Mathematica Slovaca

Edmund Hlawka

Gleichverteilung und die willkürlichen Funktionen von Poincaré

Mathematica Slovaca, Vol. 48 (1998), No. 5, 457--506

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/136737

Math. Slovaca, 48 (1998), No. 5, 457–506

Mathematica Slovaca

GLEICHVERTEILUNG UND DIE WILLKÜRLICHEN FUNKTIONEN VON POINCARÉ

EDMUND HLAWKA

(*Communicated by Stanislav Jakubec*)

ABSTRACT. In this paper the ideas of Poincaré about the so-called arbitrary functions are improved with the help of the theory of uniform distribution in the sense of Hermann Weyl. The examples given by Poincaré and E. Hopf are discussed and embedded in our general theory. We made essential use of the concept of the discrepancy introduced by Van der Corput. In the appendices ("Anmerkungen") of this paper the theory is further developed.

Der Zufall ist die in Schleier gehüllte Notwendigkeit.[1]
(*Marie von Ebner-Eschenbach*)

Laplace hat bekanntlich in seinem Werk zur Wahrscheinlichkeitsrechnung von einem Geist (einer Intelligenz) gesprochen, der mit Hilfe von Differentialgleichungen und bei Kenntnis der zugehörigen Anfangsbedingungen zu einem gegebenen Zeitpunkt alles berechnen kann, was in der Vergangenheit war und in der Zukunft sein wird. Es wurde z.B. sofort der Einwand erhoben, daß man nicht alle Anfangsbedingungen kennen kann.

Poincaré hat nun die Idee gehabt, daß man nur eine Teilmenge von Anfangsbedingungen braucht, die aber eine Dichte haben (vgl. auch die Arbeit des Verfassers [HLA01]).

Wir wollen nun die Idee von Poincaré mit Hilfe der Theorie der Gleichverteilung im Sinne von Hermann Weyl exaktifizieren, indem wir gleichverteilte Folgen[2] von Anfangsbedingungen der zugehörigen Differentialgleichungen mit

AMS Subject Classification (1991): Primary 11K38, 11K45.
Key words: uniform distribution, discrepancy.

[1] Zitiert nach Robert Hofstetter, Gedanken zur Chaostheorie, in: Wiss. Nachrichten, hrsg. vom Bundesministerium für Unterricht und kulturelle Angelegenheiten Nr. 103, Jänner 1997.

[2] Zufall: Wahl der Anfangsbedingung. Der Schleier ist die vorgegebene überall dichte gleichverteilte Folge.

einer „willkürlichen" Dichte annehmen. Wir haben schon in der vorher zitierten Arbeit eine Skizze dieser Methode gegeben. Dies soll nun hier ausgeführt werden.

Wir geben zunächst folgende Übersicht:

1. Poincaré Problem A
2. Poincaré Problem B
   Das Laplace Rad
3. Ein System mit Reibung
4. Statistik eines Systems von nichtlinearen Differentialgleichungen
5. Epilog

§1. Ein Planet mit der ekliptischen Länge b zur Zeit $t = 0$ und der Winkelgeschwindigkeit a hat zur Zeit t die Länge

$$l = at + b\,.$$

Zur Zeit $t = 0$ seien diese Planeten mit der Dichte $\Phi(a, b)$ verteilt, d.h. es ist stets Φ nicht negativ und es sei

$$\iint\limits_K \Phi(a,b)\ \mathrm{d}a\,\mathrm{d}b = 1\,.$$

Dabei sei der Integrationsbereich K ein Rechteck $u \le a \le u + v$, $0 \le b < 1$ (mod 1). Wir denken uns die Ekliptik E als Kreis mit Umfang 1 (üblicherweise nimmt man den Kreis mit Radius 1, also Umfang 2π an, dies ist aber eine Normierungsangelegenheit). Die Behauptung ist nun, daß für $t \to \infty$ die Anzahl der Planeten auf einem beliebigen Bogen der Ekliptik der Bogenlänge proportional ist.

Den Beweis dieser Behauptung führt Poincaré mit Hilfe von Fourierreihen (er entwickelt die Indikatorfunktion $\iota(\varphi)$ des betreffenden Bogens (α, β) in eine solche Fourierreihe). Die Überlegungen erfüllen wohl nicht die heutigen Anforderungen an Strenge.[3] Vergleiche auch die Arbeit von J a n K r o ö [KRO01].

Wir wollen nun ein quantitatives Resultat mit Hilfe der Theorie der Gleichverteilung herleiten: Wir nehmen nun an, daß eine (große) Anzahl N von Planetoiden $P_1, \ldots, P_N$ mit Anfangslage b_k und Winkelgeschwindigkeiten a_k $(k = 1, \ldots, N)$ vorliegt. Zur Zeit t ist also die Länge

$$l_k = a_k t + b_k$$

[3] Ist $\iota(\varphi) = \sum c_k\, \mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\,k\varphi}$, so folgt $\lim\limits_{t\to\infty} \iint \mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\,k(at+b)}\ \mathrm{d}a\,\mathrm{d}b = 0$ für $k \neq 0$. Es ist $\int\limits_0^1 \iota(\varphi, t)\ \mathrm{d}\varphi = \sum\limits_k c_k \iint \mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\,k(at+b)}\ \mathrm{d}a\,\mathrm{d}b$, also ist im Limes dieses Integral gleich $C_0 = \beta - \alpha$, also Gleichverteilung. Nun ist diese Reihe aber nicht gleichmäßig konvergent.

$(k = 1, \ldots, N)$. Wir bezeichnen mit $\tilde{\omega}_N$ die Folge

$$(a_1, b_1), \ldots, (a_N, b_N)\,. \tag{1}$$

Es sei nun I ein beliebiger Bogen auf der Ekliptik E mit $\alpha \leq \varphi \leq \beta$ und es sei $\iota(I, \varphi)$ seine Indikatorfunktion. Dann sei

$$\lambda_N\big(\omega_N(t)\big) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \iota\big(I, \omega_N(t)\big) \tag{2}$$

und

$$\lambda(I) = \int_0^1 \iota(I, \varphi)\, \mathrm{d}\varphi = \int_I \mathrm{d}\varphi\,, \tag{3}$$

wobei

$$\omega_N(t) = (a_k t + b_k) = (l_k) \pmod 1\,. \tag{4}$$

Es sei

$$D_N\big(\omega_N(t)\big) = \sup_I \big|\lambda_N\big(\omega_N(t)\big) - \lambda(I)\big| \tag{5}$$

die Diskrepanz der Folge $\omega_N(t)$.

Wir betrachten nun weiter Teilintervalle J von K und es sei $\big(\hat{\iota}\big(J, (x, y)\big)\big)$ die Indikatorfunktion von J

$$\lambda_N(\tilde{\omega}, J) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \iota\big(J, (a_k, b_k)\big)\,, \tag{6}$$

$$\lambda(I) = \iint_K \iota\big(I(a, b)\big)\Phi(a, b)\, \mathrm{d}a\, \mathrm{d}b \tag{7}$$

und

$$\hat{D}_N(\omega) = \sup_J |\lambda_N(\omega) - \lambda(I)| \tag{8}$$

die Diskrepanz der Folge $\tilde{\omega}_N$ in bezug auf Φ (Zur ganzen Begriffsbildung vergleiche z.B. das Buch des Verfassers [HLA02].).

Wir werden nun zeigen: (Wir nehmen der Einfachheit halber an, daß Φ und $\frac{\partial \Phi}{\partial a}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial b}$ stetig differenzierbar und beschränkt auf K sind. Poincaré macht die gleichen Annahmen, die durch eine allgemeine ersetzt werden können.), daß für alle t mit

$$t > \hat{D}_N^{-\frac{1}{4}}$$

gilt

$$D_N\big(\omega_N(t)\big) \leq C_1\Big(\frac{1}{M} + \frac{2C_2}{t} + \hat{D}_N(\Phi) t M^2\Big)\,, \tag{9}$$

wobei C_2 nur von Φ abhängt und M beliebig ist.

Gilt jetzt

$$\lim_{N\to\infty} \hat{D}_N^{\frac{1}{4}} = 0\,,$$

dann ist auch

$$\overline{\lim_{N\to\infty}}\, D_N\big(\omega(t)\big) \le \frac{1}{M} + \frac{2C_2}{t} \tag{10}$$

für alle t. Genauer: Wählen wir $M = t$, $\hat{D}_N(\Phi)t^4 \le 1$, so ist $D_N\big(\omega(t)\big) \le \frac{2C_2}{t}$ für alle t mit $t \le \frac{1}{(\hat{D}_N(\Phi))^{(1/4)}}$.

Beim Beweis werden wir auch die Fourierentwicklung der Indikatorfunktion der Teilintervalle J benützen. Es gilt nämlich die Formel von Erdös-Turan, daß für jede Folge $\omega_N = (x_1, \ldots, x_N)$ und jedes $M > 1$ gilt

$$D_N(\omega_N) \le C_1 \left(\frac{1}{M} + \sum_{0<|h|\le M} \frac{1}{|h|} \left| \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\,h x_k} \right| \right), \tag{$*$}$$

wobei C_1 eine absolute Konstante ist.

Bemerkung.

1) Wir können die Folge $(a_k t + b_k)$ als die Bewegungen von Teilchen eines idealen Gases interpretieren, welche im Intervall $0 \le x \le 1$ eingesperrt sind und an den Enden elastisch reflektiert werden.

2) Zweite Deutung: Es ist t der Drehwinkel von Drehungen eines Roulettes.

Es gilt $(*)$ auch für $\tilde{D}_N$ in der Form

$$\tilde{D}_N(\hat{\omega}_N) \le C_1 \left(\frac{1}{M} + \sum_{0<|h|\le M} \frac{1}{|h|} \left| \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\,h x_k} - \iint_K \mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\,h x}\, \Phi(x,y)\; \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \right| \right). \tag{$**$}$$

Ist weiter f eine Funktion auf $\langle 0,1\rangle$ bzw. auf K von beschränkter Variation $V(f)$, so gilt

$$|\lambda_N(f) - \lambda(f)| \le D_N(\omega_N) V(f) \tag{11}$$

bzw.

$$|\tilde{\lambda}_N(f) - \tilde{\lambda}(f)| \le \tilde{D}_N(\tilde{\omega}_N) V(f)\,, \tag{12}$$

wo

$$\lambda_N(f) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} f(x_k)\,, \qquad \lambda(f) = \int_0^1 f(x)\; \mathrm{d}x\,, \tag{13}$$

bzw.

$$\tilde{\lambda}(f) = \iint_K f(x,y)\Phi(x,y)\; \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\,. \tag{14}$$

B e w e i s . Es ist

$$D_N(\omega_N) \le C\left(\frac{1}{M} + \sum_{0<|h|\le M} \frac{1}{|h|}\left|\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\,h(a_k t+b_k)}\right|\right). \tag{15}$$

Bei unserer Annahme über Φ ist $V(\Phi) = \frac{\partial^2\Phi}{\partial a \partial b}$. Dazu kommen noch Terme, die von Rand von K abhängen und die man analog behandeln kann.

Es ist nun

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\,h(a_k t+b_k)} - \iint_K \mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\,h(at+b)}\,\Phi(a,b)\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}b\right| \\
&\le \hat{D}_N(\Phi)\iint_K \left|\frac{\partial^2}{\partial a\partial b}\mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\,h(at+b)}\right|\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}b \qquad (16)\\
&\le \hat{D}_N(\Phi)h^2|t|a\,.
\end{aligned}$$

Es ist also

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\,h(a_k t+b_k)}\right| \le \left|\iint_K \mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\,h(at+b)}\,\Phi(a,b)\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}b\right| + \hat{D}_N(\Phi)h^2|t|a\,. \tag{17}$$

Nun ist für $h \neq 0$ mittels partieller Integration nach a

$$\begin{aligned}
\left|\int_u^{u+v} \mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\,hat}\,\Phi(a,b)\,\mathrm{d}a\right| &= \left|\left[\frac{\mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\,hat}\,\Phi(a,b)}{2\pi\,\mathrm{i}\,ht}\right]_u^{u+v} - \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}\,ht}\int \frac{\partial\Phi}{\partial a}\mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\,hat}\,\mathrm{d}a\right| \\
&= \frac{4}{2\pi|h|t}C_2\,, \qquad (18)
\end{aligned}$$

wo

$$C_2 = \max_K\left(|\Phi|, \left|\frac{\partial\Phi}{\partial a}\right|\right). \tag{19}$$

Wir haben also

$$\begin{aligned}
D_N(\omega_N) &\le C\left(\frac{1}{M} + \frac{C_2}{t}\sum_{0<|h|\le M}\frac{1}{|h|} + \hat{D}_N(\Phi)|t|\sum_{|h|\le M}|h|\right) \qquad (20)\\
&\le C\left(\frac{1}{M} + \frac{2C_2}{t} + \hat{D}_N(\Phi)tM^2\right). \qquad (21)
\end{aligned}$$

Behalten wir noch die Abschätzung (21) bei und bilden den Mittelwert

$$\mu(T) = \frac{1}{T}\int_1^T D_N\big(\omega_N(t)\big)\,\mathrm{d}t\,,$$

so erhalten wir aus (22)

$$\frac{1}{T}\int_1^T D_N\big(\omega_N(t)\big)\ \mathrm{d}t \le \frac{1}{M} + 2C_2\frac{\lg T}{T} + \tilde{D}_N(\Phi)TM^2\,. \tag{22}$$

Wählen wir nun $M = \left(T\tilde{D}_N\right)^{\frac{1}{3}}$, so erhalten wir

$$\frac{1}{T}\int_1^T D_N\big(\omega_N(t)\big)\ \mathrm{d}t \le C_2\left(\left(T\tilde{D}_N\right)^{\frac{1}{3}} + \frac{C_1 \lg T}{T}\right).$$

Es ist also

$$\overline{\lim_{N\to\infty}}\ \frac{1}{T}\int_1^T D_N\big(\omega_N(t)\big)\ \mathrm{d}t \le C_2\frac{\lg T}{T}$$

und

$$\lim_{T\to\infty}\ \overline{\lim_{N\to\infty}}\ \frac{1}{T}\int_1^T D_N\big(\omega_N(t)\big)\ \mathrm{d}t = 0\,.$$

□

§2. Wir betrachten nun ein weiteres Problem, welches Poincaré behandelt.

Ein Roulette sei in eine große Anzahl von Sektoren eingeteilt, die abwechselnd rot und schwarz sind. Eine Nadel wird mit großer Kraft in Bewegung gesetzt und bleibt nach einer Zahl von Umdrehungen bei einem Sektor stehen. Es wird nun über diese Kraft eine Voraussetzung gemacht, um die Gleichmäßigkeit der Wirkung der Kraft zu sichern. Es wird vorausgesetzt, daß eine Dichte ρ existiert, so daß folgendes gilt. Betrachten wir auf dem Roulette zwei Strahlen α, β, die vom Mittelpunkt des Roulettes ausgehen. Der Winkel, den die Strahlen einschließen, sei Φ. Es werde nun für jedes N das Roulette N-mal mit dieser Kraft in Bewegung gesetzt. Es sei A_N die Anzahl der Endlagen, welche in Φ liegen, dann sei die relative Häufigkeit $h_N(\Phi) = \frac{A_N}{N}$ nahe an $\int_\Phi \rho(\varphi)\ \mathrm{d}\varphi$, also genauer

$$\lim_{N\to\infty} h_N = \int_\Phi \rho(\varphi)\ \mathrm{d}\varphi\,,$$

und zwar gelte dies für jedes Φ.

Wenn diese Voraussetzung erfüllt ist, so behauptet Poincaré, daß die Wahrscheinlichkeit, daß die Farbe der Endlage rot oder schwarz ist, gleich $\frac{1}{2}$ ist, also daß die Farbe rot bzw. schwarz gleich oft vorkommt.

