{11}$ už nie je prvočíslom, pretože

$$M_{11} = 2^{11} - 1 = 2047 = 23 \cdot 89 \, .$$

Doteraz poznáme len 18 Mersennových prvočísel. Sú to Mersennove prvočísla $M_p$ pre

$$p = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 61, 89, 107, 127, 521, 617, 1279, 2203, 2281, 3217,$$

a tak teda poznáme celkom 18 párnych dokonalých čísel príslušných k predošlým Mersennovým prvočíslam (k prvočíslu $M_p$ príslušné dokonalé číslo je $2^{p-1} \cdot M_p$) .

Číslo $M_{3217} = 2^{3217} - 1$ je najväčšie konkrétne známe prvočíslo vôbec, má 969 cifier (v desiatkovej sústave). Že $M_{3217}$ je prvočíslo, ukázal r. 1957 H. Riesel (pozri [4] str. 62) pomocou elektronkového počítača BESK (švédskej výroby).

Veľkou pomôckou pri zisťovaní, či dané číslo $M_p$ ($p$ prvočíslo) je prvočíslom (a teda či $2^{p-1} \cdot M_p$ je dokonalé číslo) je nasledujúci poznatok:

**Veta 1,2.** *Ak $q$ je prvočíselný deliteľ čísla $M_p$ ($p$ prvočíslo $> 2$), potom $q = 2kp + 1$ ($k$ je prírodzené číslo).*

Dôkaz uvedenej vety možno nájsť napr. v [1] str. 119—120. Veta 1,2 umožňuje zjednodušiť proces prešetrovania, či $M_p$ ($p$ prvočíslo) je prvočíslo.

Príklad 1,1. $M_{11} = 2^{11} - 1 = 2047$. Ak je $M_{11}$ zloženým číslom, musí byť deliteľné nejakým prvočíslom $q$, a nech už $q$ značí najmenšie prvočíslo, ktoré delí $M_{11}$. Potom $M_{11} = q \cdot q', q' \geqq q$, odtiaľ $q^2 \leqq qq' = M_{11}$, $q \leqq \sqrt{M_{11}}$. Ak teda $M_{11}$ je zložené, musí byť deliteľne nejakým prvočíslom (a to podľa vety 1,2 prvočíslom tvaru $22k + 1$) nie väčším než $\sqrt{M_{11}} < 46$. Jediným takým prvočíslom je 23 a ľahko sa zistí, že $23/2047$, teda $M_{11}$ nie je prvočíslo.

Príklad 1,2. $M_{17} = 2^{17} - 1 = 131071$. Rovnako ako v predošlom príklade stačí overiť, či $M_{17}$ je deliteľné nejakým prvočíslom tvaru $34k + 1$ nie väčším než $\sqrt{M_{17}}$. Všetkými takými prvočíslami sú 103, 137, 239, 307. Lahko sa spočíta, že $M_{17}$ nie je deliteľné žiadnym z uvedených prvočísel; je preto samo prvočíslom.

V úvode bolo spomínané, že už Euklidovi bol známy pojem dokonalého čísla a od neho pochádza aj nasledujúca metoda pre hľadanie dokonalých čísel:

Utvorme čiastočné súčty nekonečného radu

$$1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^n + \ldots$$

Ak nejaký čiastočný súčet je prvočíslom, násobme ho posledným jeho sčítancom, dostaneme tak dokonalé číslo.

Lahko možno overiť, že touto metodou možno hľadať párne dokonalé čísla (pozri 1,1).

Čo sa týká nepárných dokonalých čísel, nepoznáme doteraz ani jedno také číslo a nie je ani dokázané, že také číslo neexistuje. No napriek tomu je známe viacero výsledkov, ktoré udávajú väčšinou (nutné) podmienky, ktoré musia splňovať nepárne dokonalé čísla (ak také existujú). Tak napr. je známe, že neexistuje žiadne nepárne dokonalé číslo $< 1,4 \,.\, 10^{14}$; taktiež neexistuje nepárne dokonalé číslo, ktoré by malo menej než 6 (navzájom rôznych) prvočíselných deliteľov. V práci [6] je ukázané, že ak $n$ je nepárne dokonalé číslo a $n = p_1^{\alpha_1} \,.\, p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ je jeho kanonický rozklad, $p_1 < p_2 < \dots < p_k$, potom

$$\frac{1}{2} < \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{p_i} < 2 \log \frac{\pi}{2} \quad \text{a} \quad p_1 < \frac{2k}{3} + 2.$$

V práci [7] je podaný veľmi jednoduchý dôkaz dávno známeho faktu*), podľa ktorého nepárne dokonalé číslo musí mať tvar

$$n = p^{4r+1} \,.\, N^2 ,$$

kde $p$ je prvočíslo, $p \equiv 1 \pmod 4$, $r$ je celé $\geqq 0$, $N$ prírodzené, $(N, p) = 1$.

