

# Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

---

A. Hruška

Rovnice magnetodynamiky plazmatu

*Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*, Vol. 5 (1960), No. 3, 308--326

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/136988>

## Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 1960

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

- plasma *f*, *n* zúžená (é) vlastním magnetickým polem — плазма *f* сжатая собственным магн. полем — self-pinch plasma — *durch den eigenen Strom zusammen-geschnürt* Plasma *n* — plasma *m* pincé par le champ propre — plasma *m* autostrozzato
- plyn *m* zcela ionizovaný — полностью ионизованный газ *m* — fully ionized gas — *vollständig ionisiertes Gas n* — gaz *m* totalement ionisé — gas *m* completamente ionizzato
- pole *n* magnetické — магнитное поле *n* — magnetic field — *Magnetfeld n*, *magnetisches Feld n* — champ *m* magnétique — campo *m* magnetico
- pole vnější — внешнее поле *n* — external field — *äußeres Feld n* — champ *m* externe — campo *m* esterno
- pole vlastní — собственное поле *n* — self-field — *Eigenfeld n* — champ *m* propre — campo *m* proprio
- poloměr *m* gyrační — Ларморов радиус *m*, радиус *m* вращения, радиус *m* гирации — radius of gyration — *Gyrationradius m* — rayon *m* de giration — raggio *m* di girazione
- stlačení *n* magnetické — магнитное сжатие *n* — magnetic compression — *magnetische Kompression f* — compression *f* magnétique — compressione *f* magnetica
- unášení *n* — дрейф *m* — drift, drift motion — *Driftbewegung f* — *dérive f*, mouvement *m* de dérive — deriva *f* spostamento *m*
- vazba *f* mezi plazmou a neutrálním plynem — взаимодействие *n* плазмы и нейтрального газа — coupling between plasma and neutral gas — *Kopplung f* zwischen Plasma und Neutralgas — *couplage m* entre le plasma et le gaz neutre — *accoppiamento m* fra plasma e gas neutro
- vlny *fpl* hydromagnetické, vlny Alfvénovy — магнитогиродинамические волны *f* волны Альфена — magnetohydrodynamic waves, hydromagnetic waves — *magneto-hydrodynamische Wellen fpl* — ondes magnétohydrodynamiques — onde idromagnetiche, onde magneto-idrodinamiche
- zahřívání *n* elektromagnetické — электромагнитное нагревание *n* electromagnetic heating — *elektromagnetische Heizung f* — chauffage *m* électromagnétique — riscaldamento *m* elettromagnetico
- zamrzlý do siločar — замороженный в силовые линии, с приклепанными силовыми линиями — frozen in field lines — *mit eingefrorenen Feldlinien* — gélé dans les lignes de force magnétique — congelato nelle linee del campo

## ROVNICE MAGNETODYNAMIKY PLASMATU

A. HRUŠKA

*Astronomický ústav ČSAV, Praha*

### 1. Úvod

V předcházejícím článku dr. Kleczka byly probírány některé základní vlastnosti plasmatu a bylo stručně analysováno jeho chování v magnetickém poli. Zde se budeme podrobně zabývat odvozením základních rovnic dynamiky a magnetodynamiky plasmatu. Dříve než přistoupíme k řešení naší úlohy, prodiskutujeme chování jednotlivých nabitých částic v silovém poli buzeném ostatními částicemi. Analýza mikropole v plasmatu je v tomto článku základem pro odvození makroskopických rovnic.

Budeme se zabývat ionizovaným plynem, který se z termodynamického hlediska liší jen málo od plynu ideálního, tj. takového plynu, jehož částice na sebe navzájem nepůsobí. Aby se plyn lišil málo od plynu ideálního, k tomu je nutné, aby vzájemné silové působení částic bylo nepatrné. To znamená, že

energie vzájemné kulombické interakce dvou blízkých částic je velmi malá ve srovnání s energií příslušející jejich postupnému pohybu. Označme  $e$  náboj elektronu,  $R$  střední vzdálenost mezi částicemi,  $T$  teplotu plynu a  $K$  Boltzmannovu konstantu. Náš požadavek můžeme psát ve tvaru nerovnosti

$$(1) \quad \frac{e^2}{R} \ll KT.$$

Jestliže  $n$  je hustota částic, pak  $R \sim n^{-1/3}$  a nerovnost (1) můžeme vyjádřit výrazem

$$(2) \quad n \ll \left( \frac{KT}{e^2} \right)^3.$$

Dále budeme vždy předpokládat, že (2) platí.

## 2. Mikropole v plasmatu a relaxační doby

Budeme se zabývat vzájemným působením částic ionisovaného plynu. Porovnejme nejprve charakter interakce neutrálních atomů a částic plasmatu. Neutrální atomy nějakého plynu — pro určitost třeba vodíku — můžeme v hrubém přiblížení považovat za elastické koule o poloměru rovném poloměru prvního Bohrova orbitu. Tyto koule na sebe působí pouze tehdy, když se spolu přímo srazí. Vyberme si v plynu nějaký atom a určíme dobu, za kterou se v průměru směr jeho pohybu podstatně změní. To se stane prakticky při každé srážce našeho vybraného atomu s nějakým jiným — „polním“ — atomem. Hledaná doba  $\tau_a$  je tedy totožná se střední dobou mezi dvěma po sobě následujícími srážkami vybraného atomu. Označíme-li poloměr atomu  $\varrho$ , pak zřejmě platí

$$(3) \quad \tau_a \sim \frac{1}{n\varrho^2 v_a},$$

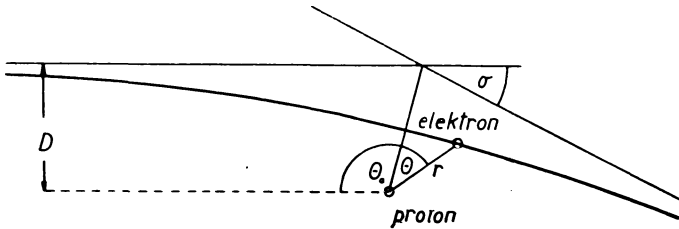
kde  $v_a$  je rychlost vybraného atomu. Jestliže atomy mají maxwellovské rozdělení rychlostí, pak je střední hodnota  $v_a$  přibližně rovna  $(KT/m_a)^{1/2}$ , kde  $m_a$  je hmota. Dosadíme-li tuto hodnotu za  $v_a$  do (3), dostaneme „relaxační dobu“, charakterisující celý soubor neutrálních atomů. Tato relaxační doba určuje rychlost, s kterou se soubor neutrálních atomů s libovolným počátečním rozdělením rychlostí blíží k maxwellovskému rozdělení. Kdybychom například vstřelili svazek atomů do plynu ve statické rovnováze, pak by vstřelené částice získaly maxwellovské rozdělení rychlostí právě za dobu  $\tau_a$ .

Odvodíme nyní dobu  $\tau$ , která má v ionisovaném plynu stejný význam jako  $\tau_a$  v plynu neutrálním. Tato veličina má veliký význam při mikroskopickém odvození pohybových rovnic.

Interakce částic v plasmatu má zcela jiný charakter než interakce neutrálních atomů. Jestliže ionisujeme náš plyn, tak elektrony a protony, které vzniknou z neutrálních atomů, na sebe začnou působit kulombickými silami. Velikost těchto sil klesá nepřímo úměrně se čtvercem vzdálenosti mezi částicemi a částice tedy na sebe působí na vzdálenosti mnohem větší, než v případě neutrálního plynu, kdy potenciální energie vzájemného působení dvou částic byla při vzdálenosti větší než poloměr klasické kruhové dráhy elektronu rovna nule. Tento charakter interakčních sil dává vznik řadě vlastností plasmatu, které jej fyzikálně odlišují od neutrálního plynu. Vybraná částice je při svém po-

hybu neustále v silovém poli generovaném všemi ostatními částicemi. Pro dobu  $\tau$ , za kterou se pohybový stav částice podstatně změní a která má analogický význam, jako doba  $\tau_a$  v neutrálním plynu, se musíme spokojit pouze s přibližnými výpočty. Oprávněnost aproximací budeme diskutovat později.