Wir bilden uns die Intervalle, welche alle in Einheitsintervall liegen, und die Sektoren mit den zugehörigen Winkeln

$$J_{kj} = \left\langle \frac{k}{s} + \frac{j}{2s}, \frac{k}{s} + \frac{j+1}{2s} \right\rangle \tag{23}$$

für $j = 0, 1$, $k = 1, \ldots, s$ und bilden uns die Vereinigungsmenge

$$\bigcup_{k=1}^{s-1} J_{kj} = J_j . \tag{24}$$

Es sei nun $\varphi_1, \ldots, \varphi_N$ eine Folge mit Diskrepanz D_N^ρ, wo ρ die Dichte auf $\langle 0, 1\rangle$ ist. Dann gilt nach Definition von D_N^ρ

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{\varphi_k \in J_j} 1 - \int_{J_j} \rho \, \mathrm{d}\varphi \right| \leq s D_N . \tag{25}$$

Wir setzen voraus, daß ρ stetig ist. Um die Darstellung zu vereinfachen, setzen wir sogleich voraus, daß ρ eine Lipschitzfunktion mit der Lipschitzkonstanten $\alpha(\rho)$ ist, also

$$|\rho(\varphi) - \rho(\varphi')| \leq \alpha |\varphi - \varphi'| . \tag{26}$$

Dann gilt für alle j, j'

$$\left| \int_{J_{kj}} \rho(\varphi) \, \mathrm{d}\varphi - \int_{J_{kj'}} \rho(\varphi) \, \mathrm{d}\varphi \right| \leq \frac{\alpha}{s} \int_{\frac{k}{s}}^{\frac{k+1}{s}} \mathrm{d}\varphi \leq \frac{\alpha}{s^2} ,$$

also wird

$$\left| \int_{J_j} \rho(\varphi) \, \mathrm{d}\varphi - \int_{J_j'} \rho(\varphi) \, \mathrm{d}\varphi \right| \leq \frac{\alpha}{s} . \tag{27}$$

Setzen wir für $j = 0$ bzw. 1

$$U_j = \sum_{i \equiv j \pmod 2} \int \rho(\varphi) \, \mathrm{d}\varphi , \tag{28}$$

dann ist

$$U_0 + U_1 = 1 \tag{29}$$

und nach (5)

$$|U_0 - U_1| \leq \frac{\alpha}{s} . \tag{30}$$

Es wird also z.B.

$$|2U_0 - 1| = ||U_0 - U_1 + (U_0 + U_1) - 1|| = |U_0 - U_1| \leq \frac{\alpha}{s} ,$$

also ist

$$\left|U_0 - \frac{1}{2}\right| \le \frac{\alpha}{2s} \tag{31}$$

und

$$\left|U_1 - \frac{1}{2}\right| \le \frac{\alpha}{s}. \tag{9'}$$

Setzen wir also

$$S^s_{r,N} = \frac{1}{N} \sum_{j\equiv r \pmod 2} \sum_{\varphi_k \in J_j} 1, \tag{32}$$

so wird nach (3)

$$|S^s_{r,N} - U_r| \le sD^\rho_N,$$

also nach (9) und (9′)

$$\left|S^s_{r,N} - \frac{1}{2}\right| \le \frac{\alpha}{s} + sD^\rho_N. \tag{33}$$

Setzen wir $s = \left[D_N^{-\frac{1}{2}}\right] + 1$, so erhalten wir

$$\left|S^s_{r,N} - \frac{1}{2}\right| \le (\alpha+2)(D^\rho_N)^{\frac{1}{2}}.$$

Es ist also

$$\|S^s_{0,N} - S^s_{1,N}\| \le (\alpha+2)\,(D^\rho_N)^{\frac{1}{2}}. \tag{34}$$

Es sind also im Mittel $S_{0,N}$ und $S_{1,N}$ gleich $\frac{1}{2}$, also fast einander gleich wie Poincaré behauptet. Aber man vergleiche auch die Bemerkungen von Urban mit (11) in bezug auf s und α. Dabei ist $2s$ die Anzahl der Sektoren.

§3. Wir betrachten jetzt den Fall, daß m Farben vorliegen, $m \ge 2$. Dann betrachten wir die Intervalle

$$J_{kr} = \left\langle \frac{km+r}{sm}, \frac{km+r+1}{sm} \right\rangle \tag{1}$$

$(r = 0, 1, \ldots, m-1)$.

Wir bilden uns wieder

$$\bigcup_{k=0}^{s-1} J_{kr} = J_r. \tag{2}$$

Es sei wieder $(\varphi_1, \varphi_2, \ldots)$ eine Folge gleichverteilt zur Dichte ρ mit der Diskrepanz D^ρ_N. Wir betrachten wieder die Folge $\omega_N = (\varphi_1, \ldots, \varphi_N)$, dann haben wir

$$\left|\frac{1}{N} \sum_{\varphi_j \in J_r} 1 - \int_{J_r} \rho(\varphi)\, \mathrm{d}\varphi\right| \le sD^\rho_N. \tag{3}$$

Nehmen wir der Einfachheit halber an, daß ρ eine Lipschitzfunktion mit der Konstante α ist, so haben wir für alle $\varphi \in E$

$$|\rho(\varphi) - \rho(\varphi')| \leq \alpha|\varphi - \varphi'| . \tag{4}$$

Ist $\rho(\varphi)$ stetig, so sei $\omega(\rho, \delta)$ der Stetigkeitsmodul von φ zur Feinheit δ, dann haben wir

$$|\rho(\varphi) - \rho(\varphi')| \leq \omega(\rho, \delta) , \tag{5}$$

wenn $|\varphi - \varphi'| \leq \delta$ ist. Wir setzen

$$U_r = \int\limits_{J_r} \rho(\varphi) \, \mathrm{d}\varphi . \tag{6}$$

Wir schätzen nun

$$|U_r - U_{r'}|$$

ab. Es ist

$$|U_r - U_{r'}| \leq \sum_{k=0}^{s-1} \left| \int\limits_{J_{kr}} \rho(\varphi) \, \mathrm{d}\varphi - \int\limits_{J_{kr'}} \rho(\varphi) \, \mathrm{d}\varphi \right| .$$

Es ist nun

$$\begin{aligned} &\left| \int\limits_{J_{kr}} \rho(\varphi) \, \mathrm{d}\varphi - \int\limits_{J_{kr'}} \rho(\varphi) \, \mathrm{d}\varphi \right| \\ &= \int\limits_0^{\frac{1}{ms}} \left(\rho\left(\frac{k}{s} + \frac{r}{sm} + \xi\right) - \rho\left(\frac{k}{s} + \frac{r'}{sm} + \xi\right) \right) \mathrm{d}\xi \\ &\leq \frac{\alpha}{ms} |r - r'| \int\limits_0^{\frac{1}{ms}} \mathrm{d}\xi \leq \frac{\alpha}{s} \cdot \frac{1}{ms} = \frac{\alpha}{ms^2} . \end{aligned} \tag{7}$$

Es ist also

$$|U_r - U_{r'}| \leq \frac{\alpha}{ms} . \tag{8}$$

Setzen wir nun Stetigkeit voraus, so erhalten wir

$$|U_r - U_{r'}| \leq s \cdot \omega(\rho, \delta) \cdot \frac{1}{ms} = \frac{\omega(\rho, \delta)}{m} ,$$

wo $\delta = \frac{1}{s}$ ist.

Wir greifen nun ein U_{r_0} heraus, z.B. U_0, so ist dann für alle U_r mit $r \neq 0$, wenn z.B. ρ eine Lipschitzfunktion ist, für $r = 1, \ldots, m-1$

$$|U_0 - U_r| \leq \frac{\alpha}{ms} . \tag{9}$$

Es ist dann

$$|(m-1)U_0 - (U_1 + \cdots + U_{m-1})| \leq \frac{\alpha}{s}\,.$$

Nun ist ρ Dichte und $J_0 + J_1 + \cdots + J_{m-1} = E$

$$\int_E \rho(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi = 1$$

ist

$$U_1 + \cdots + U_{m-1} = 1 - U_0\,,$$

also ist

$$|mU_0 - 1| \leq \frac{\alpha}{s}\,,$$

also

$$\left|U_0 - \frac{1}{m}\right| \leq \frac{\alpha}{ms}\,. \tag{10}$$

Wenn ρ nur stetig ist, dann haben wir nach (8′)

$$\left|U_0 - \frac{1}{m}\right| \leq \frac{\omega\left(\rho, \frac{1}{s}\right)}{m}\,. \tag{10'}$$

Wir haben also für alle $r = 0, 1, \ldots, m-1$ nach (10′)

$$\left|U_r - \frac{1}{m}\right| \leq \frac{\alpha}{ms}\,, \tag{11}$$

bzw.

$$\left|U_r - \frac{1}{m}\right| \leq \frac{\omega\left(\rho, \frac{1}{s}\right)}{m}\,. \tag{11'}$$

Es ist daher auch

$$|U_r - U_{r'}| \leq 2\omega\left(\rho, \frac{1}{s}\right)\,.$$

Daraus folgt weiter nach (3)

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{\varphi_j \in J_r} - \frac{1}{m}\right| \leq 2\omega\left(\rho, \frac{1}{s}\right) + sD_N^\rho$$

und es ist also, wenn wir

$$\frac{1}{N}\sum_{\varphi_j \in J_r} 1 = H_r$$

setzen,

$$|H_r - H_{r'}| \leq 2\left(\omega\left(\rho, \frac{1}{s}\right) + sD_N^\rho\right)\,.$$

und es ist

$$\left|H_r - \frac{1}{m}\right| \leq 2\left(\omega\left(\rho, \frac{1}{s}\right) + sD_N^\rho\right)\,.$$

Es ist also

$$\lim_{s\to\infty}\lim_{N\to\infty} H_r = \frac{1}{m}\,.$$

Wir haben dann ein Laplacerad mit m verschiedenen Farben der Fächer, kurz Sektoren genannt, vor uns, gegeben durch $J_0, J_2, \ldots, J_{m-1}$, deren Inneres stets zueinander disjunkt ist. Fassen wir nun g Sektoren $J_{r_1}, \ldots, J_{r_g}$, welche wir als günstige Fälle betrachten, zu einem Obersektor $\hat{J}_g$ zusammen, so ist die Häufigkeit $\hat{H}_g$ der φ_j, die in $\hat{J}_g$ liegen, approximativ $\frac{g}{m}$. Genauer gilt für die Häufigkeit

$$\left|\hat{H}_g - \frac{g}{m}\right| \le g\left(\frac{\omega(\rho, \frac{1}{s})}{m} + sD_N^\rho\right) \tag{12}$$

insbesondere für eine Lipschitzfunktion ρ

$$\left|\hat{H}_g - \frac{g}{m}\right| \le g\left(\frac{\alpha}{ms} + sD_N^\rho\right)\,, \tag{13}$$

also ist

$$\lim_{s\to\infty}\lim_{N\to\infty} \hat{H}_g = \frac{g}{m}\,,$$

die Anzahl der günstigen Fälle dividiert durch die Anzahl der möglichen Fälle.

§4. Betrachten wir nun den Fall, daß wir statt eines Roulettes L solche Roulettes $R_1, \ldots, R_L$ betrachten. Das p-te Roulette $(p = 1, \ldots, L)$ besitze m_p Farben. Wir haben nun auch ρ_p Dichten für den Anstoß am p-ten Roulette und haben nun L Folgen

$$\omega_p = (\varphi_1^p, \ldots, \varphi_N^p)\,.$$

Das direkte Produkt

$$\omega_N^L = \omega_1 \times \cdots \times \omega_L$$

hat die Glieder $(\varphi_1^L, \ldots, \varphi_N^L)$, wo $\varphi_j^L = (\varphi_j^1, \ldots, \varphi_j^L)$ für $j = 1, \ldots, N$, ist also eine L-dimensionale Folge. Es sei diese Folge, die wir jetzt kurz mit ω_N bezeichnen (genauer die dazugehörige unendliche Folge) gleichverteilt zur Dichte

$$\rho(\varphi_1, \ldots, \varphi_L) = \rho_1(\varphi_1)\ldots\rho_L(\varphi_L)$$

mit der Diskrepanz D_N^ρ, d.h. es gilt, wenn J ein Intervall aus E^L ist,

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{\varphi\in J} 1 - \int_J \rho(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi\right| \le D_N^\rho\,,$$

wo $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_L)$ und $\mathrm{d}\varphi = \mathrm{d}\varphi_1 \ldots \mathrm{d}\varphi_L$ bedeutet.

Wir nehmen nun noch an, daß ρ stetig in E^L ist, mit dem Stetigkeitsmodul $\omega(\rho, \delta)$, wo δ die Feinheit ist, d.h. für alle φ, φ' aus E^L mit $\|\varphi - \varphi'\| \le \delta$ gilt

$$|\rho(\varphi) - \rho(\varphi')| \le \omega(\rho, \delta)$$

$(\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_L)$ und $\|\varphi\| = |\varphi_1| + \cdots + |\varphi_L|)$.

Wir teilen nun den Rand des p-ten Roulettes in s_p gleiche Teile

$$\left\langle \frac{k_p}{s_p}, \frac{k_p+1}{s_p} \right\rangle$$

und diese noch in m_p gleiche Teile. Diese Intervalle bezeichnen wir wie schon früher in §2 mit

$$J_{\langle k_p, r_p \rangle} = \left\langle \frac{k_p}{s_p} + \frac{r_p}{s_p m_p}, \frac{k_p}{s_p} + \frac{r_p+1}{s_p m_p} \right\rangle ,$$

wo $r_p = 0, 1, \dots, m_p - 1$ ist.

Wir schreiben kurz $k = (k_1, \dots, k_L)$, $r = (r_1, \dots, r_L)$ und bilden das Produkt

$$J_{\langle k_1, r_1 \rangle} \times \cdots \times J_{\langle k_L, r_L \rangle} ,$$

das wir kurz mit $J_{\langle k,r \rangle}$ bezeichnen. Das Volumen von $J_{\langle k,r \rangle}$ ist

$$\frac{1}{m_1 s_1} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{m_L s_L} .$$

Wir bilden uns weiters die Vereinigung aller Intervalle von gleicher Farbe $r = (r_1, \dots, r_L)$

$$J_r = \bigcup_k J_{\langle k,r \rangle} ,$$

wo $k = (k_1, \dots, k_L)$ alle $s_1, \dots, s_p$ ganzzahligen Vektoren mit $0 \leq k_p \leq s_p$ für $p = 1, \dots, L$ durchläuft. Es ist also

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{\varphi_j \in J_r} - \int_{J_r} \rho(\varphi) \, \mathrm{d}\varphi \right| \leq s_1 \dots s_L D_N^\rho .$$

Wir setzen noch

$$U_r = \int_{J_r} \rho(\varphi) \, \mathrm{d}\varphi$$

und wir wollen wieder

$$|U_r - U_{r'}|$$

abschätzen, wo $r = (r_1, \dots, r_L)$, $r' = (r'_1, \dots, r'_L)$ und $r \neq r'$ ist.

