Mathematica Slovaca

Ján Mozer

О некоторых бесконечных классах итерационных дзета-функций

Mathematica Slovaca, Vol. 46 (1996), No. 2-3, 181--202

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/136668

Math. Slovaca, **46** (1996), No. 2–3, 181–202

Mathematica Slovaca

Dedicated to Professor Tibor Šalát
on the occasion of his 70th birthday

О НЕКОТОРЫХ БЕСКОНЕЧНЫХ КЛАССАХ ИТЕРАЦИОННЫХ ДЗЕТА-ФУНКЦИЙ

Ян Мосер

(*Communicated by Stanislav Jakubec*)

ABSTRACT. In this paper, some class of the iteration zeta-functions is defined. With every iteration zeta-function some multiplicative perturbation of the Euler product is connected.

В связи с тождеством Эйлера

$$\zeta(s)=\prod_p \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}\,, \qquad s=\sigma+\mathrm{i}t\,,\ \ \sigma>1\,,$$

проф. А. А. Карацуба заметил следующее: По-видимому, тождество Эйлера и «заставляет» нули $\zeta(s)$ с $t\neq 0$ «попадать» на прямую $\sigma=\frac{1}{2}$ (см. [1; стр. 495]). Это замечание содержит в себе разные вопросы. Мы остановимся на вопросе об «устойчивости» множества нулей и кратностей нулей функции $\zeta(s)$ относительно «мультипликативных возмущений» произведения Эйлера в ограниченной области s (локальный подход).

В предлагаемой работе на некотором прямоугольнике $\mathscr{P}=\mathscr{P}(T)$, частично налегающем на критическую полосу, построен бесконечный класс $\mathbb{K}_0=\mathbb{K}_0(\mathscr{P})$ аналогов дзета-функций Римана – итерационных

AMS Subject Classification (1991): Primary 11M06.
Key words: approximate functional equation, iteration, zero of $\zeta(s)$, multiplicity of the zero of $\zeta(s)$.

дзета-функций – для всех достаточно больших $T > 0$. Вот основные свойства этих функций:

(а) любой итерационной дзета-функции соответствует мультипликативное возмущение произведения Эйлера ($s \in \mathscr{P}$, $\sigma > 1$)

$$\begin{gathered}\Lambda\left[s, g_1(s), \ldots, g_n(s), \zeta(s)\right] \cdot \prod_p \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}} \neq 0\,, \\ \Lambda = \prod_{m=1}^{M} \left\{1 + h_m(s)\right\}, \qquad |h_m(s)| < 1\,, \\ h_m(s) = h_m\left[s, g_1(s), \ldots, g_n(s), \zeta(s)\right],\end{gathered} \tag{1}$$

где $g_1(s), \ldots, g_n(s)$ – любые аналитические функции входящие в некоторый бесконечный класс,

(б) множество, состоящее из нулей и кратностей нулей любой итерационной дзета-функции, совпадает с аналогичным множеством для $\zeta(s)$, $s \in \mathscr{P}$.

Замечание 1. Свойства (а), (б) имеют место независимо от гипотезы Римана.

Далее отметим, что операция, сопоставляющая любому конечному количеству элементов класса $\mathbb{K}_0$ их «комплексное среднее геометрическое», сохраняет свойства (а), (б).

С другой стороны, операция, сопоставляющая любому конечному количеству элементов класса $\mathbb{K}_0$ их линейную комбинацию, нарушает свойства (а), (б). Дело в том, что для некоторых линейных комбинаций, кроме нулей $\zeta(s)$, $s \in \mathscr{P}$, появляются новые нули в любой наперед указанной части $\mathscr{P}$. Конечно, это приводит и к нарушению гипотезы Римана для соответствующих линейных комбинаций.

Наступает ли в процессе построения расщирений класса $\mathbb{K}_0(\mathscr{P})$ сохраняющих свойства (а), (б), такой «момент», когда необходимо использовать гипотезу Римана (ср. Замечание 1) или гипотезу, что нули $\zeta(s)$, $s \in (\mathscr{P})$ – простые?

1. Формулировка теоремы

Основой для построения итерационных дзета-функций является приближенное функциональное уравнение Римана-Харди-Литтлвуда

$$\begin{gathered}\zeta(s)=\sum_{n\leqq x}\frac{1}{n^s}+\chi(s)\sum_{n\leqq y}\frac{1}{n^{1-s}}+R_0(s)\,, \qquad t>0\,,\\ R_0(s)=O(x^{-\sigma})+O\big(t^{\frac12-\sigma}y^{\sigma-1}\big)\,, \qquad 2\pi xy=t\,,\ \ x=y=\sqrt{\frac{t}{2\pi}}=t_1\,,\end{gathered} \tag{2}$$

справедливое в любой фиксированной полосе $\sigma\in\langle\sigma_1,\sigma_2\rangle$ (см. [3; стр. 48, 55], ср. [2; стр. 85]), рассматриваемое в прямоугольнике

$$\begin{gathered}\mathscr{P}=\mathscr{P}(T)=\left\{s:\ \sigma\in\left\langle\tfrac12,\sigma_0\right\rangle,\ t\in\langle T,T+\sigma_0\rangle\right\},\\ \sigma_0=K\,,\qquad K=P^{\varepsilon}\,,\qquad P=\sqrt{\frac{T}{2\pi}}\,,\end{gathered} \tag{3}$$

где $0<\varepsilon$ – сколь угодно малое число.