Budeme předpokládat, že se vybraná částice, např. elektron, pohybuje v nějakém libovolném okamžiku v silovém poli pouze jediné „polní částice“. Budeme sledovat vliv protonů na pohyb našeho vybraného elektronu. Nechť



Obr. 1.

elektron má na počátku přiblížení k nějakému protonu rychlost  $V$  (měřenou v souřadnicovém systému, který je vzhledem k protonu v klidu). Při přiblížení k protonu se elektron pohybuje po hyperbolické dráze, kterou v polárních souřadnicích  $(r, \Theta)$  (obr. 1) můžeme vyjádřit rovnicí

$$(4) \quad r = \frac{D^2 V^2 m}{e} \frac{1}{1 + \varepsilon \cos \Theta} ,$$

kde  $D$  je vzdálenost přímky, ve které leží vektor  $\mathbf{V}$ , od protonu, a excentricita  $\varepsilon$  je určena vztahem

$$(5) \quad \varepsilon^2 = 1 + \frac{m^2 D^2 V^4}{e^2} .$$

Vzorce (4), (5) dostaneme řešením pohybových rovnic Keplerova problému. Dynamické působení protonu na elektron je charakterisováno úhlem  $\sigma$ , o který se dráha elektronu odkloní od původního směru. Úhel  $\sigma$  vypočteme, jestliže v (4) necháme  $r$  vzrůstat do nekonečna, pak také  $\Theta$  se blíží své mezní hodnotě  $\Theta_0$  (viz obr. 1). Platí  $\cos \Theta_0 = -\frac{1}{\varepsilon}$ . Protože  $\sigma = 2\Theta_0 - \pi$ , plyne z poslední rovnice

$$(6) \quad \cos \sigma = 1 - \frac{2}{\varepsilon^2} .$$

Dosazením (5) do (6) a úpravou dostaneme

$$(7) \quad \sin \sigma = \frac{2 \frac{m D V^2}{e}}{1 + \frac{m^2 D^2 V^4}{e^2}} .$$

Elektron se podle našich zjednodušených představ postupně sráží s různými protony. Protože srážky s polními částicemi jsou náhodně rozloženy, nabývá  $\sin \sigma$  při různých srážkách zcela náhodných, jak kladných, tak i záporných hodnot, a jeho střední hodnota je rovna nule. Musíme tedy k charakterisaci změn směru pohybu elektronu používat veličiny  $\sin^2 \sigma$ , která je vždy kladná.

Za dobu  $\Delta t$  vykoná vybraný elektron  $d\nu \Delta t = 2\pi V n D \, dD \Delta t$  srážek, při kterých je  $D$  v intervalu  $(D, D + dD)$ . O době  $\Delta t$  předpokládáme, že je velká ve srovnání s trváním jedné srážky, ale malá ve srovnání s časem, který je potřeba k podstatné změně směru rychlosti  $\mathbf{V}$ . Poslední předpoklad o tom, že k podstatné změně směru  $\mathbf{V}$  je potřeba nesmírně velikého počtu srážek, je oprávněný, jak se přesvědčíme z dalšího. Vypočteme výraz  $\langle \sin^2 \sigma \rangle = \int \sin^2 \sigma \, d\nu$ .

Jest

$$(8) \quad \langle \sin^2 \sigma \rangle = \frac{8\pi n V^5 m^2}{e^2} \int_0^{D_{\max}} \frac{D^3 \, dD}{\left(1 + \frac{m^2 D^2 V^4}{e^2}\right)^2}.$$

Pro  $D_{\max} \rightarrow \infty$  integrál (8) diverguje, avšak z fyzikálních důvodů je jasné, že musí existovat konečné  $D_{\max}$ , při kterém je třeba integraci přerušit. Jedině tehdy může rovnice (8) popisovat fyzikálně reálný děj. Existencí a určením  $D_{\max}$  se nyní budeme zabývat.

Integrujme nejprve (8) podle  $D$ ; dostaneme

$$(9) \quad \langle \sin^2 \sigma \rangle = 4\pi \frac{ne^4}{V^3 m^2} \left[ \ln \left( 1 + \frac{m^2 V^4 D_{\max}^2}{e^2} \right) - \frac{1}{1 + \frac{m^2 V^4 D_{\max}^2}{e^2}} \right].$$

Označme  $D_0$  vzdálenost, kterou musí projít vybraný elektron od polní částice, aby se směr jeho pohybu změnil o  $90^\circ$ .  $\sin \sigma$  je v tomto případě roven 1, takže z rov. (7) plyne  $D_0 = \frac{e^2}{mV^2}$ . Dosazením  $D_0$  do (9) dostaneme

$$(10) \quad \langle \sin^2 \sigma \rangle = 4\pi V n D_0^2 \left[ \ln \left( 1 + \frac{D_{\max}^2}{D_0^2} \right) - \frac{1}{1 + \frac{D_{\max}^2}{D_0^2}} \right].$$

Tabulka 1

$\frac{D_{\max}}{D_0}$	0	1	2	10	10 <sup>2</sup>	10 <sup>4</sup>	10 <sup>8</sup>
$\langle \sin^2 \sigma \rangle$	0	0,19	0,81	3,63	8,21	17,4	35,8

Hodnota  $\langle \sin^2 \sigma \rangle$ , která charakterisuje rozptylování elektronů do směru kolmého ke směru jejich původního pohybu, závisí značně na volbě poměru  $D_{\max}/D_0$ . Tato závislost je ilustrována v tab. I. Z tabulky vidíme, že bereme-li v úvahu pouze blízké srážky elektronů s protony ( $D_{\max}/D_0$  malé), je pohyb vybraného elektronu ovlivňován polními protony jen málo, přes to, že každá

blízká srážka působí značný odklon vektoru rychlosti od původního směru. Naproti tomu jestliže  $D_{\max}/D_0$  je veliké, bereme v úvahu i „vzdálené“ srážky elektronu. Ačkoli každá taková srážka působí pouze malou změnu směru pohybu elektronu, jejich kumulativní efekt značně převyšuje vliv „blízkých“ srážek. Kromě prolému určení  $D_{\max}$  vzniká nyní ještě otázka o tom, jaký mají vzdálené srážky v naší teorii, která během přiblížení elektronu k nějakému protonu neuvažuje vliv ostatních polních částic, fyzikální smysl.

Celá dosavadní teorie se opírala o diskusi binárních srážek a evidentně platí, když  $D_{\max}$  je menší nebo řádově rovno střední vzdálenosti mezi částicemi  $n^{-1/3}$ . Kdybychom však používali takových hodnot  $D_{\max}$  při výpočtech viskozity nebo vodivosti plazmatu (tyto veličiny mohou být odvozeny z našich předpokladů), tak bychom zjistili, že naše vzorce nesouhlasí se skutečností. Interakce částic plazmatu je mnohem silnější, než vyplývá z takových úvah. Velmi přirozenou cestou k odstranění tohoto nesouhlasu je zvětšení  $D_{\max}$  tak, že  $D_{\max} \gg n^{-1/3}$ . V takovém případě nás ovšem zajímá:

- (1) zda je použitelná teorie, vycházející z aproximace, ve které je každá srážka považována za problém dvou těles, aniž je brán ohled na mikropole buzené ostatními částicemi,
- (2) jak je  $D_{\max}$  veliké.

Zabývejme se nejprve druhou otázkou. Elektrické pole buzené nějakým vybraným iontem musí být stíněno rozložením elektronů a ostatních iontů, takže ve vzdálenostech větších než jistá kritická mez, kterou označíme  $\lambda_D$  a nazveme Debyeovou stínící vzdáleností (Debye užíval první veličiny  $\lambda_D$  při studiu elektrolytů), pole vybraného iontu na náš elektron nepůsobí. Ukazuje se, že používáme-li  $\lambda_D$  místo  $D_{\max}$  při výpočtu různých difusních efektů v ionizovaném plynu, např. elektrické vodivosti, dostáváme výsledky souhlasící celkem uspokojivě se skutečností.