Es ist

$$J_r - J_{r'} = \bigcup_k \left(J_{\langle k,r \rangle} - J_{\langle k,r' \rangle} \right) .$$

Es ist also

$$|U_r - U_{r'}| \leq \sum_k \left| \int_{J_{\langle k,r \rangle}} \rho(\varphi) \, \mathrm{d}\varphi - \int_{J_{\langle k,r' \rangle}} \rho(\varphi) \, \mathrm{d}\varphi \right| . \qquad (*)$$

Wir können eine solche Differenz in der Summe $(*)$ rechts so schreiben

$$\left| \int_B (\rho(a+\varphi) - \rho(b+\varphi)) \, \mathrm{d}\varphi \right| ,$$

wo die Vektoren

$$a = \left(\frac{k_1}{s_1} + \frac{r_1}{m_1 s_1}, \dots, \frac{k_L}{s_L} + \frac{r_L}{m_L s_L} \right) \qquad \text{und}$$
$$b = \left(\frac{k_1}{s_1} + \frac{r_1'}{m_1 s_1}, \dots, \frac{k_L}{s_L} + \frac{r_L'}{m_L s_L} \right)$$

sind, und B das Intervall

$$0 \leq \xi_p \leq \frac{1}{m_p s_p} , \qquad p = 1, \dots, L$$

ist. Es ist nun

$$|\rho(a+\varphi) - \rho(b+\varphi)| \leq \omega(\rho, \delta) ,$$

wenn $|a-b| \leq \delta$ ist. Es ist nun

$$|a-b| \leq \frac{|r_1 - r_1'|}{m_1 s_1} + \dots + \frac{|r_L - r_L'|}{m_L s_L} \leq \frac{1}{|s_1|} + \dots + \frac{1}{|s_L|} = \hat{\delta} .$$

Es wird also das Integral, wenn man berücksichtigt, daß das Volumen von B gleich $(m_1 \dots m_p)^{-1} (s_1 \dots s_p)^{-1}$ ist,

$$\dots \leq (m_1 \dots m_l)^{-1} (s_1 \dots s_l)^{-1} \omega\big(\rho, \hat{\delta}\big) .$$

Nun durchläuft k $s_1, \dots, s_l$ Intervalle, so ist also

$$|U_r - U_{r'}| \leq \omega\big(\rho, \hat{\delta}\big) (m_1 \cdot \ldots \cdot m_L)^{-1}$$

mit

$$\hat{\delta} = \frac{1}{s_1} + \dots + \frac{1}{s_L} .$$

Wir gehen jetzt wie in §3 vor. Es ist

$$\bigcup_r U_r = E ,$$

wenn r alle L-Tupel $(r_1 \dots r_L)$ durchläuft. Ihre Anzahl ist $m_1 \cdot \ldots \cdot m_L$, wir schreiben kurz m^L. Wir betrachten nun ein U_r, z.B. $(0 \dots 0)$. Es gilt wieder für $r \neq 0$, wo wir statt $s_1 \cdot \ldots \cdot s_L$ kurz s^L schreiben

$$|U_0 - U_r| \leq \omega\big(\hat{\delta}\big) + s^L D_N^\rho ,$$

also erhalten wir

$$\left|U_0(m^L-1)-\sum_{r\neq 0}U_r\right|\leq m^L\omega(\hat{\delta})+(ms)^L D_N^{\rho}\,.$$

Da

$$\sum_{r\neq 0}U_r=1-U_0$$

ist, so erhalten wir weiter

$$|m^L U_0-1|\leq m^L\omega(\hat{\delta})+(ms)^L D_N^{\rho}\,,$$

also ist

$$\left|U_0-\frac{1}{m^L}\right|\leq \omega(\hat{\delta})+s^L D_N^{\rho}\,,$$

also haben wir wieder, daß für alle U_r gilt

$$\left|U_r-\frac{1}{m_1\ldots m_L}\right|\leq \omega(\hat{\delta})+s_1\cdot\ldots\cdot s_L D_N^{\rho}\,,$$

wo

$$\hat{\delta}=\frac{1}{s_1}+\cdots+\frac{1}{s_L}$$

ist. Also ist

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{\varphi_j\in J_R}1-\frac{1}{m_1}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{m_L}\right|\leq s_1\ldots s_L D_N^{\rho}\,,$$

also wieder Gleichverteilung im Laplaceschen Sinne.

Fügen wir im p-ten Roulette wieder g_p Farben für $p=1,\ldots,L$ zusammen, so bilden wir

$$\hat{J}_1\times\hat{J}_2\times\cdots\times\hat{J}_L=\hat{J}_g^L\,,$$

wo $\hat{J}_p^L$ aus g_p Fächern in J_p entstanden ist, so erhalten wir ($g=(g_1\cdots g_L)$, $m=(m_1\ldots m_L)$)

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{\varphi_j\in\hat{J}_{g,m}^L}1-\frac{g_1}{m_1}\cdot\ldots\cdot\frac{g_L}{m_L}\right|\leq g_1 s_1\ldots g_L s_L D_N^{\rho}+\omega(\rho,\hat{\delta})g_1\ldots g_L\,.$$

Setzen wir

$$\frac{1}{N}\sum_{\varphi_j\in\hat{J}_{g,m}^L}=\hat{H}_g^L\,,$$

so haben wir

$$\lim_{s_1\cdot\ldots\cdot s_L\to\infty}\ \lim_{N\to\infty}\hat{H}_g^L=\frac{g_1}{m_1}\cdot\ldots\cdot\frac{g_L}{m_L}\,.$$

Also haben wir den Produktsatz der elementaren Wahrscheinlichkeitstheorie für L unabhängige Ereignisse.

Betrachten wir noch den Spezialfall, daß $m_1 = \cdots = m_L = m$, $g_1 = \ldots = g_L = g$ ist, so erhalten wir

$$\left|\hat{H}_g^L - \left(\frac{g}{m}\right)^L\right| \leq g^L\left(s_1 \ldots s_L D_N^\rho + \omega(\rho, \hat{\delta})\right).$$

Nun ist

$$\frac{1}{m}\sum_{g=0}^{m}\left(\frac{g}{m}\right)^L = \int_0^1 x^L \,\mathrm{d}x + \delta_1 \frac{1}{m} = \frac{1}{L+1} + \delta_1$$

und

$$\frac{1}{m}\sum_{g=1}^{m}\left(\frac{g}{m}\right)^{L+1} = \frac{1}{L+2} + \delta_2 \frac{1}{m}, \qquad (\delta_j \leq 1)$$

so erhalten wir für die bedingte Wahrscheinlichkeit

$$A_L = \frac{\frac{1}{m}\sum\limits_{g=1}^{m} \hat{H}_g^{L+1}}{\frac{1}{m}\sum\limits_{g=1}^{m} \hat{H}_g^{L}} = \frac{\frac{1}{L+2} + \frac{\delta_1}{m} + F_1}{\frac{1}{L+1} + \frac{\delta_2}{m} + F_2},$$

wo

$$F_1 \leq m^L\left(s_1 \ldots s_L D_N^{L,\rho} + \omega\left(\rho^L, \frac{1}{s_1} + \cdots + \frac{1}{s_L}\right)\right),$$

$$F_2 \leq m^{L+1}\left(s_1 \ldots s_L s_{L+1} D_N^{(L+1),\rho} + \omega\left(\rho^{L+1}, \frac{1}{s_1} + \cdots + \frac{1}{s_L} + \frac{1}{s_L+1}\right)\right)$$

ist. Dabei ist $\rho^L = \rho_1 \ldots \rho_L$ und $\rho^{L+1} = \rho_1 \ldots \rho_L \rho_{L+1}$.

Es ist A_L die bedingte Häufigkeit dafür, daß wenn an L Tagen die Sonne als rote Scheibe aufgegangen ist, am $(L+1)$-ten Tag die Sonne wieder aufgeht.

Gehen wir mit $N \to \infty$, dann mit $s_1 \ldots s_L s_{L+1}$ gegen unendlich und dann mit $m \to \infty$, so erhalten wir

$$\lim A_L = \frac{\frac{1}{L+2}}{\frac{1}{L+1}} = \frac{L+1}{L+2}.$$

Betrachten wir den Fall

$$A_{L,L'} = \frac{\sum\limits_{g=1}^{m} \hat{H}_g^{L+L'}}{\sum\limits_{g=1}^{m} \hat{H}_g^{L}},$$

so erhalten wir im Limes

$$\lim A_{L,L'} = \frac{\int\limits_0^1 x^{L+L'}\,\mathrm{d}x}{\int\limits_0^1 x^{L}\,\mathrm{d}x} = \frac{L+1}{L+L'+1}.$$

§5. Die Sätze von §3 und die zweite Deutung in §2 führen dazu, statt einem Roulette mehrere Roulettes, sagen wir s Roulettes $R_1, \dots, R_s$ mit den zugehörigen Drehungen

$$l_k^j = a_k^j t + b_k^j \tag{1}$$

für $k = 1, \dots, N$ und $j = 1, \dots, s$ zu betrachten.

Wir werden gleich die Vektorschreibweise benützen und schreiben

$$l = \left(l^1, \dots, l^s\right), \quad a = \left(a^1, \dots, a^s\right), \quad b = \left(b^1, \dots, b^s\right)$$

und schreiben kurz

$$l(t) = at + b \tag{2}$$

und

$$l_k(t) = \left(a_k^1 t + b_k^1, \dots, a_k^s t + b_k^s\right) . \tag{2'}$$

Die Folge

$$\omega_N^s = \left(a_k^1, b_k^1, \dots, a_k^s, b_k^s\right)$$

für $k = 1, \dots, N$ sei gleichverteilt zur Dichte

$$\Phi(a,b) = \Phi_1(a^1, b^1) \dots \Phi_s(a^s, b^s)$$

mit der Diskrepanz $\tilde{D}_N(\Phi, \omega_N^s)$ auf

$$K = K_1 \times \dots \times K_s ,$$

wo

$$K_j : \ |u_j - a_j| \le v_j , \quad 0 \le b_j < 1 \quad (\mathrm{mod}\ 1),$$

für $j = 1, \dots, s$.

Von den Φ_j verlangen wir die gleichen Voraussetzungen wie für Φ in §2, daß sie und ihre Ableitung nach a_j vorhanden und stetig ist.

Ist $e(\alpha)$ wieder die Abkürzung von $\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\alpha}$, so betrachten wir wieder die Weylsche Summe

$$W(N,h) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} e\big(\langle h l_k(t)\rangle\big) , \tag{3}$$

wobei $\langle hl\rangle$ das skalare Produkt

$$j_1 l^1 + \dots + h_s l^s$$

ist, wobei $h_1, \ldots, h_s$ ganze Zahlen sind, die nicht alle gleich Null sein sollen. Es ist dann analog zur Rechnung in §2

$$\left| W(N,h) - \frac{1}{V(K)} \int_K e(\langle hl \rangle)\Phi(a,b)\, \mathrm{d}a\, \mathrm{d}b \right| \leq \tilde{D}_N \operatorname{Var}(\psi) . \tag{4}$$

Dabei ist $V(K)$ das Volumen und $\mathrm{d}a\,\mathrm{d}b$ das Volumselement, $\tilde{D}_N$ die Diskrepanz, $\tilde{D}_N(\Phi, \omega_N^s)$ und $\operatorname{Var}(\psi)$ die Totalvariation der Funktion $\psi = e(\langle hl \rangle)$ als Funktion in a und b. Es ist

$$\operatorname{Var}(\psi) = \int_K \left| \prod_{j=1}^{s} \frac{\partial^2 \psi}{\partial a_j \partial b_j} \right| \mathrm{d}a\, \mathrm{d}b + F , \tag{5}$$

wobei F die Glieder zusammenfaßt, die vom Rand von K herrühren und die auch erste Ableitungen von ψ nach a_j bzw. b_j für $j = 1, \ldots, s$ enthalten.

Man sieht sofort, daß die angeschriebenen Hauptglieder dem Betrage nach

$$\leq R^2(h)|t| \tag{6}$$

sind, wobei $R(h)$ die übliche Bedeutung

$$\prod_{j=1}^{s} \operatorname{Max}(|h_j|, 1)$$

besitzt. Wir erhalten dann

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} e(\langle hl_k \rangle) \right| \leq \frac{1}{V(K)} \left| \int_K e(\langle hl \rangle)\Phi(a,b)\, \mathrm{d}a\, \mathrm{d}b \right| + \text{Rest} , \tag{7}$$

wo

$$|\,\text{Rest}\,| \leq \tilde{D}_N(\psi, \omega_N) 2^s R^2(h)|t| \tag{8}$$

ist. Der Fehler 2^s rührt von den 2^s Teilen des Randes von K her.

Wir wollen nun das Integral J rechts in (7), welches wir auch schreiben können

$$J = \prod_{j=1}^{s} \frac{1}{V(K)} \int_{K_j} e(\langle h_j l_j \rangle)\, \Phi_j(a^j, b^j)\, \mathrm{d}a^j\, \mathrm{d}b^j , \tag{9}$$

abschätzen. Wir wenden (18) und (19) aus §2 auf die Faktoren in (9) an und erhalten sofort

$$|J| \leq C_s |t| R(h) V(K)^{-1} ,$$

wobei

$$C_s \leq \sup_K \prod_{j=1}^{s} \operatorname{Max}\left(|\Phi_j|, \left| \frac{\partial \Phi_j}{\partial a_j} \right| \right) .$$

Wenden wir die Formel von Erdös-Turan-Koksma (ETK) in der schon gewohnten Weise an, so erhalten wir für die Diskrepanz $D_N(\omega_N)$ die Folge $\omega_N = (l_k)$ für $k = 1, \ldots, N$

$$D_N(\omega_N) \leq C_2\left(\frac{1}{M} + \frac{C_1}{|t|} \sum_{0<\|h\|\leq M} \frac{1}{R^2(h)} + \tilde{D}_N|t| \sum_{\|h\|\leq M} R^2(h)\right),$$

wobei

$$\|h\| = \operatorname{Max}(|h_1|, \ldots, |h_s|), \qquad C_2 \leq 2^s C_s \text{ und } M \geq 2$$

ist. Die C sind immer absolute Konstante, die man angeben kann.

Wir erhalten also

$$D_N(\omega_N(t)) \leq C_2\left(\frac{1}{M} + \frac{1}{|t|} + |t|\tilde{D}_N M^{2s}\right). \tag{10}$$

Bilden wir den Mittelwert μ über die Zeit t von 1 bis zu einer Endzeit T, so erhalten wir für

$$\mu(T) = \frac{1}{T}\int_1^T D_N(\omega_N(t))\,\mathrm{d}t$$

die Abschätzung, daß dieser Mittelwert

$$\leq C_3\left(\frac{1}{M} + C_1\frac{\log T}{T} + \tilde{D}_N T M^{3s}\right)$$

ist. Wählen wir

$$\tilde{D}_N M^{3s} T \text{ ungefähr gleich } M^{-1},$$

also

$$\left(\frac{1}{M}\right)^{3s+1} = TD_N,$$

so erhalten wir

$$\mu(T) \leq C_4\left((T\tilde{D}_N)^{\frac{1}{3s+1}} + \frac{\lg T}{T}\right). \tag{11}$$

Betrachten wir auch einen diskreten Mittelwert: Es sei τ die Zeit des Beginnes, dann betrachten wir die Zeiten (die Taktfolge)

$$\tau, 2\tau, \ldots, L\tau$$

und den Mittelwert $\bar{\mu}$

$$\bar{\mu}(L,\tau) = \frac{1}{L}\sum_{r=1}^{L} D_N(\omega_N(r\tau)).$$

Wir erhalten also

$$\bar{\mu}(L,\tau) = C_1\left(\frac{1}{M} + \frac{1}{L\tau}\sum_{k=1}^{L}\frac{1}{k} + \tau L^2 \tilde{D}_N\right).$$

Wählen wir

$$\left(\frac{1}{M}\right)^{2s+1} \sim L^2 \tilde{D}_N ,$$

so erhalten wir

$$\bar{\mu}(L,\tau) \le C_5\left(\left(L^2\tau\tilde{D}_N\right)^{\frac{1}{3s+1}} + \frac{\log L}{\tau L}\right).$$

Wir wollen uns mit folgender Frage beschäftigen, dabei beschränken wir uns der Einfachheit halber auf den Fall $s = 1$ in §2: Es seien $\beta_2, \ldots, \beta_L$ voneinander verschiedene positive Zahlen größer als 1 und wir wollen ein in Drehung befindliches Roulette zu den L Zeitpunkten

$$\beta_1 t, \beta_2 t, \ldots, \beta_L t$$

beobachten, dabei soll stets $\beta_1 = 1$ sein.

Wir wollen nun stets definieren, wann wir diese L Beobachtungen als voneinander unabhängig ansehen. Die philosophisch-physikalischen umstrittenen Diskussionen, wann Beobachtungen als voneinander unabhängig zu betrachten sind, sollen uns hier nicht kümmern.

Um uns einfach ausdrücken zu können, wollen wir erneut die Vektorschreibweise benützen. Wir fassen die L Zahlen $1 = \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_L$ zu einem Vektor β zusammen. Gleichzeitig betrachten wir Gittervektoren $h = (h_1, \ldots, h_L)$, d.h. alle diese h_j sind ganze Zahlen und wir bezeichnen mit $\langle h\beta\rangle$ das skalare Produkt $h_1\beta_1 + \cdots + h_L\beta_L$.