Uvedieme pre úplnosť a pre naše ďalšie potreby spomínaný výsledok.

**Veta 1,3.** *Nech $n$ je nepárne dokonalé číslo, potom $n$ má tvar*

$$n = p^{4r+1} \,.\, N^2 , \quad (r \geqq 0)$$

*kde $p$ je prvočíslo, $p \equiv 1 \pmod 4$, $(N, p) = 1$.*

Dôkaz. Nech $n = p_1^{\alpha_1} \,.\, p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ je kanonický rozklad čísla $n$, nech $p_i (i = 1, 2, \dots k)$ sú nepárne prvočísla. Predpokladajme, že $\sigma(n) = 2n$, teda

$$\sigma(p_1^{\alpha_1}) \,.\, \sigma(p_2^{\alpha_2}) \dots \sigma(p_k^{\alpha_k}) \equiv 0 \pmod 2$$
$$\sigma(p_1^{\alpha_1}) \,.\, \sigma(p_2^{\alpha_2}) \dots \sigma(p_k^{\alpha_k}) \not\equiv 0 \pmod 4$$

Odtiaľ vyplýva, že zpomedzi činiteľov $\sigma(p_i^{\alpha_i})$ na ľavej strane je práve jeden párny a ostatné sú nepárne. Nech napr. $\sigma(p_1^{\alpha_1})$ je párne číslo a $\sigma(p_i^{\alpha_i}) (i = 2,3, \dots k)$ sú nepárne čísla.

Uvažme, že pri $p$ nepárnom

$$\sigma(p^\alpha) = 1 + p + p^2 + \dots + p^\alpha \equiv \alpha + 1 \pmod 2 .$$

V dôsledku toho z predošlého vyplýva, že $\alpha_1$ je nepárne a $\alpha_i$ $(i = 2, 3, \dots k)$ sú párne. Ak kladieme $\alpha_i = 2\beta_i$, $\beta_i$ je prírodzené $\geqq 1$, potom $p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3} \dots p_k^{\alpha_k} = (p_2^{\beta_2} \,.\, p_3^{\beta_3} \dots p_k^{\beta_k})^2 = N^2$, kde $N = p_2^{\beta_2} p_3^{\beta_3} \dots p_k^{\beta_k}$, $(N, p_1) = 1$.

*) Tento fakt bol známy už Eulerovi, pozri Commentationes arithmeticae collectae, 2, Tractatus de numerorum doctrina (1849), str. 514, Opera postuma 1(1862), 14-—15.

Keďže $\alpha_1$ je nepárne, dostávame

$$(5) \qquad \sigma(p_1^{\alpha_1}) = \frac{p_1^{\alpha_1+1} - 1}{p_1 - 1} = (p_1 + 1)(1 + p_1^2 + \ldots + p_1^{\alpha_1-1}),$$

a pretože $2/\sigma(p_1^{\alpha_1})$, ale $4 \times \sigma(p_1^{\alpha_1})$, vyplýva z (5) jednak $p_1 + 1 \not\equiv 0 \pmod 4$, teda $p_1 \equiv 1 \pmod 4$, a jednak vyplýva odtiaľ, že číslo $1 + p_1^2 + \ldots + p_1^{\alpha_1-1}$ je nepárne. Pretože $p_1^{2l} \equiv 1 \pmod 2$, dostávame ihneď $1 + (\alpha_1 - 1)/2 \equiv 1 \pmod 2$, teda $\alpha_1 \equiv$ $\equiv 1 \pmod 4$.

Tým je dôkaz vety skončený.

Dôsledok: Pretože párna mocnina čísla tvaru $4j + 3$ je číslo tvaru $4k + 1$, dostávame z predošlej vety, že pre každé nepárne dokonalé číslo $n$ platí $n \equiv 1 \pmod 4$.

Ukážeme ešte pre zaujímavosť, že nepárne dokonalé čísla sa môžu vyskytovať len v postupnostiach $\{12j + 1\}_{j=1}^{\infty}$ a $\{36j + 9\}_{j=1}^{\infty}$.