Vypočteme nyní  $\lambda_D$ . Vzhledem k tomu, že skoro ve všech fyzikálních veličinách, které závisí na  $D_{\max}$ , vystupuje tato hodnota pouze prostřednictvím výrazu  $\ln(\text{konstanta} \times D_{\max})$ , a to tak, že tyto veličiny jsou mu úměrné, tak postačí určit  $D_{\max} = \lambda_D$  pouze s malou přesností, aniž by byla podstatně narušena přesnost výsledků.

Vyberme v plazmatu nějaký iont a studujme průběh potenciálu v jeho okolí. Ve statistickém průměru bude tento potenciál, který označíme  $\varphi$ , sféricky symetrický, to znamená, že jeho hodnota bude ve vzdálenosti  $r$  od iontu záviset pouze na absolutní hodnotě  $r$  a nikoli na směru. Taková vzdálenost, ve které poklesne hodnota  $\varphi$  na  $1/e$ -tinu potenciálu  $\varphi_0 = \frac{e}{r}$ , buzeného pouze vybraným iontem, může být definována jako  $\lambda_D$ . Její velikost bude zřejmě reprezentovat velikost zastínění elektrického pole vybraného iontu ostatními částicemi.

Kolem našeho vybraného iontu se ve statistické rovnováze rozloží ostatní náboje v soulase s Boltzmannovým rozdělením. Hustota elektronů a ostatních polních iontů ve vzdálenosti  $r$  od vybraného iontu je

$$(11) \quad n_e = n_{e0} e^{+\frac{e\varphi}{kT}} \quad \text{a} \quad n_i = n_{i0} e^{-\frac{z_i e\varphi}{kT}},$$

kde  $n_{e0}$  a  $n_{i0}$  má význam hustoty v „nekonečné“ vzdálenosti od vybraného iontu, která je zde totožná s průměrnou hustotou částic.  $z_i$  je stupeň ionisace

iontů. Jestliže plasma je jako celek neutrální, pak  $n_{e0} = z_i n_{i0}$ . Zároveň musí platit Poissonova rovnice

$$(12) \quad \Delta\varphi = + 4\pi e(n_e - z_i n_i) .$$

Kromě toho jsme od počátku předpokládali, že energie kulombické interakce částic je mnohem menší než jejich kinetická energie, takže

$$e\varphi \sim \frac{e^2}{r} \lll KT .$$

Z této nerovnosti plyne, že (11) můžeme psát v přibližném tvaru

$$(13) \quad n_e = n_{e0} \left( 1 + \frac{e\varphi}{KT} \right), \quad n_i = n_{i0} \left( 1 - \frac{z_i e\varphi}{KT} \right) .$$

Dosazením (13) do (12) plyne

$$\Delta\varphi = \frac{4\pi e^2 n_{e0} (z_i + 1)}{KT} \varphi .$$

Poslední rovnici lze předepsat do tvaru

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\varphi}{dr} \right) = \kappa^2 \varphi ,$$

kde

$$(14) \quad \kappa^2 = \frac{4\pi e^2 n_{e0} (z_i + 1)}{KT} .$$

Substitucí  $\varphi = \frac{u}{r}$  získáme rovnici

$$(15) \quad \frac{d^2 u}{dr^2} - \kappa^2 u = 0 ,$$

která má řešení  $e^{-\kappa r}$  a  $e^{+\kappa r}$ . Fyzikální smysl má jen první z nich, které se pro  $r$  rostoucí nade všechny meze blíží k nule. Jest

$$\varphi \sim \frac{e^{-\kappa r}}{r} .$$

Podle předcházejícího výkladu je  $\kappa = \frac{1}{\lambda_D}$ , což podle (14) dává výsledek

$$(16) \quad \lambda_D = \left( \frac{KT}{4\pi e^2 n_{e0} (z_i + 1)} \right)^{1/2} .$$

Přistoupíme nyní k diskusi prvé z uvedených otázek. Ze statistické mechaniky víme, že v libovolném malém objemu plynu vznikají náhodné fluktuace počtu částic. Mysleme si nějaký objem  $V$  s lineárními rozměry o řádové velikosti  $\lambda_D$ . Silové pole, které je generováno fluktuacemi vně objemu  $V$ , na částice

uvnitř  $V$  v důsledku stínění, vznikajícího stejným mechanismem jako stínění náboje jednotlivého iontu, nepůsobí. Fluktuační hustoty, které vzniknou ve vzdálenosti od částice, která je menšího řádu než  $\lambda_D$ , na studovanou částici samozřejmě musí působit. Pohyb našeho vybraného elektronu je neustále ovlivňován krátkodobými elektrickými poli náhodného směru, které jsou generovány těmito fluktuacemi. Obrazně můžeme říci, že každá fluktuace reprezentuje jakousi polní kvazičástici, která má dynamicky analogický vliv jako obyčejný iont nebo elektron. A to je důvod, proč je naše teorie, vycházející z představy o binárních srážkách, aplikovatelná i pro  $D \gg n^{-1/2}$ . Naše poslední tvrzení se opírá pouze o intuitivní úvahy, uspokojivě přesný důkaz jeho správnosti podal Spitzer.

Tím jsme odstranili všechny nejasnosti v rovnicích (9), (10) a můžeme přistoupit k jejich využití. Naším cílem je odvodit relaxační dobu pro plasma, která má stejný fyzikální smysl jako doba  $\tau_a$  pro neutrální plyn. Výraz  $\langle \sin^2 \sigma \rangle$ , daný rovnicí (9), charakterisuje odchýlení dráhy elektronu od původního směru za jednotku času. Jestliže je  $\langle \sin^2 \sigma \rangle \Delta t \ll 1$ , pak to znamená, že pohyb elektronu není za jednotku času prakticky ovlivněn. Jestliže je  $\langle \sin^2 \sigma \rangle \Delta t$  řádu jednotky, pak je zřejmé, že byl směr pohybu elektronu za jednotku času značně změněn. Definujme tedy relaxační dobu  $\tau'$  rovnicí

$$(17) \quad \langle \sin^2 \sigma \rangle \tau' = 1 .$$

Dosažením (9) do (17) plyne (při zanedbání jednotky vzhledem k  $\frac{mV^4\lambda_D^2}{e^2}$ )

$$(18) \quad \tau' = \frac{m^2 V^3}{4\pi n e^4 \ln \frac{m^2 V^4 \lambda_D^2}{e^2}}$$

Předpokládejme, že elektrony mají alespoň přibližně maxwellovské rozdělení rychlostí a vypočteme střední hodnotu  $\tau'$ , kterou označíme  $\tau$ . Dostaneme

$$(19) \quad \tau = \frac{m^{3/2} (2KT)^{3/2}}{2\pi^{3/2} n e^4 \ln \frac{KT}{e} \lambda_D} .$$

Až dosud jsme rozebírali pouze interakci elektronu s protony; obdobně bychom mohli diskutovat interakci vybraného elektronu s ostatními polními elektrony a vypočítat relaxační dobu, odpovídající tomuto vzájemnému působení. Tuto dobu však nebudeme při odvozování makroskopických rovnic v tom stupni přiblížení, který použijeme, potřebovat.

### 3. Pohyb nabitě částice v homogenním magnetickém a elektrickém poli

Až dosud jsme uvažovali o pohybu částic za nepřítomnosti vnějších silových polí. Změny rychlosti částice byly působeny pouze srážkami s ostatními částicemi. Vyšetříme nyní vliv magnetického pole intenzity  $\mathbf{H}$  a elektrického pole intenzity  $\mathbf{E}$  na částici o hmotě  $m$ , pohybující se rychlostí  $\mathbf{v}$ . Pohybová rovnice částice je

$$(20) \quad m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = e \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{H} \right) ,$$



$c$  je rychlost světla. Volme systém souřadnic tak, že  $\mathbf{H}$  má směr osy  $z$  a  $\mathbf{E}$  leží v rovině  $xy$ . Rozepíšeme-li rovnici (20) do složek, dostaneme

$$(21) \quad m \frac{dv_x}{dt} = \frac{e}{c} v_y H, \quad (22) \quad m \frac{dv_y}{dt} = eE_y - \frac{e}{c} v_x H, \quad (23) \quad m \frac{dv_z}{dt} = eE_z.$$

z (23) plyne

$$v_z = \frac{e}{m} E_z t + v_z|_{t=0}.$$

Násobíme-li (22) imaginární jednotkou  $j$  a sečteme-li takto vzniklý vztah s rovnicí (21), dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(v_x + jv_y) &= \frac{e}{mc} H(v_y - jv_x) + j \frac{e}{m} E_y, \\ &= -\frac{je}{mc} H(v_x + jv_y) + j \frac{e}{m} E_y. \end{aligned}$$