Wir verlangen nun, daß $\beta_1, \ldots, \beta_L$ linear unabhängig sind, d.h. daß $\langle h\beta\rangle$ dann und nur dann Null ist, wenn h Nullvektor ist, d.h. alle h_j sind Null. Die Taktfolge, die wir vorher betrachtet haben, hat diese Eigenschaft für L größer als Eins offensichtlich nicht.

Es sei μ eine Zahl größer oder gleich Eins, dann sagen wir β ist vom Typus μ, wenn es eine positive Zahl k gibt, die nur von β abhängt, sodaß für alle von Null verschiedenen Gitterpunkte gilt

$$R(h)^{\mu} |\langle h\beta\rangle| \ge k(\beta).$$

Es sind μ und k nicht eindeutig bestimmt. Jedes μ', welches größer als μ, und jedes k', welches kleiner als k ist, erfüllt die gleichen Bedingungen. Wichtig ist der Fall $\mu = 1$. Der einfachste Fall ist offenkundig $L = 2$. Hier ist $R(h) = |h|$.

Der Fall $\mu = 1$ liegt sicher vor, wenn die Entwicklung von β_2 in einem regelmäßigen Kettenbruch nur beschränkte Teilnenner aufweist. Man vergleiche zur Literatur z.B. das klassische Werk von J. F. Koksma [KOK01].

Der Fall $L > 2$ ist bedeutend schwieriger.

Es ist meines Wissens nach unbekannt, ob es β mit $\mu = 1$ gibt, aber es gibt Vektoren β, welche für jedes $\varepsilon > 0$ und passendes k vom Typus $1 + \varepsilon$ sind. Leichter sind β aufzufinden, welche vom Charakter γ sind, für die es eine Zahl $\gamma \geq 1$ und dazu ein positives $k_1(\beta)$ gibt, so daß für alle Gitterpunkte $h \neq 0$

$$\|h\|^{\gamma} |\langle h\beta \rangle| \geq k_1 \beta$$

gilt. Dabei ist $\|h\| = \operatorname{Max}(|h_1|, \ldots, |h_L|)$.

Es ist dann β vom Typus $\leq \gamma L$. Ein solches Beispiel ist

$$\beta = \left(1, 2^{\frac{1}{L}}, \ldots, 2^{\frac{L-1}{L}}\right) \qquad \text{und zum Beispiel}$$
$$k_1 = (2L)^{-L}.$$

Es ist also sehr klein. Es ist mehr und besseres bekannt. Ich verweise auf die Literatur.

In der Arbeit des Verfassers [HLA03] und in deren Fortsetzung [HLAW04] wurde folgendes gezeigt:

Ist β vom Typus μ, so gilt

$$\sum_{\|h\| \leq M} \frac{1}{R(h)^{\mu} \langle h\beta \rangle} \leq \frac{C_6}{(k(\beta))^{\mu}} (\log M)^{\mu},$$

wobei C_6 eine Konstante ist.

Wir hatten ja in §2 gezeigt, daß die Folge

$$(a_k t + b_k)$$

für $k = 1, \ldots, N$ „fast“ gleichverteilt ist, wenn die Folge (a_k, b_k) zur Dichte Φ mit der Diskrepanz $D_N(\Phi)$ gleichverteilt ist.

Wir betrachten die Oberfolge

$$(a_k t + b_k, a_k \beta_2 t + b_k, \ldots, a_k \beta_L t + b_k)$$

für $k = 1, \ldots, N$, die wir mit ω_N^L bezeichnen wollen. Die zugehörige Weylsche Summe $W(N, h)$, wo $h = (h_1, \ldots, h_L)$ ist, sieht so aus

$$\begin{aligned} W(N, h) &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} e\left(\sum_{j=1}^{L} h_j (a_k b_j t + b_k) \right) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} e\Big((\langle h\beta \rangle)(a_k t + b_k) \Big). \end{aligned}$$

Es ist, wenn wir die gleiche Methode wie für $s = 1$ anwenden,

$$\left| W(N,h) - \frac{1}{V(K)} \iint e\big(\langle h\beta\rangle l_k\big)\ \mathrm{d}a\,\mathrm{d}b \right| \le C_6 |R^2(h) t| \tilde{D}_N(\Phi, \omega_N)\,,$$

$(C_6 \le \mathrm{Max}(1, |\beta_2|, \dots, |\beta_L|))$.

Das Integral links wird nun

$$\le C_7 |t| \langle h\beta\rangle\,.$$

Wenden wir wieder die Ungleichung von ETK an, so erhalten wir

$$D_N(\omega_N^L) \le C_8 \left(\frac{1}{M} + \frac{1}{|t|} \sum_{\|h\| \le M} \frac{1}{R(h)|\langle h\beta\rangle|} + |t| \tilde{D}_N \sum_{\|h\| \le M} \big(R(h)\big)^2 \right).$$

Nun ist

$$\Sigma = \sum_{\|h\| \le M} \frac{1}{R(h)|\langle h\beta\rangle|} = \sum_{\|h\| \le M} \frac{R(h)^{\mu-1}}{R(h)^{\mu}|\langle h\beta\rangle|} \le M^{L(\mu-1)} \sum_{\|h\| \le M} \frac{1}{\big(R(h)\big)^{\mu}|\langle h\beta\rangle|}\,,$$

also ist

$$|\Sigma| \le C M^{L(\mu-1)} (\log M)^{\mu}\,.$$

Es wird also

$$D_N(\omega_N^L) \le C_9(L) \left(\frac{1}{M} + \frac{M^{L(\mu-1)}}{|t|} (\lg M)^L + \tilde{D}_N M^{2L} \right).$$

Nehmen wir

$$M^{-(L(\mu-1)+1)} \sim \frac{1}{t}\,,$$

so erhalten wir

$$D_N(\omega_N^L) \le C_{10} \left(\frac{\left(\log \frac{1}{t}\right)^L}{t^{L(\mu-1)+1}} + \tilde{D}_N t^{\frac{L}{L(\mu-1)+1}} \right).$$

Es wird also für großes N und großes t ω_N^L gleichverteilt sein zu den Zeiten $t, t\beta_2, \dots, t\beta_L$. Es wird also jede Farbkombination mit gleicher Wahrscheinlichkeit auftreten können.

§6. Wir betrachten jetzt das System von Differentialgleichungen in den Variablen t

$$\dot{x} = p\,, \qquad \dot{\varphi} = \omega\,,$$
$$\dot{p} = -\mu p\,, \qquad \dot{\omega} = -\mu\omega$$

($\mu > 0$ ist die Reibung), mit den Anfangsbedingungen $x(0) = a$, $\varphi(0) = b$

$$p(0) = u\,, \qquad \omega(0) = v\,.$$

Die Lösung wird gegeben durch

$$x = u\Phi(\mu, t) + a\,, \qquad \omega = v\Phi(\mu, t) + b\,,$$

wobei

$$\Phi(\mu, t) = \frac{1}{\mu}\left(1 - \mathrm{e}^{-\mu t}\right)\,.$$

Es ist

$$\Phi(0, t) = 0\,, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial t} > 0\,.$$

Es ist für $t > \frac{\log 2}{\mu}$

$$\Phi(\mu, t) > \frac{1}{2\mu} \qquad \text{und} \qquad \lim_{t \to \infty} \Phi(\mu, t) = \frac{1}{\mu}\,.$$

Wir betrachten nun eine Folge (u_k, v_k, a_k, b_k) mit $1 \leq k \leq N$ im Quader $0 \leq a \leq \delta$, $0 \leq b < 1$, $0 \leq u \leq \delta$, $0 \leq v < 1$ gleichverteilt mit der Dichte

$$\rho(u, v, a, b) = \rho_1(u)\rho_2(v)\rho_3(a)\rho_4(b)\,.$$

Es sei $\tilde{D}_N^{\rho}$ die Diskrepanz dieser Folge. Wir betrachten das Paar

$$l(u, v, a, b, t) = \big(u\Phi(\mu, t) + a,\ v\Phi(\mu, t) + b\big)$$

und die Folge $(1 \leq k \leq N)$

$$l_k(t) = \big(u_k\Phi(\mu, t) + a_k;\ v_k\Phi(\mu, t) + b_k\big)\,.$$

Wir untersuchen die Folge (l_k) und die zugehörige Weylsche Summe $W(N, h)$, wo $h = (h_1, h_2) \neq (0, 0)$ Gitterpunkt,

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} e\left(\frac{h_1}{\delta}\big(u_k\Phi(\mu, t) + a_k\big) + h_2\big(v_k\Phi(\mu, t) + b_k\big)\right)$$

und das zugehörige Integral

$$\begin{aligned} J &= \int \mathrm{d}u\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}b\; e\left(\frac{h_1}{\delta}\big(u\Phi(\mu, t) + a\big) + h_2\big(v\Phi(\mu, t) + b\big)\right)\rho(u, v, a, b) \\ &= J_1 J_2 J_3 J_4\,, \end{aligned}$$

wobei

$$J_1 = \frac{1}{\delta} \int_1^\delta \mathrm{d}u\, e\left(\frac{h_1}{\delta} u\Phi\right) \rho_1(u)\,,$$

$$J_2 = \int_0^1 \mathrm{d}v\, e(h_2 v\Phi)\rho_2(v)\,,$$

$$J_3 = \frac{1}{\delta} \int_1^\delta \mathrm{d}a\, e\left(\frac{h_1}{\delta} a\Phi\right) \rho_3(a)\,,$$

$$J_4 = \int_0^1 \mathrm{d}b\, e(h_2 b\Phi)\rho_4(b)\,.$$

Bedeutet C_j die obere Schranke für die Beträge von ρ_j und die zugehörigen Ableitungen, so erhält man, wenn man §2, Formel (18), (19) anwendet, daß

$$|J_1| \le \frac{\delta C_1}{R_1(h_1)\Phi}\,,$$

$$|J_2| \le \frac{C_2}{R_2(h_2)\Phi}\,,$$

$$|J_3| \le \frac{\delta C_3}{R_1(h_1)\Phi}\,,$$

$$|J_4| \le \frac{C_4}{R_2(h_2)\Phi}\,.$$

Da wir $t \ge \frac{\lg 2}{\mu}$ angenommen haben, ist $\Phi \ge \frac{1}{2\mu}$, also erhalten wir mit $C = C_1C_2C_3C_4$

$$|J| \le \frac{16\delta^2 C\mu^2}{R(h)}\,,$$

wo $R(h) = R(h_1)R(h_2)$ ist.

Wenden wir wieder die Methode an, die wir schon in §2 bis §4 benützt haben, so erhalten wir

$$|W(N,h)| \le \frac{C_2\mu^2\delta^2}{R^2(h)} + \tilde{D}_N^\rho R^2(h)\Phi^2\,.$$

Wenden wir wieder ETK an, so erhalten wir für die Diskrepanz $\omega_N = (l_k)$

$$D_N(\omega_N) \le C_s\left(\frac{1}{M} + \delta^2\mu^2 \sum \frac{1}{R^2(h)} + \tilde{D}_N^\rho \Phi^2 \sum_{\|h\|\le M} R^2(h)\right),$$

also ist

$$D_N(\omega_N) \le C_s\left(\frac{1}{M} + \delta^2\mu^2 + \tilde{D}_N^\rho \Phi^2 M^4\right).$$

Nun ist

$$\Phi = \frac{1 - \mathrm{e}^{-\mu t}}{\mu}.$$

Es wird also

$$D_N\big(\omega_N(t)\big) \le C\left(\frac{1}{M} + C\delta^2\mu^2 + \frac{\tilde{D}_N}{\mu^2}M^4\right).$$

Wir wählen

$$\frac{1}{M} \sim \frac{\tilde{D}_N^\rho}{\mu^2},$$

dann ist

$$D_N(\omega_N) \le C_6\left(\left(\frac{\tilde{D}_N^\rho}{\mu^2}\right)^{\frac{1}{5}} + \delta^2\mu^2\right). \tag{$*$}$$

Setzen wir statt x den Buchstaben μ und betrachten wir jetzt das Paar $(\mu_1, \varphi_1)\dots(\mu_N, \varphi_N)$, das von der Zeit t abhängt und zur Zeit $t = 0$ die Anfangslagen $(a_1, b_1)\dots(a_N, b_N)$ mit den Anfangsgeschwindigkeiten $(u_1, v_1)\dots$ $\dots(u_N, v_N)$ besitzt. Wir hatten in der Arbeit [HLA05], die Voraussetzung gemacht, daß die Paare (η_j, φ_j) unabhängig von der Zeit t stets gleichverteilt mit einer Diskrepanz D_N sind, und für die Häufigkeit $\frac{A}{N}$, mit der eine Nadel von der Länge l eine parallele Schar von Geraden in einer Ebene E mit einem Abstand d $(l < d)$ trifft, wenn sie auf die Ebene geworfen wird, das Resultat (l hängt von a und b ab)

$$\left|\frac{A}{N} - \frac{2l}{\pi d}\right| \le 40\sqrt{D_N}$$

erhalten. Benützen wir das Resultat $(*)$, so hängt nun A von der Zeit t ab und wir erhalten

$$\left|\frac{A(t)}{N} - \frac{2l}{\pi d}\right| \le C_1\sqrt{\left(\frac{\tilde{D}_N^\rho}{\mu^2}\right)^{\frac{1}{5}} + \delta^2\mu^2}.$$

Je weiter die Zeit fortschreitet, umso besser wird die Gleichverteilung, die jetzt von der Reibung μ abhängt.

§7. Wir betrachten ein System von Differentialgleichungen

$$\frac{\mathrm{d}x_j}{\mathrm{d}t} = f_j(p_j), \qquad \frac{\mathrm{d}p_j}{\mathrm{d}t} = -g_j(x_j) \tag{1}$$

für $j = 1, \dots, s$ auf dem Quader

$$K = K_1 \times K_2 \tag{1'}$$

mit

$$K_1 = K_{11} \times K_{12} \times \cdots \times K_{1s} \tag{2}$$

und

$$K_{1j}: \ 0 \le x_j < 1 \quad (\mathrm{mod}\ 1) \tag{2'}$$

und

$$K_2 = K_{21} \times K_{22} \times \cdots \times K_{2s} \tag{3}$$

$$a_j \le p_j \le b_j \,. \tag{3'}$$

Die Funktionen f_j, g_j seien stetig differenzierbar und positiv. Die Ableitungen der f_j seien ebenfalls positiv, also die f_j monoton wachsend und $\lim\limits_{j\to\infty} f_j(a_j) = \infty$. Die g_j seien periodisch mit der Periode 1 (was wir o.B.d.A. voraussetzen können).

Es ist nun

$$g_j(x_j)\frac{\mathrm{d}x_j}{\mathrm{d}t} + f_j(p_j)\frac{\mathrm{d}p_j}{\mathrm{d}t} = 0\,. \tag{4}$$

Integration von (4) in $K = K_1 \times K_2$ ergibt

$$G_j(x_j) + F_j(p_j) = E_j\,, \tag{5}$$

wo G_j, F_j Stammfunktionen von g_j bzw. f_j und E_j Konstante sind.

Man kann die E_j als Energie des j-ten Systems ansehen, die Summe $E = \sum\limits_{j\ 1}^{s} E_j$ als Gesamtenergie und $H(x,p) = \sum\limits_{j=1}^{s} \big(G_j(x_j) + F_j(p_j)\big)$ als die Hamiltonfunktion des gesamten Systems.