Пусть $\mathbb{D}=\mathbb{D}(\mathscr{P})$ обозначает бесконечный класс всех аналитических матриц $\|g(s)\|$, $s\in\mathscr{P}$, удовлетворяющих условию

$$\begin{gathered}|g_{rn}(s)|\leqq\frac{1}{A_0}\frac{\mathrm{e}^{-1/K}}{\sigma_0\omega}\sqrt{P}\,,\\ r=1,\dots,N\,,\quad n\in\langle\mathrm{e}^{-1/K}P,P)\,,\quad N\geqq\omega=\omega(T)\,,\end{gathered} \tag{4}$$

где $0<\omega(T)$ – функция, сколь угодно медленно возрастающая к ∞ при $T\to\infty$ (например $\omega=\log\log T,\log\log\log T,\dots$) и $0<A_0$ – некоторая постоянная.

Исходя из (2) мы построим следующие бесконечные классы функций (полные итерации):

$$\begin{aligned}&\zeta^{\ell}_{(\ell+1)N}(s)\\ &=\zeta^{\ell}_{(\ell+1)N}\big[s,\|g^{\ell}(s)\|,\dots,\|g^{0}(s)\|,\zeta(s)\big]\\ &=C(s)+\sum_{\mathrm{e}^{-1/K}P\leqq n<P}\left(\frac{1}{n^s}\prod_{j=1}^{\ell+1}\left\{1+\frac{W^{j-1}_{Nn}(s)}{n}\right\}^{-s'}+\chi(s)\prod_{j=1}^{\ell+1}\left\{1+\frac{W^{j-1}_{Nn}(s)}{n}\right\}^{s'}\right),\\ &\qquad \ell=0,1,\dots,L\,,\quad L=\sqrt{\omega(T)}\log K\,,\qquad s'=s-\mathrm{i}T\,,\quad s\in\mathscr{P}\,,\end{aligned} \tag{5}$$

где

$$W^{k}_{Nn}(s)=\frac{1}{N}\sum_{\ell=1}^{N}g^{k}_{qn}(s)\zeta^{k}_{kN+q-1}(s)\,,\qquad k=0,1,\dots,\ell\,,\ \ \zeta^{0}_{0}(s)=\zeta(s)\,,$$

– компоненты вектора

$$\bar{W}_N^k(s) = \bar{W}_N^k\left[s, \|g^k(s)\|, \dots, \|g^0(s)\|, \zeta(s)\right], \qquad \|g^k(s)\| \in \mathbb{D}, \quad k = 0, 1, \dots, \ell,$$

и далее, зависимость функции от матрицы означает зависимость от элементов этой матрицы, символ $\|g^k(s)\|$ означает, что элементы любой фиксированной матрицы $\|g(s)\| \in \mathbb{D}$ принимают участие в определении итерации $\zeta^k_{kN+q-1}(s)$ порядка k.

Явно отметим, что в (2) «возмущаются» только члены

$$\sum_{e^{-1/K}P \leqq n < P} \left(\frac{1}{n^s} + \frac{\chi(s)}{n^{1-s}}\right),$$

т.е., что $C(s)$ в (5) означает невозмущенные члены входящие в (2).

Замечание 2. Конечно, можно построить множество моделей, в которых возмущаются другие (даже все) члены – комплексные осцилляторы Римана с конечным «временем жизни» – входящие в главную часть формулы (2), кроме членов 1, $\chi(s)$ соответствующих значению $n = 1$. Выбор основной области $\mathscr{P}(T)$ также допускает иные возможности.

Справедлива следующая теорема:

Теорема. *Для любой фиксированной последовательности матриц $\left\{\|g^k(s)\|\right\}_{k=0}^{\ell}$, $\|g^k(s)\| \in \mathbb{D}$, $s \in \mathscr{P}$, $\ell = 0, 1, \dots, L$, и для всех достаточно больших $T > 0$ имеет место*

$$\zeta^\ell_{(\ell+1)N}(s) = \Lambda^\ell_{(\ell+1)N}(s)\zeta(s), \qquad s \in \mathscr{P}, \tag{6}$$