Zavedeme-li označení  $v_x + jv_y = U$ ,  $\frac{eH}{mc} = \omega$ , můžeme poslední rovnici psát ve tvaru

$$\frac{dU}{dt} + j\omega U = j \frac{e}{m} E_y.$$

Řešením tohoto vztahu snadno dostaneme

$$(24) \quad U = Ae^{-j\omega t} + \frac{eE_y}{m\omega},$$

kde  $A$  je komplexní konstanta. Můžeme ji psát ve tvaru  $ae^{j\alpha}$ , kde  $a, \alpha$  jsou reálné. Dosazením tohoto tvaru  $A$  do (24) a úpravou plyne

$$U = a e^{-j(\omega t - \alpha)} + \frac{cE_y}{H}.$$

Porovnáním reálné a imaginární části  $U$  s pravou stranou poslední rovnice plyne

$$(25) \quad \left. \begin{aligned} v_x &= a \cos(\omega t - \alpha) + \frac{cE_y}{H}, \\ v_y &= a \sin(\omega t - \alpha). \end{aligned} \right\}$$

Za nepřítomnosti elektrického pole se částice pohybuje v rovině  $xy$  po kružnici poloměru  $\frac{a}{\omega}$  s frekvencí

$$(26) \quad \omega = \frac{eH}{mc}.$$

Její rychlost je konstantní, protože magnetické pole uděluje částici pouze zrychlení kolmé ke směru okamžitého pohybu, takže se neustále mění pouze směr a nikoli velikost impulsu částice. Jestliže je jak  $\mathbf{H}$ , tak  $\mathbf{E}$  různé od nuly, tak

částice vykonává zrychlený pohyb ve směru  $\mathbf{H}$ , a v rovině kolmé k magnetickému poli se pohybuje po kružnici, jejíž střed se posunuje ve směru kolmém k  $\mathbf{H}$  a  $\mathbf{E}$  rychlostí  $cE_y/H$ . Podobný posuv gyačnické kružnice nastává i za nepřítomnosti elektrického pole, jestliže je  $\mathbf{H}$  nehomogenní.

Jestliže je plyn dostatečně řídký, tak částice volně krouží podle předcházejících rovnic. Nutná a postačující podmínka pro to je, aby relaxační doba byla mnohem větší, než doba jedné otočky v mag. poli. Jestliže naopak je  $\tau \ll \frac{1}{\omega}$ , je pohyb částice regulován pouze srážkami a plyn, který je ve statistické rovnováze, se z mikroskopického hlediska chová jako by magnetické pole nebylo přítomno.

#### 4. Boltzmannova rovnice

Přistoupíme nyní k odvození základní rovnice kinetické teorie plynů. Nechť je počet částic plynu v malém objemu konfiguračního prostoru  $d^3\mathbf{r} = dx dy dz$  a rychlostního prostoru  $d^3\mathbf{v} = dv_x dv_y dv_z$  dán rovnicí

$$d^6n = f d\mathbf{r} d\mathbf{v},$$

kde  $f$  je tzv. funkce rozdělení částic. Ve stavu statistické rovnováhy má  $f$  maxwellovský tvar

$$d^6n = \text{konst.} \cdot e^{-j^2(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)} d\mathbf{v} d\mathbf{r},$$

kde  $j = \frac{m}{2KT}$ . V obecném případě, kdy plyn není v rovnovážném stavu, je  $f$  funkcí nejen  $\mathbf{v}$  ale i  $\mathbf{r}$  a času  $t$

$$(27) \quad f = f(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}).$$

Odvodíme nyní rovnici, kterou musí za takových okolností  $f$  splňovat.

Předpokládejme, že na částice působí vnější síla  $\mathbf{F}$ , nezávislá na rychlosti částice, nebo alespoň k rychlosti kolmá. Předpokládejme dále, že částice na sebe navzájem nepůsobí srážkami. Ty částice, které jsou v čase  $t$  v objemovém elementu  $d\mathbf{r} d\mathbf{v}$  kolem bodu, určeného polohovými vektory  $\mathbf{r}, \mathbf{v}$ , budou v čase  $t + dt$  ve stejně velikém elementu kolem bodu  $\mathbf{r} + d\mathbf{r}, \mathbf{v} + d\mathbf{v}$ . Protože  $d\mathbf{r} = \mathbf{v} dt$  a  $d\mathbf{v} = (\text{zrychlení na jednotku hmoty}) \times dt = \frac{\mathbf{F}}{m} dt$ , tak poloha našich částic bude v čase  $t + dt$  určena polohovými vektory  $\mathbf{r} + \mathbf{v} dt, \mathbf{v} + \frac{\mathbf{F}}{m} dt$ . Žádné jiné částice v objemovém elementu kolem tohoto bodu nebudou. Z toho plyne, že

$$f\left(t + dt, \mathbf{r} + \mathbf{v} dt, \mathbf{v} + \frac{\mathbf{F}}{m} dt\right) - f(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}) = 0.$$

Taylorovým rozvojem do členů prvního řádu dostaneme

$$(28) \quad \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\mathbf{F}}{m} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = 0.$$

Zde symbol  $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}}$  znamená tři složky vektoru grad  $f$ , výraz  $\mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}}$  je skalární součin  $v_x \frac{\partial f}{\partial x} + v_y \frac{\partial f}{\partial y} + v_z \frac{\partial f}{\partial z}$ .

Obdobně  $\frac{\mathbf{F}}{m} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}$  může být vyjádřeno ve tvaru  $\frac{1}{m} \left( F_x \frac{\partial f}{\partial v_x} + F_y \frac{\partial f}{\partial v_y} + F_z \frac{\partial f}{\partial v_z} \right)$ .

Jestliže se částice plynu srážejí, pak některé z částic, které jsou v čase  $t$  v objemovém elementu  $d\mathbf{r} d\mathbf{v}$  v bodě určeném polohovými vektory  $\mathbf{r}$  a  $\mathbf{v}$  a po čase  $dt$  by dospěly do blízkosti bodu  $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{v} + d\mathbf{v}$ , jsou srážkami odchýleny ze své dráhy, takže se dostanou po čase  $dt$  do zcela jiných míst fázového prostoru. Jiné částice, které v čase  $t$  nebyly v „blízkosti“ bodu  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{v}$  mohou být srážkami během doby  $dt$  vrženy do blízkosti bodu  $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{v} + d\mathbf{v}$ . Na pravé straně rovnice (28) pak bude místo nuly výraz určující tuto změnu počtu částic, takže (28) přejde v

$$(29) \quad \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\mathbf{F}}{m} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_c$$

Napsali jsme Boltzmannovu rovnici pro plyn, skládající se ze stejných částic. Jestliže jsou v plynu jednak elektrony, jednak různé druhy iontů, pak pro každou složku můžeme psát rovnici stejného tvaru jako (29). Při tom ovšem musíme pamatovat, že  $\mathbf{F}$  závisí na druhu částice a do  $\frac{\partial f}{\partial t} \Big|_c$  musíme obecně zahrnout vliv srážek se všemi druhy částic.

Největší potíže při řešení Boltzmannovy rovnice činí většinou člen  $\frac{\partial f}{\partial t} \Big|_c$ . Jeho tvar byl pro dvojně srážky nalezen již dříve a je diskutován velmi podrobně v různých učebnicích kinetické teorie plynů (Jeans, Chapman-Cowling). Tento výraz je vhodný pro popis srážek v neutrálním plynu, pro popis interakce v ionisovaném plynu se příliš nehodí nejen pro svou matematickou složitost, ale i z principiálních důvodů, spočívajících v tom, že částice v ionisovaném plynu se dynamicky neovlivňují ani tak blízkými srážkami, jako vzdálenými přiblíženími. Koncepce dvojných srážek bývá však užívána i u ionosovaného plynu ve smyslu teorie vyložené při odvozování relaxačních dob. Člen  $\frac{\partial f}{\partial t} \Big|_c$  bývá nahrazován tak zvanou Fokkerovou-Planckovou aproximací, která ideově vychází z teorie Brownova pohybu. I tento tvar  $\frac{\partial f}{\partial t} \Big|_c$  však je velmi komplikovaný a i v nejjednoduších případech je třeba Boltzmannovu rovnici řešit numeric ky. Prakticky je většinou vhodné použít pro reprezentaci pravé strany Boltzmannovy rovnice nějaký, více nebo méně intuitivně nalezený model, který je volen tak, aby byl co nejjednodušší. Taková byt i velmi hrubá aproximace nám často umožní diskutovat různé dynamické problémy do značné hloubky.