Wir betrachten nun eine Folge $\tilde{\omega}_N\colon (\pi_1^k, \dots, \pi_s^k)$ mit $1 \le k \le N$ aus K_2 gleichverteilt mit der Dichte

$$\rho(\pi) = \rho_1(\pi_1)\dots\rho(\pi_s)\,. \tag{6}$$

Bevor wir weitergehen, wollen wir noch in (5) eine Normierung vornehmen. Wir wollen jetzt die g_j zu einer Dichte machen, indem wir (5) durch

$$\gamma_j = \int_0^1 g_j(x)\,\mathrm{d}x$$

dividieren. Wir setzen jetzt

$$f_j^* = \frac{f_j}{\gamma_j}\,, \qquad g_j^* = \frac{g_j}{\gamma_j}\,, \qquad F_j^* = \frac{F_j}{\gamma_j}\,, \qquad E_j^* = \frac{E_j}{\gamma_j}\,,$$

sodaß sich (5) so schreibt

$$G_j^*(x_j) + F_j^*(p_j) = E_j^* .$$

Wir betrachten nun die Folge ω_N

$$F^*(\pi^k) = \bigl(F_1^*(\pi_1^k), \dots, F_s^*(\pi_s^k)\bigr) \quad (\mathrm{mod}\ 1) . \tag{7}$$

Es sei wieder $h = (h_1, \dots, h_s) \neq (0, \dots, 0)$ ein Gittervektor und es sei $\langle hF^* \rangle = h_1 F_1^* + \cdots + h_s F_s^*$ das skalare Produkt, $l_k = \langle hF^*(\pi^k) \rangle$ für $k = 1, 2, \dots, N$. Die zugehörige Weylsche Summe ist

$$W(N, h) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} e(l_k) .$$

Es ist in gewohnter Weise

$$|W(N, h) - J| \leq \tilde{D}_N^{\rho} R(h) L^s ,$$

wobei

$$L^s = f_1(h_1) \dots f_s(h_s) ,$$

da die f_j ja monoton wachsende Funktionen im Intervall $\langle a_j, b_j \rangle$ sind.

Ist $V(K_2) = (b_1 - a_1) \dots (b_s - a_s)$, so ist

$$V(K_2) \cdot J = \int_{K_2} e\bigl(\langle hF^*(p) \rangle\bigr) \rho(p)\, \mathrm{d}p . \tag{8}$$

Dies ist weiter gleich

$$\prod_{j=1}^{s} \int_{K_{2j}} e\bigl(h_j F_j^*(p_j)\bigr) \rho_j(p_j)\, \mathrm{d}p_j . \tag{9}$$

Wir setzen wieder

$$C_j = \text{obere Schranke von } |\rho_j| \text{ und } \left| \frac{\partial \rho_j}{\partial p_j} \right| \text{ in } K_{2j} . \tag{10}$$

Wir gehen beim Integral

$$J_j = \int_{K_{2j}} e(h_j F_j^*) \rho_j(p_j)\, \mathrm{d}p_j$$

in gewohnter Weise vor, wenn wir $h_j \neq 0$ voraussetzen und $e(h_j F_j^*)$ mit der Ableitung f_j^* von F_j^* dividieren und dann den reziproken Wert mit $\rho_j(p_j)$ multiplizieren. Führen wir dann die partielle Integration durch, so erhalten wir, wenn wir beachten, daß ja $f_j(p_j)$ im Intervall $\langle a_j, b_j\rangle$ den kleinsten Wert in a_j annimmt, daß

$$|J_j| \leq \frac{C_j}{|h_j|}\left(\frac{1}{f_j(a_j)} + \int\limits_{K_j} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p_j}\left(\frac{\rho_j}{f_j^*}\right) \mathrm{d}p_j\right).$$

Nun ist die Ableitung rechts unter dem Integral gleich der Ableitung von ρ_j dividiert durch f_j plus $\rho_j \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\left(\frac{1}{f_j^*}\right)$, welches ja, da f_j monoton wachsend ist, konstantes Vorzeichen besitzt. Wir haben also

$$|J_j| \leq \frac{C_j}{|h_j| f_j(a_j)} \gamma_j .$$

Setzen wir $\gamma^s = \gamma_1 \dots \gamma_s$, so erhalten wir insgesamt

$$V(K)|J| \leq \frac{C}{R(h)A}, \tag{11}$$

wobei $A = \mathrm{Min}(f_1(a_1), \dots, f_s(a_s))$ ist, $C^* = C_1 \dots C_s$.

Für die Diskrepanz D_N der Folge ω_N erhalten wir also unter Benützung von ETK

$$D_N(\omega_N) \leq \frac{C_s}{V(K_2)}\left(\frac{1}{M} + \frac{C^*}{A} + \tilde{D}_N^{\rho} \sum_{\|h\| \leq M} R(h) L^s\right).$$

Dabei bedeutet $L^s = f_1(h_1) \dots f_s(h_s)$.

Gehen wir mit $N \to \infty$, so geht der letzte Term gegen 0. Gehen wir mit $a_1, \dots, a_s$ gegen ∞, so geht der zweite Term gegen 0. Geht $M \to \infty$, so geht D_N gegen 0, die Folge wird also gleichverteilt.

Wir können nun der Folge $\tilde{\omega}_N$ eine Folge $\hat{\omega}_N = (\xi_1^k, \dots, \xi_s^k)$ mit $1 \leq k \leq N$ in eindeutiger Weise mittels (5) bzw. (5′) zuordnen.

Wir können nämlich bei festem $E = (E_1, \dots, E_s)$ und gegebenem $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_s)$ ein $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_s)$ zuordnen. Ist $(G_j^*)^{-1}$ die inverse Funktion zu G_j^*, so ist

$$\xi_j = (G_j^*)^{-1}(E_j^* - F_j^*(\pi_j)).$$

Es ist ξ_j eine stetige Funktion in E_j^* und π_j, ja sogar differenzierbar, wie aus (5′)

$$G_j^*(\xi_j) = E_j^* - F_j^*(\pi_j)$$

folgt. Bilden wir zu $\tilde{\omega}_N$ die Folge $\hat{\omega}_N$. Es sei Q der Quader $\langle \alpha_1, \beta_1\rangle \dots \langle \alpha_s, \beta_s\rangle$ aus dem Einheitswürfel E^s. Dann sei H_N die Häufigkeit, mit der die $\xi^k = (\xi_1^k, \dots, \xi_s^k)$ in Q vorkommen, sie ist gleich der Häufigkeit, mit der die Punkte $(G_1(\xi_1^k), \dots, G_s(\xi_s^k))$ im Quader $Q_1 = (G_1(\beta_1), G_1(\alpha_1) \times \dots \times G_s(\beta_s), G_s(\alpha_s))$ liegen, da ja die G_j streng monoton abnehmend sind.

Nun ist

$$G_j^*(\xi_j^k) = E_j^* - F_k^*(\pi_j^k)\,.$$

Die Häufigkeit H_N^1 ist wieder gleich der Häufigkeit H_N^2, mit der die Glieder der Folge ω_N im Quader

$$\hat{Q}_2 = \left(E_1^* - G_1^*(\beta_1)\right) \times \cdots \times \left(E_s^* - G_s^*(\beta_s)\right)$$

vorkommen. Nun ist die Folge gleichverteilt mit Diskrepanz $D_N(\omega_N)$. Es ist also $\frac{1}{N}H_N^2$ dem Volumen des Quaders $\hat{Q}_2$ bis auf einen Fehler gleich:

$$\prod_{j=1}^{s}\left(G_j^*(\beta_j) - G_j^*(\alpha_j)\right) + 2\delta D_N(\omega_N)$$

$(|\delta| \leq 1)$.

Nun ist jeder Faktor $G_j^*(\beta_j) - G_j^*(\alpha_j)$ gleich

$$\int_{\alpha_j}^{\beta_j} g_j^*(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Es ist also die Folge $\hat{\omega}_N = (\xi^k)$ gleichverteilt zur Dichte $g^* = g_1^* \ldots g_s^*$, da ja Q beliebig war, ihre Diskrepanz

$$D_N^{g^*}(\hat{\omega}_N) \leq 2D_N(\omega_N)\,.$$

Man kann auch umgekehrt vorgehen.

Man definere mit Hilfe der Folge ω_N aus (7) die Folge $\tilde{\omega}_N = (\hat{\xi}_1^k, \ldots, \hat{\xi}_s^k)$ durch $(j = 1, \ldots, s)$

$$\hat{\xi}_j^k = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\left[1 + F_j^*(\pi_j^*) - G_j^*\left(F_j^*(\pi_j^*)\right)\right].$$

Diese Folge ist gleichverteilt zur Dichte $g_1^* \ldots g_s^*$, deren Diskrepanz $\hat{D}_N$ höchstens $\left(D_N(\omega_N)\right)^{\frac{1}{s+2}}$ ist.

Ist $\iota(\hat{Q}_2)$ die Indikatorfunktion des oben genannten Quaders $\hat{Q}_2$, so ist

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\iota\left(\hat{Q}_2, \hat{\xi}_1, \ldots, \hat{\xi}_s\right) = \prod_{j=1}^{s}\left(G_j^*(\beta_j) - G_j^*(\alpha_j)\right) + L\,,$$

wo

$$|L| \leq \hat{D}_N(\hat{\omega}_N) + 2\vartheta D_N(\omega_N)$$

ist.

Ist, ausgenommen ein Index j_0 mit $1 \leq j_0 \leq s$ für alle anderen j stets $\beta_j = 1$, $\alpha_j = 0$ und $\alpha_{j_0} = \alpha$, $\beta_{j_0} = \beta$, so können wir aus der obigen Formel $G^*_{j_0}(\beta) - G^*_{j_0}(\alpha)$ bestimmen und mit Hilfe von $F^*_j(\beta) - F^*_j(\alpha)$ das Energieniveau $E^*_j(\beta) - E^*_j(\alpha)$ bis auf den Fehler $L + D_N(\omega_N)$ bestimmen.

Wir haben bis jetzt die Energien E_j bzw. E^*_j festgehalten. Wir nehmen jetzt eine s-dimensionale gleichverteilte Folge $(\varepsilon^l) = \big((\varepsilon^l_1, \ldots, \varepsilon^l_s)\big)$ in E^s mit Dichte 1 und Diskrepanz $\hat{D}^s_N$. Wir betrachten

$$A = (E^*_1, \ldots, E^*_s) = (A_1, \ldots, A_s)\,,$$
$$B = (\hat{E}^*_1, \ldots, \hat{E}^*_s) = (B_1, \ldots, B_s)\,,$$

wobei stets $A_j < B_j$ für alle j angenommen ist. Jetzt betrachten wir die Energiescharen

$$A_k = \big(\varepsilon^k_1 A_1 + (1 - \varepsilon^k_1) B_1\big) \ldots \big(\varepsilon^k_s A_s + (1 - \varepsilon^k_s) B_s\big)\,.$$

Wir können mit Hilfe der A_k und der π^l_j die $\xi^k = \big(\xi^k_1, \ldots, \xi^k_s\big)$ bestimmen, so daß

$$F^*(\pi^*_j) + G^*_j\big(\xi^k_j\big) = A_j + (B_j - A_j)\varepsilon^k_j$$

ist. Es ist nun für jede Funktion X auf $K_2 \times E^s$ mit Hilfe der Doppelfolge $\big(\xi^k, \pi^k\big)$

$$\frac{1}{N^2} \sum_{k,l=1}^{N} X\left(\varepsilon^k_1, \ldots, \varepsilon^k_s, \pi^l_1, \ldots, \pi^l_s\right)$$
$$= \int\limits_{K_2 \times E^s} X(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_s, \pi_1, \ldots, \pi_s)\Phi(\pi)\, \mathrm{d}\varepsilon\, \mathrm{d}\pi + \operatorname{Var} X \tilde{D}_N$$

mit der Diskrepanz $\tilde{D}_N$.

Die ξ_j sind differenzierbar in π_j und ε_j. Es ist

$$\frac{\partial G_j}{\partial \varepsilon_j} \frac{\partial \xi_j}{\partial \varepsilon_j} = (B_j - A_j)\,.$$

Wir erhalten also

$$\frac{1}{N^2} \sum_{k,l=1}^{N} X\left(\xi^k, \pi^l\right)$$
$$= \frac{1}{V(K)} \int\limits_K X(\xi, \pi)\Phi(\pi) g^*_1(\xi_1) \ldots g^*_s(\xi_s)\, \mathrm{d}\xi_1 \ldots \mathrm{d}\xi_s + \operatorname{Var} X \tilde{D}_N\,,$$

also ist insgesamt

$$\frac{1}{N^2}\sum_{k,l=1}^{N} X\left(\xi_1^k,\ldots,\xi_s^k,\pi_1^l,\ldots,\pi_s^l\right)$$

$$= \frac{1}{V(K)V(E)}\int\limits_K X(\xi,\pi)g(\xi)\Phi(\pi)\ \mathrm{d}\xi d\pi + \text{Fehler}$$

$\left(V(E) = \prod_{j=1}^{s}(\hat{E}_j^* - E_j^*)\right)$, wo

$$|\text{Fehler}| \leq \operatorname{Var} X\tilde{D}_N$$

ist.

Wenn wir nun $(\xi,\pi) = (\xi_1,\ldots,\xi_s,\pi_1,\ldots,\pi_s)$ nach dieser Konstruktion, wie wir soeben geschildert haben, zu den Anfangsbedingungen für die Lösungen des Differentialgleichungssystems nehmen, so erhalten wir

$$x_j = X_j(t,\xi,\pi)\,,$$
$$p_j = P_j(t,\xi,\pi)\,,$$

wobei

$$X_j(0,\xi,\pi) = \xi_j\,,$$
$$P_j(0,\xi,\pi) = \pi_j\,.$$

Wir bilden uns jetzt die Funktion

$$\hat{X}(x_1,\ldots,x_s,p_1,\ldots,p_s)g_1(x_1)\ldots g_s(x_s)\Phi_1(p_1)\ldots\Phi_s(p_s)\,,$$

wobei x_j, p_j die Funktionen $X_1,\ldots,X_s$, $P_1,\ldots,P_s$ sind. Es ist nach Konstruktion

$$\frac{1}{N^2}\sum_{k,l=1}^{N} \hat{X}\left(x_1^k,\ldots,x_s^k,p_1^l,\ldots,p_s^l\right)$$

$$= \frac{1}{V(K)}\int\limits_K \hat{X}(x_1,\ldots,x_s,p_1,\ldots,p_s)\ \mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\pi + \text{Fehler}\,,$$

wobei x_j^k, p_j^l die Lösungen des Systems mit den Anfangsbedingungen $\xi_1^k,\ldots,\xi_s^k$, $\pi_1^l,\ldots,\pi_s^l$ sind.

Nun ist das Integral rechts in der obigen Gleichung invariant gegenüber der Transformation T

$$x_1 = X_1(t,\xi_1\ldots\xi_s,\pi_1\ldots\pi_s)\,,$$
$$\vdots$$
$$p_s = P_s(t,\xi_1\ldots\xi_s,\pi_1\ldots\pi_s)\,.$$

Dabei geht K in das Bild von $K = T(K)$ bei dieser Transformation über. Links stehen schon die Bilder der ξ_j^k, π_j^l. Weiter ist die Funktionaldeterminante $\dfrac{\partial(x_1 \dots p_s)}{\partial(\xi_1 \dots \pi_s)} = 1$. Wir erhalten also

$$\frac{1}{N^2}\sum_{k,l=1}^{N} \hat{X}\left(x_1^k, \dots, x_s^k, p_1^l, \dots, p_s^l\right) = \frac{1}{V(K)} \int_{T(K)} \hat{X}(x,p)\Phi(p)g(x)\,\mathrm{d}p\,\mathrm{d}x + \text{Fehler}$$

(Liouvillescher Satz nach Boltzmann).

Es ist also

$$\frac{1}{N^2}\sum_{k,l=1}^{N} \hat{X}\left(x_1^k, \dots, x_s^k, p_1^l, \dots, p_s^l\right) = \frac{1}{N^2}\sum_{k,l=1}^{N} \hat{X}\left(\xi_1^k, \dots, \xi_s^k, \pi_1^l, \dots, \pi_s^l\right) + \text{Fehler}\,,$$

wobei

$$|\text{Fehler}| \leq \operatorname{Var}\hat{X} \cdot \tilde{D}_N\,,$$

wo $\hat{D}_N$ die Diskrepanz der Folge (ξ^k, π^l) ist.