где

$$\begin{aligned}\Lambda^\ell_{(\ell+1)N}(s) &= \Lambda^\ell_{(\ell+1)N}\left[s, \|g^\ell(s)\|, \dots, \|g^0(s)\|, \zeta(s)\right] \\ &= \prod_{j=1}^{\ell}\prod_{q_j=0}^{N-1}\left\{1 + \frac{1}{N\omega}F^j_{jN+q_j}(s)\right\},\end{aligned} \tag{7}$$

$$\ell = 0{,}1, \dots, L, \quad L = \sqrt{\omega(T)}\log K,$$

$$F^j_{jN+q_j}(s) = F^j_{jN+q_j}\left[s, \bar{g}^j_1(s), \dots, \bar{g}^j_{q_j+1}(s), \|g^{j-1}(s)\|, \dots, \|g^0(s)\|, \zeta(s)\right] = O(1), \quad s \in \mathscr{P}, \tag{8}$$

и $F^j_{jN+q_j}$ – аналитическая функция своих аргументов (компоненты $g^j_{1n}(s)$ составляют вектор $\bar{g}^j_1(s), \dots$ и, в случае $j = 0$, последовательность $\|g^{j-1}(s)\|, \dots, \|g^0(s)\|$ – пустая).

Замечание 3. Так как (см. (7), (8))

$$\Lambda^\ell_{(\ell+1)N}(s) \neq 0, \qquad s \in \mathscr{P}, \tag{9}$$

то (6) представляет собой нелинейное «комплексное преобразование подобия» функции $\zeta(s)$, $s \in \mathscr{P}$.

2. Следствия из теоремы

Из (6) в силу (9) немедленно получается

Следствие 1. *Функции*

$$\zeta(s)\,, \quad \zeta^{\ell}_{(\ell+1)N}\big[s, \|g^{\ell}(s)\|, \dots, \|g^{0}(s)\|, \zeta(s)\big]\,; \qquad s \in \mathscr{P}\,, \;\; \ell = 0, 1, \dots, L,$$

имеют совпадающие множества нулей и множества кратностей этих нулей для всех достаточно больших $T > 0$.

Действительно. Если $\varrho = \beta + \mathrm{i}\gamma$ – нуль кратности $n(\varrho)$ функции $\zeta(s)$, $s \in \mathscr{P}$, то соотношения

$$\zeta(\varrho) = \zeta'(\varrho) = \dots = \zeta^{(n(\varrho)-1)}(\varrho) = 0\,, \qquad \zeta^{(n(\varrho))}(\varrho) \neq 0$$

в силу формулы Лейбница и (6), (9) переходят в такие же соотношения для $\zeta^{\ell}_{(\ell+1)N}(s)$, $s \in \mathscr{P}$.

Делее из (6) в силу (7) и произведения Эйлера получается

Следствие 2. *Для* $s \in \mathscr{P} \cap \{1 < \sigma\}$ *при всех достаточно больших* $T > 0$ *имеет место аналог произведения Эйлера*

$$\zeta^{\ell}_{(\ell+1)N}(s) = \prod_{j=0}^{\ell} \prod_{q_j=0}^{N-1} \Big\{1 + \frac{1}{N\omega} F^{j}_{jN+q_j}(s)\Big\} \prod_{p} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} \neq 0\,.$$

Так как

$$F^{j}_{jN+q_j}(s) = \alpha^{j}_{jN+q_j}(\sigma, t) + \mathrm{i}\beta^{j}_{jN+q_j}(\sigma, t)\,,$$

то (см. (7))

$$\begin{aligned} r^{j}_{jN+q_j}(\sigma, t) &= \Big|1 + \frac{1}{N\omega} F^{j}_{jN+q_j}(s)\Big| = 1 + O\Big(\frac{1}{N\omega}\Big)\,, \\ \varphi^{j}_{jN+q_j}(\sigma, t) &= \arg\Big\{1 + \frac{1}{N\omega} F^{j}_{jN+q_j}(s)\Big\} = \operatorname{arctg} \frac{\beta^{j}_{jN+q_j}}{N\omega + \alpha^{j}_{jN+q_j}} = O\Big(\frac{1}{N\omega}\Big) \end{aligned} \tag{10}$$

(arg – главное значение аргумента). Пусть далее

$$\Lambda^{\ell}_{(\ell+1)N}(s) = R^{\ell}_{(\ell+1)N}(\sigma, t)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Phi^{\ell}_{(\ell+1)N}(\sigma,t)}\,, \qquad s \in \mathscr{P}\,, \tag{11}$$

где

$$R^{\ell}_{(\ell+1)N} = |\Lambda^{\ell}_{(\ell+1)N}|, \qquad \Phi^{\ell}_{(\ell+1)N} = \operatorname{Arg}\Lambda^{\ell}_{(\ell+1)N}$$

– коэффициент растяжения (сжатия) модуля $\zeta(s)$ и приращение $\arg\zeta(s)$ соответственно при нелинейном комплексном преобразовании подобия (6) функции $\zeta(s)$, $s \in \mathscr{P}$.