**Veta 1,4.** *Nech $n$ je nepárne dokonalé číslo. Potom buď* $n \equiv 1 \pmod{12}$, *alebo* $n \equiv 9 \pmod{36}$.

Dôkaz. Nech $n$ je nepárne dokonalé číslo. Potom podľa dôsledku za vetou 1,3 musí $n$ mať jeden z nasledujúcich tvarov:

$$12j + 1, \; 12j + 5, \; 12j + 9.$$

Ľahko overíme, že pre každé prírodzené $l$ je $\sigma(3l - 1) \equiv 0 \pmod 3$. Ak totiž $d/3l - 1$, potom $d$ má tvar $3k + 1$ alebo $3k - 1$ (keby $d = 3k$, potom by $3/3l - 1$ a odtiaľ $3/1$, čo neni možné). Ak teraz $d = 3k + 1$ a $3l - 1 = d \,.\, d'$($d$, $d'$ nazývame *sdruženými deliteľmi čísla* $3l - 1$), má $d'$ na základe predošlého buď tvar $3k' + 1$, alebo $3k' - 1$. Keby $d' = 3k' + 1$, dostali by sme $dd' \equiv 1 \pmod 3$, $3l -$ $- 1 \equiv 1 \pmod 3$ a odtiaľ $3/2$, čo neni možné. Musí teda byť $d' = 3k' - 1$. Analogicky zistíme, že ak $d = 3k - 1$, potom $d' = 3k' + 1$. Teda vždy je $d + d' \equiv 0$ $\pmod 3$. Ak teraz v súčte $\sigma(3l - 1)$ zoskupíme sčítancov do zátvoriek tak, aby každá zátvorka obsahovala súčet dvoch sdružených deliteľov čísla $3l - 1$, dostaneme ihneď $\sigma(3l - 1) \equiv 0 \pmod 3$. Ak by $n = 12j + 5$, bolo by $n = 12j + 5 \equiv -1 \pmod 3$, teda $n = 3l - 1$, a na základe predošlého a definície dokonalého čísla $2(3l - 1) =$ $= \sigma(3l - 1) \equiv 0 \pmod 3$, čo zrejme nie je možné.

Ak teraz $n = 12j + 9$, potom $3/n$, pričom $n = p_1^{4r+1} \,.\, N^2$, $p_1 \equiv 1 \pmod 4$, $r \geqq 0$. Teda $3/N$, $N = p_2^{\beta_2} p_2^{\beta_3} \ldots p_k^{\beta_k}$, a tak existuje $i$, $2 \leqq i \leqq k$ tak, že $3 = p_i$. Potom $9/N^2$, $9/n$, teda $12j \equiv 0 \pmod 9$, $4j \equiv 0 \pmod 3$, $j = 3s$.
To dá

$$n = 12j + 9 = 36s + 9.$$

Tým je dôkaz vety skončený.

Ak teda $n$ je nepárne dokonalé číslo, potom $n = p^\alpha \,.\, N^2$, $p \equiv \alpha \equiv 1 \pmod 4$, $(N, p) = 1$. Uvážme, že prípad $N = 1$ nemôže nastať, keďže z $\sigma(p^\alpha) = 2p^\alpha$ by vyplývalo (pozri (3))$(p^{\alpha+1} - 1)/(p - 1) = 2p^\alpha$ a odtiaľ $p^{\alpha+1} + 2p^\alpha = 2p^{\alpha+1} + 1$, čo je ovšem nesprávna rovnosť, keďže ľavá strana je deliteľná číslom $p^\alpha(\alpha \geqq 1)$, ale pravá strana je nie deliteľná tým číslom. Musí teda byť $N > 1$, a tak $N$ možno vyjadriť v kanonickom rozklade

$$N = q_1^{\beta_1} \cdot q_2^{\beta_2} \dots q_s^{\beta_s}$$

($s$ prírodzené, $\beta_i (i = 1, 2, \dots s)$ prírodzené, $q_i (i = 1, 2, \dots s)$ navzájom rôzne prvočísla). V dôsledku toho $n$ musí mať tvar

$$n = p^\alpha \cdot q_1^{2\beta_1} \cdot q_2^{2\beta_2} \dots q_s^{2\beta_s} .$$

Tento výsledok bol ďalej spresňovaný. Tak napr. v práci [8] sa ukazuje, že prípad $\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_s = 1$ nemôže nastať; v práci [9] sa ukazuje, že prípad $\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_s = 2$ nemôže nastať a konečne v práci [10] sa ukazuje, že prípad $\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_{s-1} = 1$, $\beta_s = 2$ nemôže nastať.

## II

Ako už bolo poznamenané, nevieme doteraz, či množina všetkých dokonalých čísel je konečná alebo nekonečná. No napriek tomu možno pre jej rozdelenie v postupnosti všetkých prírodzených čísel odvodiť určité výsledky, v mysle ktorých, i keby bola nekonečná, bola by ešte vždy veľmi „chudobná". Musíme ovšem napred definovať, čo tým myslíme. K definícii nám poslúži pojem asymptotickej hustoty množiny.