Die Diskrepanz $\tilde{D}_N$ der Doppelfolge (ξ^k, π^l) ist höchstens

$$\tilde{C}_s(D_N + \hat{D}_N)$$

($\tilde{C}_s$ absolute Konstante), wo D_N die Diskrepanz der Folge (π^l) und $\hat{D}_N$ die Diskrepanz der Folge (ξ^k) ist.

Beweis: Es $\tilde{Q}$ Quader in E^{2s}, so ist $\tilde{Q} = Q_1 \times Q_2$, wo Q_1, Q_2 Quader in E^s sind. Es ist

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{N^2}\sum_{k,l}^{N}\left(\iota_{\tilde{Q}}(\xi^k, \pi^l) - V(\tilde{Q})\right) \\
&= \frac{1}{N^2}\sum_{k,l}^{N}\left(\iota_{Q_1}(\xi^k) - V(Q_1)\right)\iota_{Q_2}(\pi^l) + \frac{1}{N^2}\sum_{k,l}^{N} V(Q_1)\left(\iota_{Q_2}(\pi^l) - V(Q_2)\right) \\
&\leq D_N + \hat{D}_N\,.
\end{aligned}$$

Wir können statt der Doppelfolge (ξ_j^k, π_j^l) auch die Doppelfolge $\left(\hat{\xi}_j^k, \pi_j^l\right)$, also die Orte $\hat{\xi}_j^k$ und die Impulse π_j^l vorgeben, was sogar natürlicher ist. Es gilt die gleiche Abschätzung für die Diskrepanz dieser Folge.

Es ist nun

$$t_j = \int_{\xi_j}^{v_j} \frac{\mathrm{d}\varphi_j}{\sqrt{E_j - G_j(\varphi_j)}}$$

als Funktion $V_j(v_j)$ zu betrachten. Es ist $V_j(\xi_j) = 0$ und

$$\frac{\mathrm{d}U_j(v_j)}{\mathrm{d}v_j} = \frac{1}{\sqrt{E_j - G_j(v_j)}} > 0\,,$$

also existiert auch die Umkehrfunktion von U_j. Wir wollen sie mit $V_j = V_j(t_j)$ bezeichnen. Es ist

$$\frac{\mathrm{d}V_j(t_j)}{\mathrm{d}t_j} = \sqrt{E_j - G_j(v_j)} = \sqrt{E_j - G_j(B_j(v_j))}\,.$$

Wir betrachten nun die Funktion $W_j(v_j) = U_j(v_j+1)$. Es ist

$$\frac{\mathrm{d}U_j(v_j+1)}{\mathrm{d}v_j} = \frac{1}{\sqrt{E_j - G_j(v_j+1)}} = \frac{1}{\sqrt{E_j - G_j(v_j)}}\,,$$

da G_j die Periode 1 hat. Es ist also

$$\frac{\mathrm{d}V_j(v_j+1)}{\mathrm{d}v_j} - \frac{\mathrm{d}V_j(v_j)}{\mathrm{d}v_j} = 0\,,$$

also ist $U_j(v_j+1) - U_j(v_j)$ eine Konstante T_j. Wir haben also für alle v_j

$$U_j(v_j+1) = U_j(v_j) + T_j\,,$$

also

$$V_j(t_j + T_j) = V_j(t_j) + 1\,.$$

Setzen wir $v_j = 0$, so erhalten wir

$$T_j = U_j(1) - U_j(0) = U_j(1)\,.$$

Wir betrachten die Funktion

$$\bar{X}(\varphi_1, \ldots, \varphi_s) = \Phi\big(X_1(T_1\varphi_1), \ldots, X_s(T_s\varphi_s)\big)\,,$$

welche in den Variablen $\varphi_1, \ldots, \varphi_s$ periodisch mit der Periode 1 ist.

Nehmen wir nun an, daß $\frac{1}{T_1} \ldots \frac{1}{T_s}$ voneinander unabhängig im Sinne der Gleichverteilung sind, daß aus einer Gleichung ($h_0, h_1, \ldots, h_s$ alle ganz)

$$h_0 + h_1\frac{1}{T_1} + \cdots + \frac{h_s}{T_s} = 0$$

folgt $h_0 = h_1 = \cdots = h_s = 0$, so ist für jedes $t > 0$ $(\frac{1}{T_1}, \ldots, \frac{1}{T_s})t$ C-gleichverteilt, d.h. für jede periodische integrierbare Funktion $\bar{X}(\varphi_1, \ldots, \varphi_s)$ mit Periode 1 in $\varphi_1, \ldots, \varphi_s$ gilt

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_1^T \bar{X}\left(\frac{t}{T_1}, \ldots, \frac{t}{T_s}\right) \mathrm{d}t = \int_{E_s} \bar{X}(\varphi_1 \ldots \varphi_s)\, \mathrm{d}\varphi_1 \ldots \varphi_s = J = J(\Phi)\,.$$

Auch im Falle der C-Gleichverteilung gibt es eine Diskrepanz D_T^s, die jetzt von der kontinuierlichen Variable T abhängt, und es gilt

$$\left|\frac{1}{T}\int_1^T X\left(\frac{t}{T_1},\ldots,\frac{t}{T_s}\right)\,\mathrm{d}t - J\right| \le D_T^s \operatorname{Var} X\,,$$

wenn X eine Funktion von beschränkter Variation ist. Es gibt auch ein diskretes Gegenstück (Bahnhofsuhr). Betrachten wir für ein ganzzahliges $L \geq 1$ die Folge

$$\omega_N^s = \left(\frac{k}{LT_1},\ldots,\frac{k}{LT_s}\right)$$

für $k = 1,\ldots,N$ und mit der Diskrepanz D_N^s, so gilt analog

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} X\left(\frac{k}{LT_1},\ldots,\frac{k}{LT_s}\right) - J\right| \le D_N^s \operatorname{Var} X\,.$$

Nehmen wir an, daß $\frac{1}{T_1},\ldots,\frac{1}{T_s}$ vom Typus μ sind, den wir schon früher eingeführt haben, so ist in diesem Fall für $\mu > 1$

$$D_N^s = O\left(\left(\frac{1}{N}\right)^{\frac{1}{(\mu-1)s+1}}\right),$$

also für $\mu = 1$ die Größenordnung $\frac{\lg^{s+1} N}{N}$. Wir wollen noch bemerken, daß die Bestimmung des Typus μ schwierig ist. Es ist ja noch zu bedenken, daß $T_1,\ldots,T_s$ im allgemeinen von den Anfangsbedingungen ξ und π abhängt.

Wir können noch das Integral J umformen. Wir machen die Transformation $t_j = T_j\varphi_j$ für alle $j = 1,\ldots,s$, so wird

$$J = \frac{1}{T_1\ldots T_s}\int_0^{T_1}\mathrm{d}t_1\ldots\int_0^{T_s}\mathrm{d}t_s\Phi(X_1(t_1,\xi_1,\pi_1)\ldots X_s(t_s,\xi_s,\pi_s))\,\mathrm{d}t_1\ldots\mathrm{d}t_s\,.$$

Wir hatten nun die Beziehung $(j = 1,\ldots,s)$

$$t_j = \int_{\xi_j}^{v_j}\frac{\mathrm{d}\varphi_j}{\sqrt{E_j - G_j(\varphi_j)}}\ :$$

Es ist also

$$\frac{\mathrm{d}t_j}{\mathrm{d}v_j} = \frac{1}{\sqrt{E_j - G_j(\varphi_j)}}\,.$$

Führen wir statt der t_j die v_j ein, so erhalten wir

$$J(\Phi) = \frac{1}{T_1 \dots T_s} \int_{E^s} \prod_{j=1}^{s} \frac{\Phi\big(X_j(v_j, \xi_j, \pi_j)\big)}{\sqrt{E_j - G_j(v_j)}} \, \mathrm{d}v_1 \dots \mathrm{d}v_s \, .$$

Wenn wir beachten, daß

$$T_j = \int_{E^1} \frac{\mathrm{d}v_j}{\sqrt{E_j - G_j(v_j)}}$$

ist, so sehen wir, daß J tatsächlich ein Mittelwert auf E^s ist mit der Dichte $\tilde{\rho}(X) = \tilde{\rho}_1(x_1) \dots \tilde{\rho}_s(x_s)$, wo

$$\tilde{\rho}_j = \frac{1}{\sqrt{E_j - G_j(x_j)}}$$

ist.

Besonders wichtig ist der Fall, daß Φ die Indikatorfunktion eines Quaders

$$Q: \ \alpha_j < x_j < \beta_j \qquad \text{für} \quad j = 1, \dots, s$$

ist. Die Verweilzeit der Lösung $\left(x_1, (\frac{1}{T}), \dots, x_s, (\frac{1}{T})\right)$ des Systems (1) ist durch $J\big(\iota(Q, x)\big)$, wo ι die Indikatorfunktion von Q ist, gegeben.

Wir wollen noch ein Beispiel angegeben und zwar zunächst für $s = 1$ und für die Pendelgleichung

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}t^2} = -C \sin\varphi$$

und zwar in abgeänderter Form, wie wir sie brauchen. Es sei also

$$g(x) = \begin{cases} C \sin 2\pi x & \text{für } 0 < x < \frac{1}{2} \, , \\ -C \sin 2\pi x & \text{für } \frac{1}{2} < x < 1 \, , \end{cases}$$

also

$$g(x) = C|\sin 2\pi x| \, ,$$

wo C eine positive Konstante ist.

Es ist also g positiv im Intervall E, $0 \le x < 1$ ausgenommen in $x = 0$ und $x = \frac{1}{2}$. Sie ist auch periodisch und ihre Stammfunktion lautet

$$G(x) = \begin{cases} \frac{C}{2\pi}(1 - \cos 2\pi x) & \text{für } 0 \le x < \frac{1}{2} \, , \\ \frac{C}{2\pi}(3 + \cos 2\pi x) & \text{für } \frac{1}{2} \le x < 1 \, . \end{cases}$$

(Setzen wir $x - \frac{1}{2} = x'$, so ist $(3 + \cos 2\pi x) = 2 + \sin^2 \pi x'$.)

Sie ist wieder periodisch, stetig und differenzierbar (insbesondere an der Stelle $x = \frac{1}{2}$) und besitzt an den ganzzahligen Stellen einen Sprung, ist aber linksseitig stetig, sogar differenzierbar. Es ist $G(1) = \frac{2C}{\pi}$, $G(0) = 0$.

Wir können noch g normieren und es ist

$$g^*(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos 2\pi x}{4} = \frac{\sin^2 \pi x}{2} & \text{für } 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ \frac{3+\cos 2\pi x}{4} & \text{für } \frac{1}{2} \leq x < 1. \end{cases}$$

Damit wird auch G^*, F^* und E^* normiert. Sind nun E^* und F^* und die Anfangsbedingung π für p gegeben, so können wir die Anfangsbedingung ξ aus der Gleichung $G^*(\xi) + F^*(\xi) = E^*$ bestimmen. Es muß

$$G^*(\xi) = E^* - F^*,$$

sein, wo $F^* = F^*(\pi)$ ist.

Ist $E^* - F^* < \frac{1}{2}$, so ist

$$\frac{\sin^2 \pi\xi}{2} = E^* - F^*,$$

also

$$\sin \pi\xi = \sqrt{2(E^* - F^*)},$$

also

$$\xi = \frac{1}{\pi} \arcsin \sqrt{2(E^* - F^*)}$$

im ersten Fall und

$$\xi = \frac{1}{\pi} \arcsin \sqrt{2\bigl(1 - (E^* - F^*)\bigr)}$$

im zweiten Fall ($E^* - F^* \geq \frac{1}{2}$).

Es muß noch beachtet werden, daß ja

$$E^* = \frac{E}{C}\frac{\pi}{2}, \qquad F^* = \frac{F}{C}\frac{\pi}{2}, \qquad \text{und} \qquad G^* = \frac{G}{C}\frac{\pi}{2}$$

ist, also auch von C abhängen.

Jetzt benötigen wir noch die Berechnung von t. Wir haben in diesem Fall, daß im Intervall $0 < x < \frac{1}{2}$ sind, daß

$$t = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_\xi^v \frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{E - C \sin^2 \pi\varphi}}.$$

Wir können das Integral als Differenz der beiden elliptischen Integrale $I(\psi)$

$$I(\psi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^\psi \frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{E - C \sin^2 \pi\varphi}}$$

darstellen. Es wird

$$I(\psi) = \frac{1}{\sqrt{2E}} \int_0^{\psi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{C}{E} \sin^2 \pi\varphi}}.$$

Es ist $\frac{C}{E} = \frac{1}{E^*} < 1$. Wir setzen $k = \sqrt{\frac{C}{E}}$, dann wird

$$I(\psi) = \frac{1}{\sqrt{2E\pi}} \int_0^{\pi\psi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}.$$

Nun ist für $\psi = \frac{1}{2}$ das Integral gleich dem vollständigen Integral $K = K(k)$.

Wir erhalten im ersten Fall

$$t = \frac{1}{\sqrt{2E\pi}} \int_{\xi}^{v} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \pi\varphi}}.$$

Im zweiten Fall haben wir

$$t = \frac{1}{\sqrt{2E}} \left[\int_{\xi}^{\frac{1}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \pi\varphi}} + \int_{\frac{1}{2}}^{v} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \pi\varphi}} \right].$$

Nun ist

$$\int_{\frac{1}{2}}^{v} \frac{d\xi}{\sqrt{1 - k^2(3 + \cos 2\pi\xi)}} = \int_0^{v-\frac{1}{2}} \frac{d\xi}{\sqrt{1 - k^2 - k^2 \sin^2 \pi\xi}}.$$

Definieren wir die Entropie einer Dichte Φ auf einer Menge M in E^s durch

$$S(M, \rho) = -\log \int_M \Phi \, dv.$$

Wir haben zuerst die Dichte Φ der Anfangsverteilung von p, so ist dann die korrespondierende Dichte Φg^*. Es ist also

$$S(M, \Phi) = -\log \int_M \Phi \, dv$$

und

$$S(M, \Phi g^*) = -\lg \int_M \Phi g^* \, dv.$$

Es wird also die Differenz

$$\Delta S = S(M, \Phi g^*) - S(M, \Phi) = -\lg \frac{\int_M \Phi g^* \, \mathrm{d}v}{\int_M \Phi \, \mathrm{d}v} .$$

Ist $g^* = 1$, so wird $\Delta S = 0$.

Haben wir einen Punkt P_0 in E^s und betrachten wir eine Folge $U_1, U_2, \ldots$ von Umgebungen, die sich auf P_0 zusammenziehen, so erhalten wir, wenn $g^*(P_0) \neq 0$

$$\lim_{l \to \infty} \Delta(S, U_l) = -\log g^*(P_0) .$$

Ist an diesem Punkt $g^* > 1$, so wird dieser Limes negativ, im Falle $g^* > 1$ wird dieser Limes positiv.

Wenn g^* nicht identisch 1 ist, so muß es solche Punkte und damit ganze Umgebungen dieser Punkte geben, wo die Entropie zu- bzw. abnimmt.

Wir können auch andere Systeme von Differentialgleichungen behandeln. Beschränken wir uns auf den Fall $s = 1$, so sind es die Keplerbahnen eines Massenpunktes von der Form

$$\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = F\left(\frac{1}{r}\right),$$
$$\dot{\varphi} = \frac{e}{r^2}$$

(zweites Keplersches Gesetz).

Man setzt $r = \frac{1}{u}$ und erhält eine Gleichung von der Gestalt

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\varphi^2} = H(u) .$$[4]

Setzen wir $p = \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi}$, dann lautet das System

$$p = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi}, \qquad \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\varphi} = H(u) .$$

Man setzt dann noch $u = A + B\cos\psi$. Dann haben wir ein System wie in §7 (1), wo jetzt statt t der Winkel φ und statt x der Buchstabe ψ steht. Man sieht sofort, wie man das für $s > 1$ verallgemeinern kann.