Теперь в силу (7), (10), (11) имеем

$$\begin{aligned} R^{\ell}_{(\ell+1)N}(\sigma,t) &= \prod_{j=0}^{\ell}\prod_{q_j=0}^{N-1} r^{j}_{jN+q_j}(\sigma,t) \\ &= \exp\biggl(\sum_{j=0}^{\ell}\sum_{q_j=0}^{N-1}\log\Bigl\{1+O\Bigl(\frac{1}{N\omega}\Bigr)\Bigr\}\biggr) \\ &= \exp\Bigl\{O\Bigl(\frac{\ell}{\omega}\Bigr)\Bigr\}, \qquad \ell = 0,1,\ldots,N. \end{aligned} \tag{12}$$

Если например

$$\ell \leqq \sqrt{\omega}, \tag{13}$$

то

$$R^{\ell}_{(\ell+1)N} = 1 + O\biggl(\frac{1}{\sqrt{\omega(T)}}\biggr), \qquad s \in \mathscr{P}.$$

Значит, в случае (13) преобразование (6) допускает лишь малые растяжения (сжатия) во всех точках $\mathscr{P}(T)$ при всех достаточно больщих $T > 0$.

Аналогичным образом получаем

$$\Phi^{\ell}_{(\ell+1)N}(\sigma,t) = \sum_{j=0}^{\ell}\sum_{q_j=0}^{N-1}\varphi^{j}_{jN+q_j}(\sigma,t) = O\Bigl(\frac{\ell}{\omega}\Bigr) \tag{14}$$

и, в случае (13),

$$\Phi^{\ell}_{(\ell+1)N}(\sigma,t) = \operatorname{Arg}\bigl\{\Lambda^{\ell}_{(\ell+1)N}(s)\bigr\} = O\biggl(\frac{1}{\sqrt{\omega(T)}}\biggr) = \arg\bigl\{\Lambda^{\ell}_{(\ell+1)N}(s)\bigr\}.$$

Значит, в случае (13) преобразование (6) допускает лишь малые приращения во всех точках $\mathscr{P}(T)$ при всех достаточно больших $T > 0$.

Замечание 4. Для того чтобы преобразование (6) допускало, в принципе, возможность появления «больших» растяжений (сжатий) и приращений в некоторых точках прямоугольника $\mathscr{P}(T)$ и при некоторых сколь угодно больших $T>0$, мы сделаем например следующий выбор для ℓ:

$$\frac{L}{2} \leqq \ell \leqq L. \tag{15}$$

В этом случае (см. (7), (12), (14))

$$R^{\ell}_{(\ell+1)N}(\sigma,t) < \exp\left(\frac{\ell}{\sqrt{\omega(T)}}\right) \leqq \exp\left(\frac{L}{\sqrt{\omega(T)}}\right) = K,$$

$$\Phi^{\ell}_{(\ell+1)N}(\sigma,t) = O\left(\frac{\log K}{\sqrt{\omega(T)}}\right),$$

и, очевидно,

$$|\zeta^{\ell}_{(\ell+1)N}(s)-\zeta(s)| = |\Lambda^{\ell}_{(\ell+1)N}-1||\zeta(s)| \leqq (R^{\ell}_{(\ell+1)N}+1)|\zeta(s)| \leqq (K+1)|\zeta(s)|.$$

Замечание 5. Явно отметим, что коэффициент растяжения (сжатия) и приращение – не единственные характеристики преобразования (6). А именно, для любого $\ell = 0,1,\dots,L$ (т.е., и в обоих случаях (13), (15)) могут встретиться большие значения производной

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\zeta^{\ell}_{(\ell+1)N}\left[s,\|g^{\ell}(s)\|,\dots,\|g^{0}(s)\|,\zeta(s)\right]\\ =&\zeta(s)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Lambda^{\ell}_{(\ell+1)N}(s) + \frac{\mathrm{d}\zeta(s)}{\mathrm{d}s}\Lambda^{\ell}_{(\ell+1)N}(s),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Lambda^{\ell}_{(\ell+1)N}(s)\\ =&\frac{\partial}{\partial s}\Lambda^{\ell}_{(\ell+1)N}(s) + \frac{\partial}{\partial\zeta(s)}\Lambda^{\ell}_{(\ell+1)N}(s) + \sum_{k=0}^{\ell}\sum_{r=1}^{N}\sum_{\mathrm{e}^{-1/K}P\leqq n<P}\frac{\partial\Lambda^{\ell}_{(\ell+1)N}(s)}{\partial g^{k}_{rn}}\frac{\mathrm{d}g^{k}_{rn}(s)}{\mathrm{d}s}\end{aligned}$$

в некоторых точках $s\in\mathscr{P}(T)$ за счет множителей $\frac{\mathrm{d}g^{k}_{rn}}{\mathrm{d}s}$ и, следовательно, большие коэффициенты растяжения в этих точках при конформном преобразовании $z=\zeta^{\ell}_{(\ell+1)N}(s)$, $s\in\mathscr{P}(T)$.