K nejjednoduššímu z možných modelových tvarů pro  $\frac{\partial f}{\partial t} \Big|_c$  dojdeme přibližně tímto myšlenkovým postupem: Představme si soustavu částic, která má v čase  $t = 0$  nějaké rozdělení rychlostí, charakterisované funkcí  $f$ , a pro  $t > 0$  je ponechána bez působení vnějších sil. Pro  $t \rightarrow \infty$  se  $f$  blíží k maxwellovskému rozdělení  $f_0$ . Prakticky ovšem částice získají maxwellovské rozdělení již za relaxační dobu  $\tau$ . Za dobu  $\tau$  se rozdělení  $f$  v každém místě změní na  $f_0$ . Obrazně

můžeme říci, že se za dobu  $\tau$  v jednotkovém objemovém elementu „objeví“  $f_0$  částic a zároveň se „ztratí“  $f$  částic. Změna počtu částic za jednotku času je

$$(30) \quad \left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_c = \frac{f_0 - f}{\tau},$$

takže můžeme Boltzmannovu rovnici psát ve tvaru

$$(31) \quad \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\mathbf{F}}{m} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = \frac{f_0 - f}{\tau}.$$

Z předcházejícího je zřejmé, že aproximace (30) je dosti drastická. Nicméně, pro přibližné úvahy a pro odvozování makroskopických rovnic je postačující a budeme jí dále užívat.

### 5. Makroskopické rovnice

Budeme se zabývat odvozením pohybových rovnic plynu, skládajícího se z iontů a elektronů. Veličiny, vztahující se k iontům, budeme označovat indexem 1, veličiny vztahující se k elektronům označíme indexem 2. Pokud nebude záležet na specifikaci částice, budeme podle potřeby užívat indexu  $i$  nebo  $k$ . Rychlost částice  $\mathbf{v}_i$  se skládá z náhodné rychlosti  $\mathbf{u}_i$  a z rychlosti  $i$ -tého plynu jako celku  $\mathbf{V}_i$ . Jest

$$(32) \quad \mathbf{v}_i = \mathbf{u}_i + \mathbf{V}_i, \quad \bar{\mathbf{v}}_i = \mathbf{V}_i,$$

kde čárka nad symbolem  $\mathbf{v}_i$  znamená střední hodnotu.

Násobme Boltzmannovu rovnici pro plyn s indexem  $i$   $d\mathbf{v}_i$  a integrujme přes celý rychlostní prostor; dostaneme

$$\int \frac{\partial f_i}{\partial t} d\mathbf{v}_i = \frac{\partial n_i}{\partial t}, \quad \int v_i \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{r}} d\mathbf{v}_i = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} (n_i \mathbf{V}_i),$$

$$\int \frac{\mathbf{F}_i}{m_i} \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{v}_i} d\mathbf{v}_i = \left[ \frac{\mathbf{F}_i}{m_i} f_i \right]_{v_x=v_y=v_z=-\infty}^{v_x=v_y=v_z=+\infty} = 0$$

a konečně, protože se celkový počet částic srážkami nemění,

$$\int \frac{f_{i0} - f_i}{\tau} d\mathbf{v}_i = 0.$$

Výsledkem této operace je rovnice kontinuity

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} (n_i \mathbf{V}_i) = 0,$$

kteou můžeme přepsat do obvykle užívaného tvaru

$$(33) \quad \frac{\partial n_i}{\partial t} + \operatorname{div} (n_i \mathbf{V}_i) = 0.$$

Násobme Boltzmannovu rovnici pro  $i$ -tý plyn výrazem  $m_i \mathbf{v}_i d\mathbf{v}_i$  a integrujme přes  $\mathbf{v}_i$ ; pak

$$(34) \quad m_i \int \mathbf{v}_i \frac{\partial f_i}{\partial t} d\mathbf{v}_i = m_i \frac{\partial}{\partial t} (n_i \bar{\mathbf{v}}_i),$$

$$(35) \quad m_i \int \mathbf{v}_i \left( \mathbf{v}_i \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{r}} \right) d\mathbf{v}_i = m_i \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} (n_i \overline{\mathbf{v}_i \mathbf{v}_i}),$$

( $\mathbf{v}_i \mathbf{v}_i$  je dyadický součin),

$$(36) \quad \int \mathbf{v}_i \left( \mathbf{F}_i \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{v}_i} \right) d\mathbf{v}_i = -n_i \mathbf{F}_i.$$

Poslední rovnice můžeme názorně odvodit, jestliže rozepíšeme vektory do souřadnic. Integrál vzniklý ze srážkového členu označme jako  $\Phi_i$

$$(37) \quad \Phi_i = m_i \int \frac{f_{i0} - f_i}{\tau} \mathbf{v}_i d\mathbf{v}_i.$$

Z (34—37) plyne

$$m_i \frac{\partial}{\partial t} (n_i \bar{\mathbf{v}}_i) + m_i \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} (n_i \overline{\mathbf{v}_i \mathbf{v}_i}) = n_i \mathbf{F}_i + \Phi_i.$$

Z (34) dostaneme

$$(38) \quad m_i \frac{\partial}{\partial t} (n_i \bar{\mathbf{v}}_i) = m_i \frac{\partial}{\partial t} (n_i \mathbf{V}_i).$$

(35) můžeme upravit do tvaru

$$(39) \quad m_i \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} (n_i \overline{\mathbf{v}_i \mathbf{v}_i}) = \frac{\partial \Pi_i}{\partial \mathbf{r}} + m_i \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} (n_i \mathbf{V}_i \mathbf{V}_i),$$

kde

$$\Pi_i = n_i m_i \overline{\mathbf{u}_i \mathbf{u}_i},$$

takže

$$m_i \frac{\partial}{\partial t} (n_i \mathbf{V}_i) + \frac{\partial \Pi_i}{\partial \mathbf{r}} + m_i \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} (n_i \mathbf{V}_i \mathbf{V}_i) = n_i \mathbf{F}_i + \Phi_i.$$

Použijeme-li pro  $\frac{\partial n_i}{\partial t}$  výraz plynoucí z rovnice kontinuity, přejde poslední rovnice do tvaru

$$(40) \quad m_i n_i \frac{d\mathbf{V}_i}{dt} + \frac{\partial \Pi_i}{\partial \mathbf{r}} = n_i \mathbf{F}_i + \Phi_i.$$

Zbývá ještě určit tvar členu  $\Phi_i$ . V případě, že jsou přítomny pouze částice jednoho druhu, tak

$$\begin{aligned} \Phi &= m \int \mathbf{v} \frac{f_0 - f}{\tau} d\mathbf{v} = m \int \mathbf{u} \frac{f_0}{\tau} d\mathbf{u} - \\ &- m \int \mathbf{u} \frac{f}{\tau} d\mathbf{u} + m \mathbf{V} \int \frac{f_0 - f}{\tau} d\mathbf{u}. \end{aligned}$$

První člen je roven nule z důvodu sférické symetrie  $f_0$ , druhý člen je roven nule podle vztahu (32) a konečně integrál v třetím členu je roven nule, protože srážky nemění celkový počet částic.