Wir wollen noch einige wichtige Keplerbahnen betrachten: Es sei zunächst

$$\begin{aligned} H(u) &= A + Bu - Cu^2 \\ &= -C(u - u_1)(u - u_2) = (u - u_1)(u_2 - u) , \end{aligned}$$

Man vergleiche das Buch von H. J. Dirschmid [DIR01; S. 246] (dort Beispiele) und Roman U. Sexl [SEX01; S. 157].

wobei $0 < u_1 < u_2$, $C > 0$ (Für $C = 1$ erhalten wir die elliptische Keplerbahn).

Wir erhalten also für $u = \frac{1}{r}$

$$\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2 = C(u-u_1)(u_2-u),$$

also

$$\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{\sqrt{C}}\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{(u-u_1)(u_2-u)}}.$$

Wir erhalten sofort

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{C}}\arcsin\frac{u-\frac{1}{2}(u_1+u_2)}{\frac{1}{2}(u_2-u_1)},$$

also

$$u = \frac{1}{2}(u_1+u_2) + \frac{1}{2}(u_2-u_1)\sin\sqrt{C}\varphi.$$

Wir setzen

$$\psi = \frac{\sqrt{C}}{\pi}\varphi$$

und erhalten

$$u = \frac{1}{2}(u_1+u_2) + \frac{1}{2}(u_2-u_1)\sin\pi\psi$$

und

$$r = \frac{1}{\frac{1}{2}(u_1+u_2) + \frac{1}{2}(u_2-u_1)\sin\pi\varphi}.$$

Für $C = 1$ erhalten wir eine Ellipse, für $C \neq 1$ eine Rosenkurve.

Der zweite Fall tritt bei der Keplerbewegung in der speziellen Relativitätstheorie ein. In der allgemeinen Relativitätstheorie ist

$$\begin{aligned} H(u) &= A + Bu - u^2 + \alpha u^3 \\ &= \alpha(u-u_1)(u-u_2)(u-u_3) \end{aligned}$$

mit $u_1 < u_2 < u_3$. Wir nehmen u im Intervall $u_1 < u < u_2$ an. Wir können dann

$$H(u) = (u-u_1)(u_2-u)H_1(u)$$

schreiben, wo $H_1 = \alpha(u_3 - u) > 0$ ist. Wir wollen gleich den Fall $H_1(u) > 0$, wo H_1 sonst beliebig ist, nach der Methode von Weierstraß betrachten. Wir setzen einfach

$$u = \frac{u_1+u_2}{2} + \frac{u_2-u_1}{2}\sin\pi\psi.$$

Es ist

$$(u-u_1)(u_2-u) = \left(\frac{u_2-u_1}{2}\right)^2\cos^2\pi\psi.$$

Wir erhalten also

$$\varphi = \int \frac{d\psi}{\sqrt{u(\sin \pi\psi)}},$$

wo $f(|\sin \pi\psi|) = H(u)$ ist.

Ein weiteres Beispiel ist der anharmonische Oszillator. Auch hier haben wir ein elliptisches Integral zu behandeln.

Levi-Civita hat 1937 auch eine allgemeine Formel für den Fall angegeben, daß $H(u)$ von der Gestalt

$$\omega^2(u - \rho_1)(u - \rho_2) + \varepsilon g(u)$$

(ε genügend klein) ist, wenn $g(u)$ von geringerer Größenordnung ist als der erste Term im Intervall (ρ_1', ρ_2'), welches Teilintervall von (ρ_1, ρ_2) ist. Es lautet

$$T = \frac{2\pi}{\omega} + \frac{1}{\omega^3}\varepsilon \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{G(u, \rho_1, \rho_2)}{V(u, \rho_1, \rho_2)}\, d\varphi$$

ist, wo

$$u = \frac{1}{2}(\rho_1 + \rho_2) + \frac{1}{2}(\rho_2 - \rho_1)\cos\varphi$$

und

$$G(u, \rho_1, \rho_2) = \begin{vmatrix} g(u), & u, & 1 \\ g(\rho_1), & \rho_1, & 1 \\ g(\rho_2), & \rho_2, & 1 \end{vmatrix}$$

und

$$V(u, \rho_1, \rho_2) = (\rho_2 - \rho_1)(u - \rho_1)(\rho_2 - u)$$

ist.

M. Cartovitch hat 1938 in der Arbeit [CAR01] gezeigt, daß T auch geschrieben werden kann

$$T = \frac{2\pi}{\omega} + \frac{1}{\omega^3}\varepsilon \int_0^{\frac{1}{2}} g''(u)\sin^2\varphi\, d\varphi.$$

Epilog. Wir haben in der ganzen Arbeit, immer wieder Systeme $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_s$ betrachtet. Diese Systeme werden durch Anfangsbedingungen, welche die Gestalt einer s-dimensionalen Folge haben, gleichverteilt bezüglich einer Dichte ρ, welche ein Produkt von Dichten $\rho_1, \ldots, \rho_s$ im bezug auf $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_s$ ist. Die Systeme $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_s$ stehen untereinander in keiner Wechselwirkung. Wir denken uns nämlich nach einer Idee von A. Einstein [EIN01], welche J. von Neumann in seinem Buch [NEU01] abstrakt formuliert, jedes Σ_j in einem Kasten (in einer Schachtel) K_j eingeschlossen, welcher gegenüber äußeren Einwirkungen undurchlässig ist. Alle K_j werden in einem großen Kasten $\bar{K}$ eingeschlossen. Wir können diese Σ_j als Moleküle eines Gases in $\bar{K}$ auffassen, so wie dies in der Physik bei der Mischung chemisch differenter Gase üblich ist, und dann die Gesetze der Thermodymamik anwenden.

Kehren wir zu unserem System $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_s$ zurück und definieren wir als Energie des Systems

$$E = E_1 + \cdots + E_s$$

und als Entropie S, welche wir als Mengenfunktion auf $\Sigma_1 \times \cdots \times \Sigma_s$ auffassen:

Sind $A_1, \ldots, A_s$ quadrierbare Mengen in $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_s$, so sei

$$S(A_1, \ldots, A_s) = \sum_{j=1}^{s} \lg \int_{A_j} \rho_j(x_j)\, \mathrm{d}x_j\,.$$

Es ist also

$$S(A_1, \ldots, A_s) = \log \int_{A_1} \cdots \int_{A_s} \rho_1(x_1)\rho_s(x_s)\, \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_s\,.$$

Wir können $\bar{K}$ in ein Wärmebad mit Temperatur T geben, die freie Energie $U = E - TS$ und dann die Gesetze der Thermodynamik anwenden.

Anmerkungen

Anmerkung 1 zu §1 Formel (20).

Es sei f von beschränkter Variation $V(f)$, dann ist also

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f(a_k t + b_k) - \int_E f(x)\, \mathrm{d}x\right| \leq V(f)C\Big(\frac{1}{t} + D_N^\rho t^2\Big)\,.$$

Es sei jetzt

$$f(x) = g(\cos x, \sin x)\,.$$

Es ist dann

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} g\big(\cos(a_k t + b_k), \sin(a_k t + b_k)\big) - \int_0^1 g(\cos t, \sin t)\, \mathrm{d}t\right|$$

$$\leq \operatorname{Max} \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2}\, C\left(\frac{1}{t} + D_N^\rho t^2\right)\,.$$

Es sei jetzt $h(z)$ eine analytische Funktion in einem Gebiet, welches den Einheitskreis enthält, dann ist also, wenn $z_k = \mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}(a_k t + b_k)}$,

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} h(z_k) - \int_E h(z)\,\mathrm{d}z \right| \leq \operatorname{Max} |h'(z)| C \left(\frac{1}{t} + D_N^{\rho} t^2 \right) .$$

Man kann allgemeine Kurvenintegrale über den Einheitskreis approximieren und damit Kurvenintegrale in der z-Ebene berechnen.

Wir wollen noch folgende wichtige Bemerkung zu den Entwicklungen in §1 machen:

Wenn man die betrachtete Folge um ein additives differenzierbares Glied $F(t)$ erweitert, welches zugleich mit ihrer Ableitung an der Stelle 0 verschwindet, so hat die neue Folge $a_k \cdot t + b_k + F(t)$ die gleichen Anfangsbedingungen a_k, b_k an der Stelle $t = 0$, da F von a_k und b_k nicht abhängt. So wird die neue Folge bei großem t wieder gleichverteilt. Ein wichtiges Beispiel ist

$$F(t) = \frac{K}{2} t^2 ,$$

wenn K eine Konstante ist, also eine konstante Kraft K wirkt (Beispiel freier Fall).

Anmerkung 2 zu §1 Formel (20).

Wir wollen diese Formel an einem Beispiel, das auch an sich interessant ist, darlegen.

Wir betrachten im Einheitsintervall E ein Teilintervall $A = \langle 0, \alpha \rangle$, mit $\alpha = \frac{1}{L}$, wo L eine Zahl > 1 ist. Weiter sei ε gleich $(4L^2)^{-1}$. Es gibt dann bekanntlich eine unendlich oft differenzierbare Funktion Φ auf E mit folgenden Eigenschaften:

Es ist in A stets $\Phi(x) = 1$. Im Intervall $B = \langle \alpha + \varepsilon, 1 \rangle$ dessen Länge gleich $1 - (\alpha + \varepsilon)$ ist, ist sie stets Null und im Restintervall K: $\langle \alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon \rangle$ von der Länge 2ε gilt sicher, wie auch in E selbst. Es ist also für $0 \leq \Phi(x) \leq 1$

$$\lambda(\Phi) = \int_E \Phi(x)\,\mathrm{d}x \geq \alpha - \varepsilon$$

und

$$\lambda(\Phi) \leq \alpha + \varepsilon .$$

Wir bilden uns nun die Funktion auf E:

$$\Psi = L\Phi + \varepsilon .$$

Es ist dann Ψ im Intervall A gleich $L + \varepsilon$ und im Intervall B gleich ε, sonst liegt sie zwischen ε und $L + \varepsilon$.

Ist

$$\lambda(\Psi) = \int_E \Psi(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

dann ist, wie unmittelbar aus den Eigenschaften von Ψ hervorgeht,

$$L(\alpha - \varepsilon) \le \lambda(\Psi) \le L\alpha + 2\varepsilon\,.$$

Da $L\alpha = 1$ ist, so ist also

$$1 - \frac{1}{4L} \le \lambda(\Psi) \le 1 + \frac{2}{L}\,.$$

Wir bilden uns nun die Dichte

$$\rho(x) = \frac{\Psi(x)}{\lambda(\Psi)}\,.$$

Es ist in A

$$\rho(x) \ge L - \frac{1}{2L}$$

und in B

$$\rho(x) \le \frac{1}{L}\,.$$

Wir konstruieren uns nun in E^2 eine gleichverteilte Doppelfolge $\omega = \left(a_{kN}, b_{kN}\right)$ mit der Dichte $\rho \cdot \rho_2$, wo ρ_2 noch eine beliebige Dichte sein kann, mit Hilfe einer gleichverteilten Folge (x_k, y_k) mit Dichte 1 und Diskrepanz D_N durch die Formeln ([] Gaußklammer)

$$a_{kN} = \frac{1}{N}\sum_{L=1}^{N}\left[1 + x_k - \int_0^{x_L} \rho_2(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right],$$

$$b_{kN} = \frac{1}{N}\sum_{L=1}^{N}\left[1 + y_k - \int_0^{x_L} \rho(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right].$$

Es gilt dann für die Diskrepanz D_N^* der Folge $\left(a_{bN}, b_{bN}\right)$

$$D_N^* \le C_1 D_N^{\frac{1}{3}}\,,$$

wo $C_1 = \mathrm{Max}(\rho + \rho_2)$ in E^2 ist.

Es ist $\mathrm{Max}\,\rho \le L + \alpha$. Es steht uns ρ_2 zur Verfügung. Wir wählen jetzt $\rho_2 = 1$ (obwohl die Fälle $\rho_2 > 1$ und $\rho_2 < 1$ interessant sind). Es ist dann die Diskrepanz der Omegafolge (so wollen wir sie nennen)

$$\hat{\omega}_N = \left(a_{kN}t + b_{kN}\right),$$

$$\hat{D}_N(\hat{\omega}_N) \le C_2\left(\frac{1}{t} + D_N^* t^2\right),$$

wo bei unserer Wahl von ρ_2

$$D_N^* \leq (L+1) D_N^{\frac{1}{3}}.$$

Wir betrachten jetzt die relative Häufigkeit

$$H_1(A,\omega) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \iota_A(b_{kN})$$

der Folge (b_{kN}). Es ist

$$H_1(A,\omega_N) = \int_A \rho(x)\,\mathrm{d}x + \vartheta D_N^*.$$

Wir wollen, um eine qualitative Übersicht zu gewinnen, mit $N \to \infty$ gehen, dann ist

$$\overline{\lim_{N\to\infty}}\, H_1(A,\omega_N) = \int_A \rho(x)\,\mathrm{d}x \geq 1 - \frac{1}{2L}$$

und vergleichen sie mit der Häufigkeit

$$H_2(A,\hat{\omega}_N) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \iota_A(a_k t + b_k) = \int_A \mathrm{d}x + \vartheta \hat{D}_N(\hat{\omega}).$$

Es ist

$$\overline{\lim_{N\to\infty}}\, H_2 \leq \frac{1}{L} - \varepsilon.$$

Es wird also für großes N

$$\overline{\lim}\, \frac{H_2(A,\hat{\omega}_N)}{H_1(A,\omega_N)} \leq \frac{1}{L}.$$

Es wird also

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} \left(-\lg \frac{H_2}{H_1} \right) \geq \lg L = \frac{C_1}{t}.$$

Betrachten wir jetzt

$$\frac{H_2(B,\hat{\omega}_N)}{H_1(B,\omega_N)},$$

so erhalten wir entgegengesetzt

$$\overline{\lim} \left(-\lg \frac{H_2(B,\hat{\omega}_N)}{H_1(B,\omega_N)} \right) \leq -\lg \left(1 - \frac{1}{2L} \right) = \frac{1}{2L} + O\left(\frac{1}{L^2} \right) + \frac{C_1}{t}.$$

Im Intervall A nimmt also die Entropie zu, im Intervall B nimmt die Entropie ab.

Man kann jetzt die Omegafolge als fast gleichverteilte Folge benutzen, um damit Folgen (a_{kN}, b_{kN}) mit Dichte ρ und größerer Diskrepanz zu konstruieren, indem man für t einen festen großen Wert t_0 wählt.

Das System steht also im (thermodynamischen) Ungleichgewicht. E. Schrödinger bezeichnet

$$+\lg \frac{H_2}{H_1},$$

welche bei uns im Intervall B positiv ist, als Negentropie.

Man sieht, wie man die Konstruktion verallgemeinern kann, so daß statt nur einem Berg und nur einem Tal der Dichte ρ, beliebig viele Berge und beliebig viele Täler (aber nur endlich viele) auftreten. Die Konstruktion erfordert, wie man an den Formeln sieht, N^2 Energieeinheiten.

Anmerkung 3 zu §5.

Wir können so wie schon in Anmerkung 1 die Formel Koksma-Hlawka anwenden.

Ist f von beschränkter Variation $V(f)$ in E^s, so gilt

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f\left(a_k^1 t + b_k^1, \dots, a_k^s t + b_k^s\right) = \int_{E^s} f(x_1, \dots, x_s)\,\mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_s + \text{Fehler},$$

wo

$$|\text{Fehler}| \le V(f)C\left(\frac{1}{t} + D_N^\rho t^{2s}\right).$$

Anmerkung 4 zu §5.

Es gibt noch eine andere Verallgemeinerung von §1, indem wir eine Linearform

$$L(t_1, \dots, t_s) = a_1 t_1 + \dots + a_s t_s + a_0$$

betrachten und es sei $\left(a_1^k, \dots, a_s^k, a_0^k\right)$ gleichverteilt zur Dichte $\rho = \rho_1 \dots \rho_s \rho_0$ mit Diskrepanz D_N^ρ.