Определение 1. В силу Следствий 1, 2 и Замечаний 4, 5 мы назовем любую из функций

$$\zeta^{\ell}_{(\ell+1)N}\left[s,\|g^{\ell}(s)\|,\dots,\|g^{0}(s)\|,\zeta(s)\right], \qquad s\in\mathscr{P}, \quad \ell\in\left\langle\tfrac{L}{2},L\right\rangle,$$
$$\|g^{k}(s)\|\in\mathbb{D}, \qquad k=0,1,\dots,\ell,$$

локальной итерационной дзета-функцией. Конечно, всякому фиксированному $\ell \in \left\langle \frac{L}{2}, L \right\rangle$ соответствует бесконечный класс $\mathbb{K}^\ell(\mathscr{P})$ локальных итерационных дзета-функций; полагаем (ср. Введение)

$$\mathbb{K}_0(\mathscr{P}) = \bigcup_{\ell \in \langle \frac{L}{2}, L \rangle} \mathbb{K}^\ell(\mathscr{P}) .$$

Замечание 6. Можно определить и полную аналитическую функцию, получающуюся аналитическим продолжением всех элементов любой фиксированной локальной итерационной дзета-функции $\zeta^\ell_{(\ell+1)N}(s)$, $s \in \mathscr{P}^0$, где $\mathscr{P}^0$ – внутренность прямоугольника $\mathscr{P}(T)$. Такого рода функцию естественно назвать *глобальной итерационной дзета-функцией.*

3. Класс изучаемых функций

3.1. Положим (см. (2))

$$\begin{aligned} \zeta(s) &= C(s) + Q(s) , \\ C(s) &= \sum_{n \leqq e^{-1/K} P} \left(\frac{1}{n^s} + \frac{\chi(s)}{n^{1-s}} \right) + R_1(s) , \\ R_1(s) &= \sum_{P \leqq n \leqq t_1} \left(\frac{1}{n^s} + \frac{\chi(s)}{n^{1-s}} \right) + R_0(s) , \\ Q(s) &= \sum_{e^{-1/K} P \leqq n < P} \left(\frac{1}{n^s} + \frac{\chi(s)}{n^{1-s}} \right) . \end{aligned} \tag{16}$$

Так как (см. [2; стр. 81])

$$\chi(s) = \frac{2^{s-1}\pi^s}{\Gamma(s)\cos\frac{\pi}{2}s} = \left(\frac{2\pi}{t}\right)^{\sigma - \frac{1}{2} + it} e^{i(t + \frac{\pi}{4})} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{t}\right) \right\} ,$$

т.е.,

$$\chi(s) \doteq O\left(P^{1-2\sigma}\right) , \qquad s \in \mathscr{P} , \tag{17}$$

и далее (см. (3))

$$\sum_{P \leqq n \leqq t_1} 1 = O\left(\frac{\sigma_0}{\sqrt{T}} \right) = o(1) ,$$

то для $s \in \mathscr{P}$ имеет место

$$\sum_{P \leqq n \leqq t_1} \frac{1}{n^s} = O\left(\frac{1}{\sqrt{P}}\right) = O\left(T^{-1/4}\right),$$

$$\sum_{P \leqq n \leqq t_1} \frac{\chi(s)}{n^{1-s}} = O\left(P^{1-2\sigma} \frac{1}{P^{1-\sigma}}\right) = O\left(P^{-\sigma}\right) = O\left(T^{-1/4}\right).$$

Следовательно

$$R_1(s) = O\left(T^{-1/4}\right), \qquad s \in \mathscr{P},$$

так как $R_0(s) = O\left(T^{-1/4}\right)$, $s \in \mathscr{P}$.

3.2. Вводя в $\mathscr{P}$ локальную переменную s'

$$s' = s - \mathrm{i}T = \sigma + \mathrm{i}(t - T) = \sigma + \mathrm{i}\tau, \qquad \sigma \in \left\langle \tfrac{1}{2}, \sigma_0 \right\rangle, \quad \tau \in \langle 0, \sigma_0 \rangle,$$

$Q(s)$ напишем в форме

$$Q(s) = \sum_{\mathrm{e}^{-1/K} P \leqq n < P} \left(\frac{1}{n^{\mathrm{i}T}} \, \mathrm{e}^{-s' \log n} + \frac{\chi(s)}{n^{1-\mathrm{i}T}} \, \mathrm{e}^{s' \log n} \right).$$

Если компоненты вектора $\bar{X}^0(n)$ удовлетворяют условию

$$|X_n^0(s)| \leqq \frac{n}{2}, \qquad n \in \langle \mathrm{e}^{-1/K} P, P), \quad s \in \mathscr{P},$$