Nech $H$ je (nejaká) množina prírodzených čísel, nech $x$ je kladné reálne číslo. Nech $H(x)$ značí počet všetkých tých prvkov $h \in H$, pre ktoré platí $h \leqq x$. Podiel $H(x)/x$ má dosť názorný pravdepodobnostný význam, jeho limitu, tj. číslo

$$\delta(H) = \lim_{x \to \infty} \frac{H(x)}{x}$$

(ak ovšem existuje), nazývame asymptotickou hustotou množiny $H$. Zrejme $0 \leqq \delta(H) \leqq 1$.

Podľa veľkosti čísla $\delta(H)$ možno v predošlom použití hovoriť o „chudobných" množinách, pokladajúc za také množiny tie množiny $H$, pre ktoré $\delta(H) = 0$.

Z predošlej definície asymptotickej hustoty vyplýva, že množina všetkých prírodzených čísel má asymptotickú hustotu 1, množina všetkých párnych čísel $^1/_2$, množina všetkých prvočísel 0 (na základe prvočíselnej vety, podľa ktorej $\lim_{x \to \infty} H(x) \log x/x = 1$, ak $H$ značí množinu všetkých prvočísel).

Už z istých všeobecnejších úvah P. ERDÖSA (pozri [11]) z r. 1938 vyplynulo, že asymptotická hustota množiny všetkých dokonalých čísel je 0. Tento Erdösov výsledok bol ďalej zostrovaný, a to v tom zmysle, že sa hľadal presnejší odhad pre „funkciu četnosti" $V(x)$ množiny $V$ všetkých dokonalých čísel ($V(x)$ značí zase počet všetkých tých $v \in V$, pre ktoré $v \leqq x$).

V ďalšom budeme používať známe symboly $O$, $o$. Nech $\varphi(x)$ je nejaká, pre všetky kladné $x$ od istého počínajúc kladná funkcia; potom píšeme $\Psi(x) = O(\varphi(x))\,(x \to \infty)$, ak existuje konštanta $K \geqq 0$ (nezávislá na $x$) tak, že pre všetky $x$ od istého počínajúc $(x \geqq x_0)$ je $|\Psi(x)| \leqq K\varphi(x)$. Ďalej $\Psi(x) = o(\varphi(x))$ značí $\lim\limits_{x\to\infty} \Psi(x)/\varphi(x) = 0$. V ďalšom budeme potrebovať len niektoré veľmi elementárne vlastnosti symbolov $O$, $o$.

Ako sme už spomenuli, ukázal r. 1938 P. Erdös, že $V(x) = o(x)$.

V r. 1955 si všimol B. HORNFECK (pozri [12]), že tento výsledok možno veľmi jednoduchým postupom zostriť, a ukázal, že $V(x) = o(x^\gamma)$ pre každé $\gamma > \frac{1}{2}$. Vyplýva to z nasledujúcej vety, ktorej dôkaz je veľmi jednoduchý a je už takmer bezprostredným dôsledkom doterajších našich úvah.

**Veta 2,1.** *Nech $V(x)$ značí počet všetkých dokonalých čísel nie väčších než $x$. Potom*

$$V(x) = O(\sqrt{x})\,(x \to \infty)\,.$$

Dôkaz. Položme $V = V' \cup V''$, kde $V'(V'')$ značí množinu všetkých nepárných (párnych) dokonalých čísel. Potom zrejme pre každé $x$ je $V(x) = V'(x) + V''(x)$.

Napred odhadneme $V''(x)$. Pre dané $x$ (stačí sa obmedziť na $x > 6$) označme znakom $p$ ono najväčšie prvočíslo, pre ktoré platí

$$v = 2^{p-1}(2^p - 1)\,,\; v \in V''\,,\; v \leqq x\,.$$

Potom jednoduchým odhadom dostávame

$$2^{p-1} \leqq 2^{p-1}(2^p - 1) \leqq x\,,$$

$$V''(x) \leqq p \leqq 1 + \frac{\log x}{\log 2}\,,$$

$$V''(x) = O(\log x) = O(\sqrt{x})\,.\,(x \to \infty)\,. \tag{6}$$

Odhadneme teraz $V'(x)$. Nech $M_1$ značí množinu všetkých nepárnych dokonalých čísel tvaru

$$p\,.\,m^2\,,\; p \equiv 1 \pmod 4\,,\; (p\,,\,m) = 1$$

a nech $M_2$ je množina všetkých čísel tvaru

$$p^\alpha\,.\,m^2\,,\; \alpha \equiv p \equiv 1 \pmod 4\,,\; \alpha > 1\,,\; (p\,,\,m) = 1\,.$$

Potom na základe vety 1,3 dostávame $V'(x) \leqq M_1(x) + M_2(x)$.

Odhadneme osobitne $M_1(x)$ a $M_2(x)$.