Vypočteme tvar  $\Phi_i$  za předpokladu, že se plyn skládá ze dvou komponent. Definujeme rychlost  $\mathbf{W}$  vztahem

$$(41) \quad n_1 m_1 \mathbf{V}_1 + n_2 m_2 \mathbf{V}_2 = (n_1 m_2 + n_2 m_1) \mathbf{W};$$

dále ať je  $\mu_i = \frac{n_i m_i}{\sum_{k=1,2} n_k m_k}$ , pak

$$(42) \quad \mathbf{W} = \mu_1 \mathbf{V}_1 + \mu_2 \mathbf{V}_2.$$

$\mathbf{W}$  je zřejmě rychlost těžiště plynu jako celku. Rychlost nějaké částice vzhledem k těžišti malého objemu plynu jako celku  $\mathbf{w}_i$  je určena vztahem

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{w}_i + \mathbf{W}.$$

Podle vztahu (32) a předcházející rovnice platí

$$\mathbf{u}_i + \mathbf{V}_i = \mathbf{w}_i + \mathbf{W},$$

to jest

$$\mathbf{u}_i + \mathbf{V}_i = \mathbf{w}_i + \mu_1 \mathbf{V}_1 + \mu_2 \mathbf{V}_2.$$

Násobíme-li poslední vztah  $m_1 n_1 + m_2 n_2$  a vypočteme  $\mathbf{w}_i$ ; dostaneme

$$(43) \quad \mathbf{w}_i = \mathbf{u}_i + \mathbf{g}_{ik}, \quad (k \neq i),$$

kde

$$\mathbf{g}_{ik} = \mu_k (\mathbf{V}_i - \mathbf{V}_k).$$

Z rovnice (43) plyne

$$(44) \quad \bar{\mathbf{w}}_i = \mathbf{g}_{ik}.$$

Pro binární plyn označuje  $f_{i0}$  maxwellovské rozdělení v rychlostech  $\mathbf{w}_i$ , takže z důvodů sférické symetrie  $f_0$  plyne  $\int \mathbf{w}_i f_{i0} d\mathbf{w}_i = 0$ , kromě toho z rovnice (32) dostáváme  $\int \mathbf{u}_i f_i d\mathbf{u}_i = 0$ , avšak podle rovnice (43) je

$$(45) \quad \int \mathbf{w}_i f_i d\mathbf{w}_i = n_i \mu_k (\mathbf{V}_i - \mathbf{V}_k), \quad (k \neq i).$$

Podle předcházejícího lze pro  $\Phi_i$  psát

$$\begin{aligned} \Phi_i &= m_i \int \mathbf{v}_i \frac{f_{i0} - f_i}{\tau} d\mathbf{v}_i = m_i \int \mathbf{w}_i \frac{f_{i0} - f_i}{\tau} d\mathbf{w}_i = \\ &= -\frac{m_i}{\tau} \int \mathbf{w}_i f_i d\mathbf{w}_i = -\frac{m_1 n_1 m_2 n_2}{(m_1 n_1 + m_2 n_2) \tau} (\mathbf{V}_i - \mathbf{V}_i), \end{aligned}$$

takže (40) lze psát v konečném tvaru

$$(46) \quad m_i n_i \frac{d\mathbf{V}_i}{dt} + \frac{\partial II_i}{\partial \mathbf{r}} = n_i \mathbf{F}_i - \frac{m_1 n_1 m_2 n_2}{m_1 n_1 + m_2 n_2} \frac{1}{\tau} (\mathbf{V}_i - \mathbf{V}_k).$$

Přistupme nyní k diskusi rovnice (46). První člen reprezentuje změnu hybnosti, druhý člen obsahuje tensor tlaku  $\Pi_i$ , definovaný výrazem  $m_i n_i \overline{u_i u_i}$ , který můžeme rozepsat do tvaru (vynecháme pro jednoduchost na chvíli index  $i$ )

$$\begin{aligned} mn \overline{uu} &= mn(\overline{w} - \overline{w})(\overline{w} - \overline{w}), \\ &= mn \overline{ww} + mn \overline{ww} - 2mn \overline{ww}, \\ &= \Psi - mn \overline{ww}, \end{aligned}$$

kde

$$\Psi = mn \overline{ww}.$$

Někdy bývá tensor tlaku definován jako  $\Pi$  (definice tohoto článku), někteří autoři však definují tlak výrazem  $\Psi$ . Ve složkách můžeme psát

$$(47) \quad \frac{\Pi_{\alpha\beta}}{mn} = \begin{bmatrix} \overline{u_x u_x} & \overline{u_x u_y} & \overline{u_x u_z} \\ \overline{u_y u_z} & \cdot & \cdot \\ \overline{u_z u_y} & \cdot & \cdot \end{bmatrix},$$

$$(48) \quad \frac{\Psi_{\alpha\beta}}{mn} = \begin{bmatrix} \overline{w_x w_x} & \overline{w_x w_y} & \overline{w_x w_z} \\ \overline{w_y w_x} & \cdot & \cdot \\ \overline{w_z w_y} & \cdot & \cdot \end{bmatrix}.$$

Pokud jsou odchylky  $f$  od maxwellovského rozdělení nepatrné, je  $\overline{u_x u_y} = \overline{u_x u_z} = \overline{u_y u_z} = \overline{w_x w_y} = \overline{w_x w_z} = \overline{w_y w_z} = 0$ ,  $\overline{u_x u_x} = \overline{u_y u_y} = \overline{u_z u_z} = \frac{1}{3} \mathbf{u}^2 = \frac{1}{3} \mathbf{w}^2$  a  $\Pi = \Psi$ . Můžeme psát, že  $\Pi$  i  $\Psi$  je rovno nějaké hodnotě  $p$ .

Definujeme-li teplotu rovnicí  $\frac{1}{2} m \overline{w^2} = \frac{3}{2} KT$ , je  $p = nKT$  respektive  $p_i = n_i KT$  a veličina  $p_i$ , určená předcházejícími vztahy, má význam tlaku  $i$ -té složky plynu v obvyklém slova smyslu.  $p_i$  je již skalár.

První člen na pravé straně rov. (46) lze psát ve tvaru

$$(49) \quad \mathbf{F}_i = Z_i e \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{V}_i \times \mathbf{H} \right) + m_i \mathbf{g},$$

kde  $Z$ , příslušející elektronu je  $-1$  a  $\mathbf{g}$  je gravitační zrychlení částice. Napišme nyní rovnici (46) pro protonový a elektronový plyn, v případě, že  $n_1 = n_2 = n$  a  $\Pi_i = p_i$ . Jest

$$(50) \quad m_1 n \frac{d\mathbf{V}_1}{dt} + \text{grad } p_1 = ne \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{V}_1 \times \mathbf{H} \right) + nm_1 \mathbf{g} - \frac{m_1 m_2 n^2}{\rho \tau} (\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2),$$

$$m_2 n \frac{d\mathbf{V}_2}{dt} + \text{grad } p_2 = -ne \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{V}_2 \times \mathbf{H} \right) + nm_2 \mathbf{g} - \frac{m_1 m_2 n^2}{\rho \tau} (\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1),$$

( $\rho = m_1 n_1 + m_2 n_2$ ). Sečtením rovnic (50) dostaneme

$$(51) \quad n \left( m_1 \frac{d\mathbf{V}_1}{dt} + m_2 \frac{d\mathbf{V}_2}{dt} \right) + \text{grad} (p_1 + p_2) = \frac{ne}{c} (\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2) \times \mathbf{H} + (m_1 + m_2) n \mathbf{g} .$$

(51) lze pomocí (41) a vztahu pro proud  $\mathbf{i}$ ,

$$(52) \quad \mathbf{i} = ne(\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2) ,$$

psát ve tvaru

$$(53) \quad \rho \frac{d\mathbf{W}}{dt} + \text{grad} (p_1 + p_2) = \frac{1}{c} \mathbf{i} \times \mathbf{H} + \rho \mathbf{g} .$$

Dělme první rovnici (50)  $m_1$  a druhou  $m_2$  a výsledky odečtěme; dostaneme

$$(54) \quad n \left( \frac{d\mathbf{V}_1}{dt} - \frac{d\mathbf{V}_2}{dt} \right) + \text{grad} \left( \frac{p_1}{m_1} - \frac{p_2}{m_2} \right) = \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) ne \mathbf{E} + \frac{ne}{c} \left( \frac{\mathbf{V}_1}{m_1} + \frac{\mathbf{V}_2}{m_2} \right) \times \mathbf{H} - \left( \frac{n^2 m_2}{\rho \tau} + \frac{n^2 m_1}{\rho \tau} \right) (\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2) .$$