то для функции $Q(s)$ «возмущенной» вектором $\bar{X}^0(s)$ имеем

$$\begin{aligned} & Q_1\left[s, \bar{X}^0(s)\right] \\ &= \sum_{\mathrm{e}^{-1/K} P \leqq n < P} \left(\frac{1}{n^{\mathrm{i}T}} \, \mathrm{e}^{-s' \log\left\{n + X_n^0(s)\right\}} + \frac{\chi(s)}{n^{1-\mathrm{i}T}} \, \mathrm{e}^{s' \log\left\{n + X_n^0(s)\right\}} \right) \\ &= \sum_{\mathrm{e}^{-1/K} P \leqq n < P} \left(\frac{1}{n^s} \left\{ 1 + \frac{X_n^0(s)}{n} \right\}^{-s'} + \frac{\chi(s)}{n^{1-s}} \left\{ 1 + \frac{X_n^0(s)}{n} \right\}^{s'} \right). \end{aligned}$$

Если теперь $\bar{X}^0(s), \bar{X}^1(s), \ldots, \bar{X}^\ell(s)$, $s \in \mathscr{P}$, удовлетворяют условиям

$$|X_n^j(s)| \leqq \frac{n}{2}, \qquad j = 0, 1, \cdots, \ell, \quad n \in \langle \mathrm{e}^{-1/K} P, P \rangle, \quad s \in \mathscr{P}, \tag{18}$$

то мы получаем (ср. (16))

$$\begin{aligned}
&\zeta^\ell(s) = \zeta^\ell\big[s, \bar{X}^0(s), \dots, \bar{X}^\ell(s)\big] = C(s) + Q_{\ell+1}(s)\,, \\
&Q_{\ell+1}(s) = Q_{\ell+1}\big[s, \bar{X}^0(s), \dots, \bar{X}^\ell(s)\big] \\
&\quad = \sum_{\mathrm{e}^{-1/K}P \leqq n < P} \left(\frac{1}{n^s} \prod_{j=0}^{\ell} \left\{ 1 + \frac{X_n^j(s)}{n} \right\}^{-s'} + \frac{\chi(s)}{n^{1-s}} \prod_{j=0}^{\ell} \left\{ 1 + \frac{X_n^j(s)}{n} \right\}^{s'} \right), \\
&\qquad s \in \mathscr{P}, \quad \ell = 0, 1, \dots, L\,.
\end{aligned} \tag{19}$$

Замечание 7. Функции типа (19) при условиях (18) и составляют класс изучаемых функций.

3.3. Справедлива следующая лемма:

Лемма 1. *Если*

$$|X_n^j(s)| \leqq \frac{\mathrm{e}^{-1/K}}{\sigma_0 \omega} P\,, \qquad j = 0, 1, \dots, \ell, \quad \ell = 0, 1, \dots, L, \quad n \in \langle \mathrm{e}^{-1/K}P, P), \quad s \in \mathscr{P}, \tag{20}$$

то, при условиях

$$\sigma_0 = K\,, \qquad L = \sqrt{\omega(T)}\log K \tag{21}$$

имеет место оценка

$$|\zeta^\ell(s)| < A_0\sqrt{P}\,, \qquad s \in \mathscr{P}, \ \ \ell = 0, 1, \dots, L\,, \tag{22}$$

где $0 < A_0$ *– постоянная.*

Замечание 8. A_0 – постоянная, входящая в условие (4).

Доказательство Леммы 1. Так как в силу (20)

$$\left| \frac{X_n^j(s)}{n} \right| \leqq \frac{1}{\sigma_0 \omega}\,, \qquad s \in \mathscr{P}, \quad n \in \langle \mathrm{e}^{-1/K}P, P), \quad j = 0, 1, \dots, \ell,$$

(ср. условие (18)), то

$$\begin{aligned}
&\log\left(1 + \frac{X_n^j}{n}\right) = O\left(\frac{1}{\sigma_0 \omega}\right), \\
&s' \log\left(1 + \frac{X_n^j}{n}\right) = O\left(\frac{1}{\omega(T)}\right), \\
&\left(1 + \frac{X_n^j}{n}\right)^{\pm s'} = \exp\left\{ \pm s' \log\left(1 + \frac{X_n^j}{n}\right) \right\} = 1 + O\left(\frac{1}{\omega(T)}\right)
\end{aligned}$$

(log – главное значение логарифма) и, следовательно,

$$\begin{aligned}\prod_{j=0}^{\ell}\left\{1+\frac{X_n^j(s)}{n}\right\}^{\pm s'} &= \prod_{j=0}^{\ell}\left\{1+O\Big(\frac{1}{\omega(T)}\Big)\right\}\\ &= \exp\left\{\sum_{j=0}^{\ell}\log\left\{1+O\Big(\frac{1}{\omega(T)}\Big)\right\}\right\} = \exp\left\{O\Big(\frac{\ell}{\omega(T)}\Big)\right\}\\ &< \exp\left(\frac{\ell}{\sqrt{\omega}(T)}\right) \leqq \exp\left(\frac{L}{\sqrt{\omega}(T)}\right) = K\,,\end{aligned} \tag{23}$$