Nech napred $v_1, v_2 \in M_1$ a nech $v_1 = p_1 m^2$, $v_2 = p_2 m^2$ (tj. obe čísla majú tú istú „kvadratickú" časť). Ukážeme, že potom musí byť $p_1 = p_2$. Naozaj podľa predpokladu dostávame na základe (3)

$$\sigma(v_1) = (p_1 + 1)\,\sigma(m^2) = 2p_1 m^2\,,$$
$$\sigma(v_2) = (p_2 + 1)\,\sigma(m^2) = 2p_2 m^2\,.$$

Vydelením týchto rovností dostaneme $p_1/p_2 = (p_1 + 1)/(p_2 + 1)$ a odtiaľ $p_1 = p_2$. Teda ku každému kvadrátu $m^2$ existuje najviac jedno prvočíslo $p$ tak, že $v = pm^2 \in M_1$. Z toho ihneď vyplýva, že počet prvkov $v \in M_1$, $v \leqq x$ je nie väčší než počet všetkých kvadrátov $m^2 \leqq x$. Odtiaľ vyplýva

$$M_1(x) = O(\sqrt{x}) \quad (x \to \infty) .$$

Aby sme odhadli $M_2(x)$, uvážme, že počet čísel $p^\alpha m^2 (\alpha \geqq 5)$ v intervale $< 1, x >$ je nie väčší než počet čísel $p^\beta m^2 (\beta = 4, 8, 12, \ldots)$ v tom istom intervale. Pri pevnom $p$ a $\beta$ je posledných čísel toľko, koľko je kvadrátov v intervale $\langle 1, x/p^\beta \rangle$, tj. je ich $\leqq \sqrt{x/p^{\frac{1}{2}\beta}}$.

Preto

$$M_2(x) \leqq \sum_{\beta, p} \frac{\sqrt{x}}{p^{\frac{1}{2}\beta}} = \sqrt{x} \sum_p \left( \sum_\beta \frac{1}{p^{\frac{1}{2}\beta}} \right), \tag{7}$$

pričom sčitovanie vpravo podľa $\beta (\beta \equiv 0 \, (4))$ sa deje od 4 po $[\log x / \log 5]$ a podľa $p$ od 5 po $[\sqrt[4]{x}]$ (a ovšem $p \equiv 1 \, (4)$).

Je zrejmé, že

$$\sum_\beta \frac{1}{p^{\frac{1}{2}\beta}} < \left( \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^4} + \ldots + \frac{1}{p^{2n}} + \ldots \right) = \frac{1}{p^2 - 1}$$

a tak

$$\sum_p \left( \sum_\beta \frac{1}{p^{\frac{1}{2}\beta}} \right) < \sum_{p, p \equiv 1(4)} \frac{1}{p^2 - 1} < \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1} < + \infty .$$

Zo (7) dostávame preto ihneď

$$M_2(x) = O(\sqrt{x}) \quad (x \to \infty) .$$

Keď teraz spojíme odhady pre $M_1(x)$ a $M_2(x)$, dostaneme $V'(x) = O(\sqrt{x})$ a to spolu so (6) dá $V(x) = O(\sqrt{x}) \quad (x \to \infty)$.
Tým je dôkaz vety skončený.

Uvedený výsledok Horfeckov bol zostrovaný v ďalších prácach. Tak v r. 1956 ukázal H. J. Kanold (pozri [13]), že

$$V(x) = O\left( x^{\frac{1}{4}} \frac{\log x}{\log \log x} \right) \quad (x \to \infty)$$

a v r. 1957 ukázali B. Hornfeck a E. Wirsing (pozri [14])

$$V(x) = o(x^\varepsilon)$$

pre každé $\varepsilon > 0$.

Konečne v r. 1959 dosiahol E. Wirsing (pozri [15]) nasledujúci obecný výsledok: Nech $k$ je racionálne číslo $> 1$, nech $V_k(x)$ značí počet všetkých tých prírodzených

$v \leqq x$, ktoré majú vlastnosť: $\sigma(v) = kv$. Potom existuje konštanta $c > 0$ nezávislá ani na $x$, ani na $k$ tak, že pre každé racionálne $k > 1$ a každé $x > e$ ($e$ je základ prírodzených logaritmov) je

$$V_k(x) \leqq \exp\left\{\frac{c \log x}{\log \log x}\right\}.$$

Z tohoto výsledku vyplýva pre $k = 2$ (dokonalé čísla)

$$V(x) \leqq x^{\frac{c}{\log \log x}} \quad (x > e) \tag{8}$$

a odtiaľ $V(x) = o(x^{\varepsilon})$ pre každé $\varepsilon > 0$ (predošlý spoločný výsledok Hornfeckov a Wirsingov).

Odhad (8) je najostrejší odhad známy autorovi článku pre $V(x)$.