Dosazením (52) do (54) a zanedbáním  $m_2$  vzhledem k  $m_1$  dostaneme

$$(55) \quad \frac{1}{e} \frac{d\mathbf{i}}{dt} = \frac{1}{m_2} \text{grad} p_2 + \frac{ne\mathbf{E}}{m_2} + \frac{ne}{m_2 c} \mathbf{V}_2 \times \mathbf{H} - \frac{1}{\tau e} \mathbf{i} .$$

Podle (42) lze v naší aproximaci psát  $\mathbf{W} = \mathbf{V}_1$ , takže

$$ne\mathbf{V}_2 = ne\mathbf{W} - \mathbf{i}$$

a rovnice (55) přejde do tvaru

$$(56) \quad \tau \frac{d\mathbf{i}}{dt} = \frac{e\tau}{m_2} \text{grad} p_2 + \frac{ne^2\tau}{m^2} \mathbf{E} + \frac{n\tau e^2}{m_2 c} \mathbf{W} \times \mathbf{H} - \frac{e\tau}{m_2 c} \mathbf{i} \times \mathbf{H} - \mathbf{i} .$$

(56) je Ohmův zákon pro pohybující se prostředí v magnetickém poli. Jestliže  $\frac{d\mathbf{i}}{dt} = 0$ ,  $\text{grad} p_2 = 0$ ,  $\mathbf{H} = 0$  tak z (56) plyne známý tvar Ohmova zákona

$$(57) \quad \mathbf{i} = \sigma \mathbf{E}$$

kde vodivost  $\sigma$  je určena vztahem

$$(58) \quad \sigma = \frac{ne^2\tau}{m_2} .$$

Člen na levé straně rov. (56) je řádově roven výrazu  $\tau \frac{\dot{\mathbf{i}}}{T}$ , kde  $T$  je charakteristický čas studovaného procesu. Protože obvykle je  $\frac{\tau}{T} \ll 1$  tak je tento člen



zanedbatelný vzhledem k poslednímu členu na pravé straně a (56) lze psát ve tvaru

$$(59) \quad \mathbf{i} + \frac{e\tau}{m_2c} \mathbf{i} \times \mathbf{H} = \sigma \mathfrak{F},$$

kde

$$\mathfrak{F} = \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{W} \times \mathbf{H} + \frac{1}{ne} \text{grad } p_2. \quad (60)$$

Předpokládejme nejprve, že  $\mathfrak{F}$  je rovnoběžné s  $\mathbf{H}$ . V takovém případě z (59) plyne, že

$$\mathbf{i} \times \mathbf{H} = 0$$

$$\mathbf{i} = \sigma \mathfrak{F}.$$

Poslední rovnice je formálně stejného tvaru jako (57). K intenzitě elektrického pole v pohybujícím se prostředí  $\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{W} \times \mathbf{H}$  přistupuje ještě „ekvivalentní intenzita“  $\frac{\text{grad } p_2}{ne}$ . Vodivost plazmatu ve směru magnetického pole je stejná jako když toto pole není přítomno. Předpokládejme dále, že  $\mathfrak{F}$  je kolmé na  $\mathbf{H}$ . Násobíme-li (59) skalárně vektorem  $\mathbf{H}$ , tak zjistíme, že  $\mathbf{i}$  je kolmé na  $\mathbf{H}$ . Násobíme-li (59) vektorem  $\mathbf{H}$  vektorově zprava, tak dostaneme

$$\mathbf{i} \times \mathbf{H} + \frac{e\tau}{m_2c} (\mathbf{i} \times \mathbf{H}) \times \mathbf{H} = \sigma \mathfrak{F} \times \mathbf{H},$$

$$\mathbf{i} \times \mathbf{H} = \sigma \mathfrak{F} \times \mathbf{H} - \frac{e\tau H^2}{m_2c} \mathbf{i}.$$

Dosažením posledního vztahu pro  $\mathbf{i} \times \mathbf{H}$  do rovnice (59) plynou postupně vztahy

$$\mathbf{i} + \frac{\sigma e\tau}{m_2c} \mathfrak{F} \times \mathbf{H} + \frac{e^2\tau^2}{m_2^2c^2} H^2 \mathbf{i} = \sigma \mathfrak{F},$$

$$\mathbf{i}(1 + \omega^2\tau^2) = \sigma \left( \mathfrak{F} - \frac{\omega\tau}{H} \mathfrak{F} \times \mathbf{H} \right),$$

$$\mathbf{i} = \sigma_1 \mathfrak{F} - \sigma_2 \frac{\mathfrak{F} \times \mathbf{H}}{H},$$

kde

$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{1 + \omega^2\tau^2}, \quad \sigma_2 = \frac{\sigma\omega\tau}{1 + \omega^2\tau^2}$$

jsou vodivosti ve směru elektrického pole  $\mathfrak{F}$  a ve směru kolmém na  $\mathfrak{F}$  a  $\mathbf{H}$ . Jestliže je relaxační doba mnohem menší než doba jedné otočky elektronu v magnetickém poli ( $\omega\tau \ll 1$ ) tak  $\sigma_1 \rightarrow \sigma$  a  $\sigma_2 \rightarrow 0$  a tensor vodivosti se redukuje na skalár  $\sigma$ . Jestliže naopak je  $\omega\tau \gg 1$  tak je vodivost ve směru  $\mathfrak{F}$  kolmém k mag. poli značně redukována a  $\sigma_2$  se opět blíží k nule. Jestliže je  $\omega\tau$  řádu jed-

ničky tak je  $\sigma_2 \sim \sigma$  a ve směru kolmém k  $\mathfrak{F}$  a  $\mathbf{H}$  teče tak zv. Hallův proud. Obecně je

$$(61) \quad \mathbf{i} = \sigma \mathfrak{F}_{\parallel} + \sigma_1 \mathfrak{F}_{\perp} + \sigma_2 \frac{\mathfrak{F}_{\perp} \times \mathbf{H}}{H},$$

kde  $\mathfrak{F}_{\parallel}$  a  $\mathfrak{F}_{\perp}$  jsou složky celkového elektrického pole rovnoběžné a kolmé k  $\mathbf{H}$ .

Přejdeme nyní ke konečné formulaci rovnic hydromagnetiky pro ideální kontinuum. Protože prakticky ve všech prostředích, která přicházejí v úvahu, je intenzita elektrického a magnetického pole rovna elektrické respektive magnetické indukci, lze Maxwellovy rovnice elektromagnetického pole psát ve tvaru

$$(62) \quad \text{rot } \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{i} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t},$$

$$(63) \quad \text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t},$$

$$(64) \quad \text{div } \mathbf{H} = 0,$$

$$(65) \quad \text{div } \mathbf{E} = 4\pi(n_1 - n_2).$$

Protože obvykle je  $n_1, n_2 \gg n_1 - n_2 \approx 0$ , tak v (65) klademe  $\text{div } \mathbf{E} = 0$ . Zároveň je ovšem zanedbatelný i druhý člen na pravé straně rov. (62). Podmínka pro to, aby byl tento člen mnohem menší než první člen na pravé straně rov. (62)

je  $\mathbf{i} \gg \frac{\mathbf{E}}{cT}$ , kde  $T$  je řádová hodnota trvání procesu. Substitucí  $\mathbf{i} = \sigma \mathbf{E}$  dostaneme obvykle splněnou podmínku

$$\sigma c T \gg 1.$$

K rovnicím elektromagnetického pole přistupují při řešení magnetohydrodynamických problémů ještě rovnice mechaniky kontinua. Můžeme je psát ve dvou možných tvarech, prvním z nich je tvar složkový bezprostředně vyplývající z mikroskopického odvození:

$$(66) \quad \begin{aligned} m_i n_i \frac{d\mathbf{V}_i}{dt} + \text{grad } p_i &= n_i \mathbf{F}_i - \frac{m_1 m_2 n_1 n_2}{\rho \tau} (\mathbf{V}_i - \mathbf{V}_k), \quad (k \neq i), \\ \frac{\partial n_i}{\partial t} + \text{div } (n_i \mathbf{V}_i) &= 0, \\ \mathbf{i} &= n_1 e \mathbf{V}_1 - n_2 e \mathbf{V}_2, \\ p_i &= p_i(n_i). \end{aligned}$$