в силу (21). Далее (см. (17), (21))

$$\sum_{\mathrm{e}^{-1/K}P\leqq n<P} 1 \sim \frac{P}{K}\,, \qquad T\to\infty\,,$$

$$\frac{1}{n^\sigma} \leqq \frac{\mathrm{e}^{\frac{\sigma_0}{K}}}{P^\sigma} \leqq \frac{\mathrm{e}}{\sqrt{P}}\,, \qquad \frac{1}{n^{1-\sigma}} = \frac{n^\sigma}{n} \leqq \frac{P^\sigma}{\mathrm{e}^{-1/K}P} < \frac{2}{P^{1-\sigma}}\,, \tag{24}$$

$$\frac{\chi(s)}{n^{1-\sigma}} = O\left(\frac{P^{1-2\sigma}}{P^{1-\sigma}}\right) = O\left(\frac{1}{P^\sigma}\right) = O\left(\frac{1}{\sqrt{P}}\right).$$

Значит (см. (19), (21))

$$Q_{\ell+1}(s) = \left(\frac{P}{K}\frac{1}{\sqrt{P}}K\right) = O\big(\sqrt{P}\big)\,, \qquad s\in\mathscr{P}\,, \tag{25}$$

равномерно относительно выбора векторов $\bar{X}^j(s)$, $j = 0,1,\ldots,\ell$, $\ell = 0,1,\ldots,L$, удовлетворяющих условию (19). Для $C(s)$ (см. (16)) тривиально получается оценка

$$C(s) = O\big(\sqrt{P}\big)\,. \tag{26}$$

Теперь из (19) в силу (25), (26) следует (22). □

4. Итерации нулевого порядка

Пусть $\|g^0(s)\|\in\mathbb{D}$ – любая фиксированная матрица. Функцию $\zeta(s)$, $s\in\mathscr{P}$, выбираем в качестве начального эленмента и полагаем

$$W_{1n}^0(s) = w_{1n}^0(s) = \frac{1}{N}g_{1n}^0(s)\zeta_0^0(s)\,, \qquad \zeta_0^0(s) = \zeta(s)\,, \tag{27}$$

где $g^0_{1n}(s)$, $W^0_{1n}[s, g^0_{1n}(s), \zeta(s)]$ – компоненты векторов $\bar{g}^0_1(s)$, $\bar{W}^0_1[s, \bar{g}^0_1, \zeta]$ соответственно. Очевидно

$$|W^0_{1n}(s)| = \frac{1}{N}|g^0_{1n}(s)||\zeta^0_0(s)| < \frac{\mathrm{e}^{-1/K}}{\sigma_0\omega}P,$$

т.е., $\bar{W}^0_1$ удовлетворяет условиям (20). Теперь мы определим класс $[\zeta^0_1]$ функций по формуле (см.(19))

$$\begin{aligned}\zeta^0_1(s) &= \zeta^0_1[s, \bar{W}^0_1(s)] = C(s) + Q_1[s, \bar{W}^0_1(s)] \\ &= C(s) + \sum_{\mathrm{e}^{-1/K}P \leqq n < P}\left(\frac{1}{n^s}\left\{1 + \frac{W^0_{1n}(s)}{n}\right\}^{-s'} + \frac{\chi(s)}{n^{1-s}}\left\{1 + \frac{W^0_{1n}(s)}{n}\right\}^{s'}\right), \\ & \qquad s \in \mathscr{P},\end{aligned}$$

где, по Лемме 1,

$$|\zeta^0_1(s)| \leqq A_0\sqrt{P}, \qquad s \in \mathscr{P}.$$

Пусть нами уже определен класс $[\zeta^0_r]$, $2 \leqq r < N$:

$$\begin{aligned}\zeta^0_r(s) &= \zeta^0_r[s, \bar{W}^0_r(s)] = C(s) + Q_1[s, \bar{W}^0_r(s)] \\ &= C(s) + \sum_{\mathrm{e}^{-1/K}P \leqq n < P}\left(\frac{1}{n^s}\left\{1 + \frac{W^0_{rn}(s)}{n}\right\}^{-s'} + \frac{\chi(s)}{n^{1-s}}\left\{1 + \frac{W^0_{rn}(s)}{n}\right\}^{s'}\right), \\ & \qquad |\zeta^0_r(s)| \leqq A_0\sqrt{P}, \quad s \in \mathscr{P},\end{aligned} \tag{28}$$

$$W^0_{rn}(s) = \sum_{k=1}^{r} w^0_{kn}(s), \qquad w^0_{kn} = \frac{1}{N}g^0_{kn}\zeta^0_{k-1}, \tag{29}$$

где

$$W^0_{rn}(s) = W^0_{rn}[s, \bar{g}^0_1(s), \ldots, \bar{g}^0_{r-1}(s), g^0_{rn}(s), \zeta(s)]$$

– компонента вектора

$$\bar{W}^0_r(s) = \bar{W}^0_r[s, \bar{g}^0_1(s), \ldots, \bar{g}^0_r(s), \zeta(s)]$$

и g^0_{kn} – компонента вектора $\bar{g}^0_k(s)$.