## III

Už pri definícii dokonalého čísla môže ľahko vzniknuť myšlienka nahradiť funkciu $\sigma$ funkciou $\tau$. Tak dojdeme k definícii tzv. *dokonalých čísel druhého druhu* (pozri [1] str. 123–125). Dokonalým číslom druhého druhu rozumieme teda také prírodzené číslo $n > 1$, ktoré sa rovná súčinu všetkých svojich pravých deliteľov. Tak napr. číslo 6 je dokonalým číslom i dokonalým číslom druhého druhu.

Štruktúra dokonalých čísel druhého druhu a ich rozdelenie v postupnosti všetkých prírodzených čísel sú popísané v nasledujúcich dvoch vetách.

**Veta 3,1.** *Nutná a postačujúca podmienka k tomu, aby prírodzené číslo $n > 1$ bolo dokonalým číslom druhého druhu je, aby buď bolo súčinom dvoch rôznych prvočísel alebo treťou mocninou prvočísla.*

Dôkaz. 1. Nech $n > 1$, nech $d_1 < d_2 < \ldots < d_{\tau(n)}$ sú (všetci) prírodzení delitelia čísla $n$, nech (1) je kanonický rozklad čísla $n$. Predpokladajme, že $n$ je dokonalé číslo druhého druhu. Potom na základe definície

$$d_1 \,.\, d_2 \ldots d_{\tau(n)} = n^2 . \tag{9}$$

Uvážme teraz, že $n/d_1$, $n/d_2$, $\ldots$ $n/d_{\tau(n)}$ je tiež postupnosť (klesajúca) všetkých prírodzených deliteľov čísla $n$, preto

$$\frac{n}{d_1} \cdot \frac{n}{d_2} \cdots \frac{n}{d_{\tau(n)}} = n^2 . \tag{10}$$

Vynásobením (9), (10) dostaneme

$$n^4 = n^{\tau(n)}, \quad \tau(n) = 4 .$$

Zo vzorca (4) ihneď vyplýva $k \leqq 2$ (keby $k \geqq 3$, bolo by $\tau(n) \geqq 6$). Sú tu dve možnosti:

*a*) $k = 1$, potom $\alpha_1 = 3$, tj. $n = p_1^3$;
*b*) $k = 2$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, tj. $n = p_1 \cdot p_2$.

2. Ak $n = p_1^3$, resp. $n = p_1 \cdot p_2 (p_1 \neq p_2)$, je ihneď vidieť, že $n$ je dokonalé číslo druhého druhu.

Tým je dôkaz vety skončený.

**Veta 3,2.** *Nech U značí množinu všetkých dokonalých čísel druhého druhu. Potom*

$$\delta(U) = 0 .$$

Dôsledok. Položme $Z = U \cup V$, potom $\delta(Z) = 0$.

Dôkaz vety 3,2. Položme $U = U_1 \cup U_2$, kde $U_1$ značí množinu všetkých čísel čísel $p^3$ ($p$ je prvočíslo) a $U_2$ značí množinu všetkých čísel $p_1 \cdot p_2$ ($p_1 \neq p_2$; $p_1, p_2$ prvočísla). Potom pre každé $x$

$$U(x) = U_1(x) + U_2(x) .$$

Nech $p$ je najväčšie také prvočíslo, že $p^3 \leqq x$. Potom

$$U_1(x) = O(x^{1/3}) = o(x) \quad (x \to \infty) .$$

Pre $U_2(x)$ zase máme (pozri [5] str. 368)

$$U_2(x) = O\left(\frac{x \log \log x}{\log x}\right) = o(x) \quad (x \to \infty).$$

Teda spolu

$$U(x) = U_1(x) + U_2(x) = o(x) \quad (x \to \infty) .$$

V súvislosti s dokonalými číslami sme v druhej časti tejto práce spomenuli čísla $n$ s vlastnosťou $\sigma(n) = kn$, kde $k$ je racionálne číslo $> 1$. Spomenuli sme tiež WIRSINGOV výsledok o ich rozdelení v postupnosti všetkých prírodzených čísel. V dôsledku tohoto výsledku, ak označíme znakom $V_k$ ($k$ racionálne $> 1$) množinu všetkých $n$ s vlastnosťou $o(n) = kn$, dostávame

$$V_k(x) = o(x) \quad (x \to \infty)$$

a ak teda $N'$ značí množinu všetkých prírodzených čísel $> 1$, potom

$$N' = \bigcup_{k>1, k \text{ rac}} V_k ,$$

pričom vpravo máme rozklad množiny $N'$ (asymtotickej hustoty 1) na spočetný systém po dvoch disjunktných množín, z ktorých každá má asymptotickú hustotu 0.