Wir brauchen nur wieder das Integral

$$\int_{E^{s+1}} \mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\,hL(t_1,\dots,t_s)}\,\rho_1 \dots \rho_s \rho_0\,\mathrm{d}a_0 \dots \mathrm{d}a_s$$

studieren. Ist $h \neq 0$, so ist dieses Integral gleich

$$\prod_{j=0}^{s} \int_E \rho_j\,\mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\,h a_j t_j}\,\mathrm{d}a_j.$$

Ist $t_j \neq 0$, so ist das zugehörige Integral von der Größenordnung

$$\frac{C}{|h|t_j}.$$

Es wird

$$D_N \leq \frac{1}{M} + \sum \frac{1}{|h|^2} \operatorname{Max}\left(\frac{1}{|h_1|}, \ldots, \frac{1}{|h_s|}\right) + D_N^\rho \operatorname{Max}|t_j|^{s+1},$$

also ist die Folge

$$(a_1^k t_1 + \cdots + a_s^k t_s + a_0^k)$$

gleichverteilt mit einer Diskrepanz

$$D_N \leq \frac{1}{M} + \operatorname{Max}\left(\frac{1}{t_j}\right) + M^{s+1} D_N^\rho .$$

Machen wir eine Anwendung: Setzen wir

$$t_1 = t,\ t_2 = t^2\ \ldots\ t_s = t^s,$$

bzw.

$$t_1 = t,\ t_2 = \frac{1}{2!}t^2,\ \ldots,\ t_s = \frac{1}{s!}t^s,$$

dann wird die Folge

$$L_1(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_s t^s,$$

bzw.

$$L_2(t) = a_0 + \frac{a_1}{1!}t + \frac{a_2}{2!}t^2 + \cdots + \frac{a_s}{s!}t^s .$$

Die zugehörige Folge

$$L_1(t,k) = a_0^k + a_1^k t + \cdots + a_s^k t^s,$$

bzw.

$$L_2(t,k) = a_0^k + \frac{a_1^k}{1!}t + \cdots + \frac{a_s^k}{s!}t^s$$

wird also gleichverteilt zur Dichte 1, wenn $(a_0^k \ldots a_s^k)$ gleichverteilt zur Dichte ρ ist mit Diskrepanz

$$D_N \leq C\left(\frac{1}{t} + t^{s+1} D_N^\rho\right) .$$

Wir können auch Interpolationspolynome $\Phi(t)$ an den Stellen $j = 0, 1, \ldots, s$

$$t_j = t_0 + j_k$$

in E aufstellen, wobei

$$\Phi(0) = a_0^k,\ \Phi(1) = a_1^k,\ \ldots,\ \Phi(s) = a_s^k .$$

Setzen wir nämlich für $r = 1, \dots, s$

$$\Delta^r a_l^k = \sum_{v=0}^{r} \binom{r}{v} (-1)^v a_{r-v+l}^k ,$$

z.B.

$$\Delta^1 a_l^k = a_{l+1}^k - a_l^k , \qquad \Delta^2 a_l^k = a_{l+2}^k - 2a_{l+1}^k + a_l^k ,$$

so sind diese Folgen wieder gleichverteilt zur Dichte ρ, dann leistet das Polynom

$$\Phi(t) = a_0^k + \frac{t - t_0}{1!} \Delta_{a_0}^k + \dots + \frac{(t - t_0) \dots (t - t_{s-1})}{s!} \Delta^s a_0^k$$

das Gewünschte.

Wir können noch folgende Verallgemeinerung von §5 vornehmen.

Es sei A die (s,t)-Matrix

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{t1} & \dots & a_{ts} \end{bmatrix}$$

dann bilden wir uns die Matrix

$$Ax + b , \tag{$*$}$$

wobei

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_t \end{bmatrix} , \qquad b = \begin{bmatrix} b_1 \dots b_t \end{bmatrix} ,$$

dann können wir uns die Folge bilden $(k = 1, \dots, N)$

$$(A^k, b^k) = \left(a_{11}^k, \dots, a_{ts}^k, b_j^k \right) .$$

Setzen wir weiter voraus, daß diese Folge gleichverteilt zur Dichte

$$\rho = \rho_{11} \dots \rho_{ts} \rho_1 \dots \rho_t$$

ist, wo also jedem Index ik der Matrix A und jedem Index j von b eine Dichte zugeordnet ist, dann ist die Folge

$$(A^k x + b^k)$$

gleichverteilt zur Dichte 1, wenn die $x_1, \dots, x_t$ genügend groß sind.

Es gilt daher, wo $h = (h_1, \dots, h_s)$

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}\, h^*(A^k x + b^k)} - \int_{E^L} \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}\, h(A\xi + b)} \rho \, \mathrm{d}\xi_1 \dots \mathrm{d}\xi_L \right| \le D_N^\rho ,$$

wo

$$L = (s+1)t$$

und alles geht wie vorher, es ist nur ETK von Dimension L anzuwenden.

Es ist $(*)$ nichts anderes als ein System von t Linearformen ($v = 1, \dots, t$)

$$L_v(a, x) = L_v(b_v, a_{v1}, \dots, a_{vs}, x_1, \dots, x_s)$$

in den Variablen $x_1, \dots, x_s$, wo b_v das v-te Element aus b und $a_{v1}, \dots, a_{vs}$ die Elemente der v-ten Zeile der Matrix A sind.

Setzen wir die Glieder $a^k = \left(b^k, a^k_{v1}, \dots, a^k_{vs}\right)$ der zur Dichte ρ gleichverteilten Folge ein, so schreiben wir kurz

$$L_v = (a, x, k) = L_v\left(a^k, x\right) .$$

Eine Anwendung:

Jedes Polynom vom Grad g in den u Variablen $\xi_1, \dots, \xi_u$ ist ein lineares Kompositum der Potenzprodukte $\xi_1^{j_1} \cdot \ldots \cdot \xi_u^{j_u}$, wo $j_1, \dots, j_u$ nicht negative ganze Zahlen mit $j_1 + \cdots + j_u \leq g$ sind. Die Anzahl n dieser Potenzprodukte ist

$$\binom{u+g}{u} .$$

Nehmen wir nun $s = n$ und für $x_1, \dots, x_s$ in irgendeiner Reihenfolge die n Potenzprodukte, so geht das System der t Linearformen L_v in ein System von t Polynomen $P_v(a, \xi)$ vom Grade g in den u Variablen $\xi_1, \dots, \xi_u$ über. Setzen wir in diesen Polynomen für a die Glieder a^k der gleichverteilten Folge (a^k) zur Dichte ρ ein

$$P_v\left(a^k, \xi\right) ,$$

so ist die Folge

$$\left(P_1(a^k, \xi), \dots, P_t(a^k, \xi)\right)$$

für genügend große $\xi_1, \dots, \xi_u$ gleichverteilt im klassischen Sinne, also mit der Dichte 1 und definiert eine algebraische Mannigfaltigkeit; für $g = 1$ ist es eine Schar von Hyperebenen.

Das zugehörige Resultantensystem besteht aus Polynomen $R(a)$ und es strebt

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} R(a^k) \quad \text{gegen} \quad \int\limits_{E^{(n+1)t}} R(a)\, da .$$

Für $g = 1$, $t = u + 1$ und $s = u + 1$ ist

$$R = \operatorname{Det}(A, b) .$$

Es sei noch der wichtige Fall von Resultanten von zwei Polynomen angeführt. Für $u = 1$, $s = g + 1$, $t = 2$ ist

$$
\begin{aligned}
P_1(\xi) &= b_1 + a_{11}\xi_1 + \cdots + a_{1g}\xi_g \,, \\
P_2(\xi) &= b_2 + a_{21}\xi_1 + \cdots + a_{2g}\xi_g \,,
\end{aligned}
$$

$$
R(p_1, p_2) = \begin{bmatrix}
b_1 & a_{11} & \cdots & a_{1g} & & & \cdots & \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 & & \cdots & & b_1 & a_{11} & \cdots & a_{1g} \\
b_2 & a_{21} & \cdots & a_{2g} & & & \cdots & \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 & & \cdots & & b_2 & a_{21} & \cdots & a_{2g}
\end{bmatrix}
\begin{array}{l}
\\ g \text{ Zeilen} \\ \\ \\ g \text{ Zeilen} \\ \\
\end{array}
$$

Ist

$$S \geq (2g)^u(u+1) \,,$$

so sind die $u + 1$ Polynome

$$P_1(\xi_1 \ldots \xi_u), \ldots, P_{u+1}(\xi_1 \ldots \xi_u)$$

algebraisch abhängig, d.h. es gilt identisch in $\xi_1 \ldots \xi_u$ die Beziehung

$$\sum C(l_1, \ldots, l_{u+1}) P_1^{l_1}(\xi_1 \ldots \xi_u) \ldots P_{u+1}^{l_{u+1}}(\xi_1 \ldots \xi_u) = 0 \,,$$

wobei sich die Summe über alle nichtnegativen ganzen Zahlen $l_1 \ldots l_{u+1}$ mit

$$l_1 + \cdots + l_{u+1} \leq s$$

erstreckt (vgl. z.B. O. Perron, Algebra I, Seite 128, Satz 56, Formel (4)).

Die Theorie der Resultanten liefert für s kleinere, genauere Schranken, vgl. z.B. das oben genannte Buch von O. Perron oder z.B. Van der Waerden, Algebra II oder das Buch von van der Waerden, Algebraische Geometrie.

Der Verfasser hofft, auf diese Verbindung von Algebra und Gleichverteilung noch zurückkommen zu können.

Auf einen Nachteil dieser Bemerkungen soll noch hingewiesen werden: Die Polynome P_v haben alle den gleichen Grad. Dem kann man leicht nachhelfen, indem die Zeilen der Matrix A nicht ganz ausfüllt, d.h. in der zugrundegelegten gleichverteilten Folge Glieder wegläßt.

Anmerkung 5 zu §5 Formel (18).

Wir wollen diese Formel in der Gestalt

$$\hat{D}_N(\hat{\omega}_N) \leq C\left(t^{-\lambda} + \tilde{D}_N^s\, t^{-\frac{1}{\mu}}\right) \,,$$

wo $\lambda = s(\mu - 1) + 1$, $\mu = \frac{s}{\lambda}$ ist, schreiben.

Wir schreiben jetzt s statt L, um mit Anmerkung 2 übereinzustimmen, wo wir die Folge (a_{kN}, b_{kN}) konstruiert haben. Wir nehmen wieder $\rho_2 = 1$ an. Es seien J_1 und J_2 Teilintervalle in E, wobei J_1 Teilintervall von J_2 ist. Wir betrachten

$$\hat{J}_1 = J_1 \times \cdots \times J_1 , \qquad \hat{J}_2 = J_2 \times \cdots \times J_2 ,$$

die Produkte s-mal genommen.

Es sei

$$H_2 = H(\hat{J}_2, b) = \frac{1}{N^s} \sum_{k_1 \ldots k_s}^{N} \iota\left(\hat{J}_2, b_{k_1 N}, \ldots, b_{k_s N}\right)$$

und

$$H_1 = H\left(\hat{J}_1, \hat{\omega}_N\right) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \iota\left(\hat{J}_1, ta_{kN} b_{kN}, \ldots, ta_{lN} \beta_s + b_{kN}\right) .$$

Es ist, wenn auch $\rho = 1$ ist,

$$H_2 = \lambda(J_2)^s + \vartheta D_N ,$$

allgemein $\left(\int \rho \, \mathrm{d}x\right)^s + \vartheta D_N$ und

$$H_1 = \left(\lambda(J_1)\right)^s + \vartheta \hat{D}_N .$$

Um wieder die Übersicht zu behalten, wollen wir gleich N gegen unendlich gehen lassen. Es ist, wenn $\rho = 1$,

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{H_1}{H_2} = \frac{\lambda^2(J_1) + \frac{C}{t^\lambda}}{\lambda^2(J_2)} .$$

Es ist also

$$-\lg \overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{H_1}{H_2} = -s \lg \frac{\lambda(J_1)}{\lambda(J_2)} + O\left(\frac{1}{t^\lambda}\right) .$$

Betrachten wir $J_3 = J_2 - J_1$, so erhalten wir für

$$H_3 = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \iota(J_3, \hat{\omega}_N)$$

und

$$\lim_{N\to\infty} \log \frac{H_3}{H_1} = -s \lg \left(1 - \frac{\lambda(J_1)}{\lambda(J_2)}\right) + O\left(\frac{1}{t^\lambda}\right) .$$

Es nimmt also in J_1 die Entropie zu, im Komplement J_3 ab. Interessant ist wieder der Fall $\lambda(J_1) = \frac{1}{2}\lambda(J_2)$. Die Entropie wird also

$$-s \log \frac{1}{2} = s \log 2 ,$$

also s Bit.

REFERENCES

[CAR01] CARTOVITCH, M.: *Sul calcolo effetivo del periodo del moto pertubato in un caso tipico di prima approssimazione*, Atti Acad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei Ser. VI **27** (1938), 65–70.

[DIR01] DIRSCHMID, H. J.: *Tensoren und Felder*, Springer, Wien, 1996.

[EIN01] EINSTEIN, A.: Verhandlungen der deutschen physikalischen Gesellschaft **16** (1914), 820–825 (Zitiert nach [NEU01]).

[ENG01] ENGEL, E. M. R. A.: *Road to Randomness in Physical Systems.* Lecture Notes in Statist. 71, Springer-Verlag, New York, 1992.

[FRE01] FREUDENTHAL, H.—STEINER, H. G.: *Aus der Geschichte der Wahrscheinlichkeitstheorie und mathematischen Statistik.* In: Grundzüge der Mathematik für Lehrer an Gymnasien sowie für Mathematik in Industrie und Wirtschaft Bd. IV, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1966.

[HLA01] HLAWKA, E.: *Über die willkürlichen Funktionen von Poincaré.* Acta Hist. Leopoldina, (To appear).

[HLA02] HLAWKA, E.: *Theorie der Gleichverteilung*, Bibl. Inst. Mannheim, Mannheim, 1979.

[HLA03] HLAWKA, E.: *Über einige Reihen, welche mit den Vielfachen von Irrationalzahlen zusammenhängen*, Acta Arith. **37** (1980), 285–306.

[HLA04] HLAWKA, E.: *Über einige Reihen, welche mit den Vielfachen von Irrationalzahlen zusammenhängen*, Österreich. Akad. Wiss. Math.-Natur. Kl. Sitzungsber. II **190** (1981), 33–61.

[HLA05] HLAWKA, E.: *Buffons Nadelproblem und verwandte Probleme behandelt mit der Theorie der Gleichverteilung I*, Geom. Dedicata **41** (1991), 1095–116.

[HOP01] HOPF, E.: *On Causality, Statistics and Probability*, J. Math. Phys. **13** (1934), 51–102.

[HOP02] HOPF, E.: *Über die Bedeutung der willkürlichen Funktionen für die Wahrscheinlichkeitstheorie*, Jahresber. Deutsch. Math.-Verein. **46** (1936), 179–195.

[KOK01] KOKSMA, J. F.: *Diophantische Approximationen*, Springer, Berlin, 1936.

[KRO01] KROÖ, J.: *Über den Fundamentalsatz der statistischen Mechanik*, Ann. Physik **34** (1911), 907–935.

[NEU01] NEUMANN, J. VON: *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*, Springer, Berlin, 1932.

[POI01] POINCARÉ, H.: *Calcul des Probabilités* (G. Carré, ed.), Cours de la Faculté des Sciences de Paris, Paris, 1896.

[POI02] POINCARÉ, H.: *Réflexions sur la Theorie Cinétique des Gaz*, J. Phys. (1906), 592–596.

[SEX01] SEXL, R. U. (Hrsg.): *L. Boltzmann. Gesammelte Werke, Bd. 1. Vorlesungen über Gastheorie I & II*, Vieweg & Sohn, Wiesbaden, 1964 (Ausgabe 1981, S. 157).

[URB01] URBAN, F. M.: *Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung und der Theorie der Beobachtungsfehler*, B.G. Teubner, Leipzig, 1923.

Received November 10, 1997

Institut für Technische Mathematik
Technische Universität Wien
Wiedner Hauptstraße 8-11/1141
A-1040 Wien
AUSTRIA