V hydromagnetice bývá obvyklé užívat jiné soustavy rovnic než (66). Rovnice (33) můžeme psát jako

$$(67) \quad \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \text{div } (\varrho \mathbf{W}) = 0,$$

k tomuto vztahu přiřadíme pohybovou rovnici plazmatu jako celku

$$(68) \quad \varrho \frac{d\mathbf{W}}{dt} = -\text{grad } p + \frac{1}{c} \mathbf{i} \times \mathbf{H} + \varrho \mathbf{g},$$

(kde  $p = p_1 + p_2 = 2p_i$ ) a Ohmův zákon

$$(69) \quad i + \frac{e\tau}{m_2c} i \times \mathbf{H} = \sigma \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{W} \times \mathbf{H} \right) + \frac{\sigma}{ne} \text{grad } p_2 .$$

Dosaďme výraz plynoucí pro  $\mathbf{E}$  z (63) do (63), dostaneme

$$(70) \quad \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \frac{c}{4\pi\sigma} \Delta \mathbf{H} + \frac{1}{c} \text{rot} (\mathbf{W} \times \mathbf{H}) - \frac{c\omega\tau}{4\pi\sigma} \text{rot} \left( \frac{[\text{rot } \mathbf{H}] \times \mathbf{H}}{\mathbf{H}} \right) + \\ + \text{rot} \left( \frac{\text{grad } p_2}{ne} \right) .$$

Poslední člen na pravé straně rovnice (70) je roven nule, jestliže je proces isothermní. V takovém případě totiž platí

$$\text{rot} \frac{\text{grad } p_2}{ne} = \frac{KT}{e} \text{rot} (\text{grad} (\ln n)) = 0 .$$

Obecně předpokládáme, že  $\text{grad } p_2$  je řádově srovnatelný s  $\frac{1}{c} i \times \mathbf{H}$  tj.

$$(71) \quad \text{grad } p_2 \sim \frac{\mathbf{H}}{4\pi} \frac{[\text{rot } \mathbf{H}] \times \mathbf{H}}{\mathbf{H}} .$$

Ve třetím členu na pravé straně rov. (70) je numerická konstanta  $\frac{c\omega\tau}{4\pi\sigma}$  rovna  $H(ne)^{-1}$ . Násobíme-li (71) výrazem  $1/ne$ , pak

$$\frac{\text{grad } p_2}{ne} \sim \frac{\mathbf{H}}{4\pi ne} \frac{[\text{rot } \mathbf{H}] \times \mathbf{H}}{\mathbf{H}} = \frac{c\omega\tau}{4\pi\sigma} \frac{[\text{rot } \mathbf{H}] \times \mathbf{H}}{\mathbf{H}}$$

a čtvrtý člen na pravé straně rov. (70) je srovnatelný s třetím členem. Jestliže je  $\omega\tau \ll 1$  tak jsou tyto členy zanedbatelné vzhledem k prvnímu členu. V takovém případě můžeme psát

$$(72) \quad \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \frac{c^2}{4\pi\sigma} \Delta \mathbf{H} + \text{rot} (\mathbf{W} \times \mathbf{H}) .$$

Rovnice (72) spolu s rovnicemi (67, 68, 62) a vztahem  $p = p(n)$  bývají nejčastěji užívány jako základní vztahy ze kterých vycházíme při řešení hydro-magnetických problémů v případě že  $\omega\tau \ll 1$  a  $n_1 = n_2$ .

#### Literatura

Pro získání všeobecných informací o hydromagnetice jsou nejhodnější tyto monografie:

L. Spitzer: *Physics of Fully Ionized Gases*, Interscience publishers, New York, 1956.

T. G. Cowling: *Magnetohydrodynamics*, Interscience, New York, 1957.

T. G. Cowling: *Solar Electrodynamics*, ve sborníku *The Sun*, ed. by G. Kuiper, Chicago, 1953; ruský překlad: *Solnce*, Moskva, 1957.

S. I. Syrovatskij —: *Magnitnaja gidrodinamika*, Uspechi fizičeskich nauk, sv. 62, No 3, (1957).  
 Problémy související s Debyeovou vzdáleností relaxačními dobami jsou diskutovány v pracích:  
 R. S. Cohen, L. Spitzer, P. M. Routly: Phys. Rev. 80, 230 (1950), viz též ruský překlad: Probl.  
 sovr. fiz. 1946, No 2.  
 E. Persico: Mon. Not. 86, 294 (1926).  
 D. Bohm, L. H. Aller: Astrophys. J. 105, 131 (1947).  
 S. Chandrasekhar: *Principles of Stellar Dynamics*, Chicago, 1941, především druhá kapitola.  
 Boltzmannova rovnice a teorie srážek v ionisovaném plynu je nejpřehledněji analysována v práci:  
 P. L. Bhatnagar, E. P. Gross, M. Krook: Phys. Rev. 94, 511 (1954), viz též ruský překlad  
 v Probl. sovr. fiz. 1956, No 2.  
 Klasická teorie srážek a odvození Boltzmannovy rovnice je vykládáno v monografiích:  
 J. H. Jeans: *The Dynamical Theory of Gases*, Cambridge 1925.  
 S. Chapman, T. G. Cowling: *The Mathematical Theory of Non-uniform Gases*, Cambridge 1952.  
 Pohyb jednotlivé částice v magnetickém a elektrickém poli je probírán v knihách:  
 L. Landau, E. Lifšic: *Klasičeskaja teorija polja*, Moskva 1948.  
 H. Alfvén: *Cosmical Electrodynamics*, Oxford 1952.

## PRVNÍ LET NA MĚSÍC<sup>1)</sup>

Dne 12. září 1959 byla vypuštěna druhá sovětská kosmická raketa, která 14. září 1959 v 00 hod. 02 min 24 sec moskevského času dosáhla povrchu Měsíce. Sovětský svaz slavil další vědecký a technický triumf.

Váha těles, vysílaných do vesmíru, se postupně zvětšuje. Třetí sovětská umělá družice Země vážila 1327 kg, první sovětská kosmická raketa (její poslední stupeň bez pohonných látek) vážila 1472 kg, váha druhé sovětské kosmické rakety byla již 1511 kg. Poslední stupeň je již říditelný a umožňuje automaticky korigovat základní parametry letu do okamžiku, kdy se vypnou motory.

Celková váha vědecké a měřicí aparatury druhé sovětské kosmické rakety s napájecími zdroji a s přístrojovou kabinou byla 390,2 kg. Raketa vysílala k Zemi informace na pěti frekvencích, 20,003 MHz, 19,997 MHz, 19,993 MHz, 39,986 MHz, 183,6 MHz. Radiotechnické prostředky na palubě rakety umožnily spolehlivě sledovat se Země raketu za jejího letu, od startu až do okamžiku, kdy kabina s přístroji dopadla na povrch Měsíce.

Na povrch Měsíce byly dopraveny tři emblémy s nápisem „Svaz sovětských socialistických republik, září 1959“. Dva emblémy byly umístěny v kabině s přístroji, jeden v posledním stupni rakety. Emblémy byly zajištěny proti poškození při dopadu na měsíční povrch.

Pro optická pozorování byla druhá sovětská kosmická raketa (podobně jako první) vybavena zařízením na vytvoření sodíkového mraku — umělé komety. Sodíkový mrak byl vypuštěn v době předem určené ve vzdálenosti 150 000 km od Země (u první sovětské kosmické rakety ve vzdálenosti 113 000 km od Země). Pozorování umělých komet umožňuje jednak opticky určit polohu raket v okamžiku vytvoření sodíkového mraku, jednak určit podle rychlosti, jakou se mrak rozptyluje, hustotu meziplanetárního plynu.

První i druhá sovětská kosmická raketa byly pozorovány v SSSR i v zahraničí. Anglickému astronomu Lowellovi se podařilo zpozorovat druhou kosmickou raketu pomocí radioteleskopu jistou dobu před vytvořením sodíkového

<sup>1)</sup> Первый полет на луну, Природа, 10 (1959).