Číslo $n$ sa nazýva $k$ – násobne dokonalým, ak $k$ je celé $> 1$ a $\sigma(n) = kn$. Pre $k = 2$ dostávame dokonalé čísla. Poznamenajme, že doteraz nepoznáme ani jedno nepárne $k$ – násobne dokonalé číslo pre žiadne $k$ celé $> 1$.

G. F. CRAMER dosiahol isté výsledky o štruktúre kanonických rozkladov čísel množiny $V_k$($k$ racionálne $> 1$). Uvedieme hlavný jeho výsledok (pozri [16]):

**Veta 3,3.** *Nech $k$ je racionálne číslo $> 1$ a $n$ prírodzené, $n \in V_k$. Nech $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots \ldots p_l^{\alpha_l}$ je kanonický rozklad čísla $n$ $(p_1 < p_2 < \ldots < p_l)$.*
*Potom*

$$p_1 < \frac{k + l - 1}{k - 1}.$$

Dôsledok. Ak $n$ je nepárne $k$ — násobne dokonalé číslo ($k > 1$), potom $l > 2k - 2$ (tj. $n$ má viac než $2k - 2$ navzájom rôznych prvočíselných deliteľov). Naozaj, kdeďže $n$ je nepárne, je

$$3 \leqq p_1 < \frac{k + l - 1}{k - 1}$$

a odtial $l > 2k - 2$.

Dôkaz vety 3,3. Položme

$$F(p^x) = \frac{p^{x+1} - 1}{p^x(p - 1)}$$

pre $x > 0$, $p \geqq 2$. Ihneď vidieť, že

$$\lim_{x \to \infty} F(p^x) = \frac{p}{p - 1}$$

a pre $x > 0$

$$F'(p^x) = \frac{\log p}{p^x(p - 1)} > 0,$$

preto

$$F(p_i^{\alpha_i}) < \frac{p_i}{p_i - 1} \quad (i = 1, 2, \ldots l).$$

Uvážme teraz, že

$$k = \frac{\sigma(n)}{n} = F(p_1^{\alpha_1}) F(p_2^{\alpha_2}) \ldots F(p_l^{\alpha_l}) < \prod_{i=1}^{l} \frac{p_i}{p_i - 1}. \tag{11}$$

Triviálny odhad dá

$$p_j > p_1 + (j - 1) \quad (j = 2, 3, \ldots l),$$

a tak

$$p_j - p_1 - (j - 1) > 0.$$

Pričítajme na obe strany poslednej nerovnosti kladné číslo

$$p_j p_1 + (j - 2) p_j;$$

po jednoduchej úprave dostaneme

$$\{p_1 + (j - 1)\}(p_j - 1) > p_j\{p_1 + (j - 2)\}$$

a odtiaľ

$$\frac{p_j}{p_j - 1} < \frac{p_1 + j - 1}{p_1 + j - 2} (j = 2, 3, \dots l) .$$

Na základe posledných nerovností dostaneme z (11)

$$k < \frac{p_1 + l - 1}{p_1 - 1}$$

a odtiaľ

$$p_1 < \frac{k + l - 1}{k - 1} .$$

Tým je dôkaz vety skončený.

Od G. F. Cramera pochádza aj nasledujúce zaujímavé zobecnenie pojmu dokonalého čísla, ktoré podáme tu v trochu upravenej forme.

Hovoríme, že $n$ je *ε-skoro dokonalým číslom* ($\varepsilon > 0$ , $\varepsilon$ reálne číslo), ak $|(\sigma(n)/n) - 2| < \varepsilon$ .

Zrejme každé dokonalé číslo je aj ε-skoro dokonalým pre každé $\varepsilon > 0$ .

Zatiaľ čo dodnes nevieme, aký je počet dokonalých čísel, ľahko možno nahliadnuť, že ku každému $\varepsilon > 0$ existuje nekonečne mnoho $\varepsilon$ – skoro dokonalých čísel. Napr. ak klademe $n = 2^s(s = 1, 2, \dots)$ alebo $n = 6p$ ($p > 2$, $p$ je prvočíslo), potom ľahko zistíme, že pre všetky $s$ od istého počínajúc, resp. pre všetky prvočísla $p$ od istého počínajúc je $|(\sigma(n)/n) - 2| < \varepsilon$ .

Tento poznatok (tj. existencia nekonečne mnoho $\varepsilon$ – skoro dokonalých čísel pre každé $\varepsilon > 0$) vyplýva aj z istého obecnejšieho výsledku G. F. Cramera, podľa krorého (pozri [17]) ku každému $\varepsilon > 0$ a každému reálnemu $A > 1$ existuje nekonečne mnoho párných i nekonečne mnoho nepárnych $n$ tak, že $0 < A - \sigma(n)/n < \varepsilon$ .

Poznamenajme ešte, že existencia nekonečne mnoho $\varepsilon$ – skoro dokonalých čísel ($\varepsilon > 0$) vyplýva tiež zo známeho faktu (pozri [3] str. 247), že množina všetkých členov postupnosti $\{\sigma(n)/n\}_{n=1}^{\infty}$ je hustá v intervale $(1, +\infty)$ .

## Literatúra


[1] W. Sierpinski: *Teoria liczb.* Warszawa-Wroclaw 1950.
[2] A. A. Buchštab: *Teorija čisel.* Moskva 1960.
[3] W. Sierpinski: *Teoria liczb* II. Warszawa 1959.
[4] W. Sierpinski: *O stu prostych, ale trudnych zagadnieniach arytmetyki.* Warszawa 1959.
[5] G. H. Hardy - E. M. Wright: *An introduction to the theory of numbers.* Oxford 1954.
[6] M. Perisastri: A note on odd perfect numbers. Math. Stud. *26* (1958), 179.
[7] M. Satyanarayana: Odd perfect numbers. Math. Stud. *27* (1959), 17.

[8] R. STUERWALD: Verschärfung einer notwendigen Bedingung für die Existenz einer ungeraden vollkommenen Zahl. Sitzungsber. der math.-naturwiss. Abl. der Bayerschen Akad. der Wiss. zu München (1937), 68.

[9] H. J. KANOLD: Untersuchungen über ungerade vollkommene Zahlen. J. rein. u. angew. Math. *183* (1941), 98.

[10] A. BRAUER: On the non-existence of odd perfect numbers of form $p^\alpha . q_1^2 , q_2^2 \dots q_{t-1}^2 q_t^4$. Bull. Amer. Math. Soc. *49* (1943), 712.

[11] P. ERDÖS: On the density of some sequences of numbers III. Jour. Lond. Math. Soc. *13* (1938), 119.

[12] B. HORNFECK: Zur Dichte der vollkommenen Zahlen. Arch. Math. *6* (1955), 442.

[13] H. J. KANOLD: Über die Verteilung der vollkommenen Zahlen und allgemeinerer Zahlenmengen. Math. Ann. *132* (1956/57), 442.

[14] B. HORNFECK - E. WIRSING: Über die Häufigkeit vollkommener Zahlen. Math. Ann. *133* (1957), 431.

[15] E. WIRSING: Bemerkung zu der Arbeit über vollkommene Zahlen in Math. Ann. *133* (1957), 431. Math. Ann. *137* (1959), 316.

[16] G. F. CRAMER: Extension of a theorem of servais on perfect numbers. Amer. Math. Monthly *48* (1941), 133.

[17] G. F. CRAMER: On „almost perfect" numbers. Amer. Math. Monthly *48* (1941), 17.

### Gyroskopická vozidla

poháněná setrvačníkem, který se při zastávkách roztočí pomocí vnějšího zdroje energie, zkoušeli před časem ve Švýcarsku v městské dopravě. Nyní staví na tomto principu v SSSR důlní lokomotivy. Setrvačník o váze 1,5 t akumuluje při 3000 ot/min asi 3 kWh, s čímž je možno uvézt důlní vláček na vzdálenost asi 2 km. Hlavní předností takové lokomotivy je bezpečnost.

*Ivan Soudek*

### Použití jaderných reakcí ($\alpha$, $n\gamma$) a ($\alpha$, $p\gamma$)

k stanovení obsahu lehkých prvků (Be, B, Li, F) zkoušeli v SSSR. Materiál se ozařuje poloniem nebo mědí ($Cu^{242}$) a měří se vyvolané neutronové záření. Už podle jeho intenzity je možno určit obsah nejlehčího prvku a složitějšími způsoby lze získat podrobnější údaje. Vzhledem k použití málo pronikavého záření $\alpha$ je metoda poměrně bezpečná.

*Ivan Soudek*

### Lité dráty se skleněnou izolací

se vyrábějí v SSSR. Do zatavené skleněné trubičky se vloží několik gramů kovu, který se roztaví idukčním ohřevem; zároveň změkne skleněná trubička tak, že se z ní dá táhnout kapilára, jejíž dutina je vyplněna kovem. Tak se dá zpracovat měď a její slitiny, stříbro, zlato, manganin a křemíkové železo na dráty o průměru 3—15 $\mu$m. Skleněná izolující vrstva má tloušťku 5—15 $\mu$m, takže je dobře ohebná. Dráty mají vynikající odolnost proti teplu, vlhkosti a chemickým vlivům, mimořádnou elektrickou stabilitu a lze jich použít ve vakuu. Metoda pomáhá šetřit kovy a zmenšovat váhu a rozměry přístrojů.

*Ivan Soudek*