Положим

$$W^0_{r+1,n}(s) = W^0_{rn}(s) + w^0_{r+1,n}(s), \qquad w^0_{r+1,n} = \frac{1}{N}g^0_{r+1,n}\zeta^0_r,$$

где $W^0_{r+1,n}$ – компонента вектора $\bar{W}^0_{r+1}$ очевидно удовлетворяющего условию (20), (см. (4), (28)), как неполное среднее арифметическое (ср. (29)) выражений типа (27). Теперь мы определим класс $[\zeta^0_{r+1}]$ по формуле

$$\begin{aligned}\zeta^0_{r+1}(s) &= \zeta^0_{r+1}\left[s, \bar{W}^0_{r+1}(s)\right] = C(s) + Q_1\left[s, \bar{W}^0_{r+1}(s)\right] \\ &= C(s) + \sum_{e^{-1/K}P \leqq n < P} \left(\frac{1}{n^s}\left\{1 + \frac{W^0_{r+1,n}(s)}{n}\right\}^{-s'} + \frac{\chi(s)}{n^{1-s}}\left\{1 + \frac{W^0_{r+1,n}(s)}{n}\right\}^{s'} \right),\end{aligned}$$

где, по Лемме 1,

$$|\zeta^0_{r+1}(s)| \leqq A_0\sqrt{P}, \qquad s \in \mathscr{P}.$$

Определение 2. Элементы бесконечных классов

$$[\zeta^0_1],\ [\zeta^0_2],\ \dots,\ [\zeta^0_N],$$

сопоставленных начальному элементу $\zeta^0_0(s) = \zeta(s)$ и бесконечному классу $\mathbb{D}$ матриц $\|g\|$ мы назовем *итерациями нулевого порядка функции* $\zeta(s)$, $s \in \mathscr{P}$. Специально, класс $[\zeta^0_N]$ мы назовем *классом полных итераций нулевого порядка.*

Замечание 9. Класс полных итераций $[\zeta^0_N]$ характеризуют следующие соотношения

$$\begin{aligned}\zeta^0_N(s) &= \zeta^0_N\left[s, \bar{W}^0_N(s)\right] = C(s) + Q_1\left[s, \bar{W}^0_N(s)\right] \\ &= C(s) + \sum_{e^{-1/K}P \leqq n < P} \left(\frac{1}{n^s}\left\{1 + \frac{W^0_{Nn}}{n}\right\}^{-s'} + \frac{\chi(s)}{n^{1-s}}\left\{1 + \frac{W^0_{Nn}}{n}\right\}^{s'} \right), \end{aligned} \tag{30}$$

$$|\zeta^0_N(s)| \leqq A_0\sqrt{P}, \quad s \in \mathscr{P},$$

где (полное среднее арифметическое)

$$\begin{aligned}W^0_{Nn}(s) &= \sum_{r=1}^{N} w^0_{rn}(s) = \frac{1}{N}\sum_{r=1}^{N} g^0_{rn}(s)\zeta^0_{r-1}(s), \\ W^0_{Nn}(s) &= W^0_{Nn}\left[s, \bar{g}^0_1(s), \dots, \bar{g}^0_{N-1}(s), g^0_{Nn}(s), \zeta(s)\right]\end{aligned}$$

— компонента вектора

$$\bar{W}^0_N(s) = \bar{W}^0_N\left[s, \bar{g}^0_1(s), \dots, \bar{g}^0_N(s), \zeta(s)\right] = \bar{W}^0_N\left[s, \|g^0\|, \zeta\right]$$

и $\|g^0(s)\| \in \mathbb{D}$ — полная матрица, элементы которой принимают участие в процессе итерации.

Замечание 10. Очевидно (ср. (28), (29))

$$|W^0_{rn}(s)| \leqq \frac{e^{-1/K}}{\sigma_0\omega} P, \qquad r = 1, \dots N, \quad s \in \mathscr{P}.$$

5. Итерации высших порядков

Будем исходить из формулы (см. (19))

$$\zeta^1(s) = \zeta^1\big[s, \bar{W}_N^0(s), \bar{X}^1(s)\big] = C(s) + Q_2\big[s, \bar{W}_N^0(s), \bar{X}^1(s)\big]$$

и $\zeta_N^0(s)$ (см. (30)) выбирает в качестве начального элемента. Теперь, бесконечному классу $\mathbb{D}$ матриц $\|g^1(s)\|$ и начальному элементу $\zeta_N^0(s)$ мы сопоставим, способом п. 4, бесконечные классы функций

$$[\zeta_{N+1}^1], \ [\zeta_{N+2}^1], \ \ldots, \ [\zeta_{2N}^1],$$

где

$$\begin{aligned}
\zeta_{N+r}^1(s) &= \zeta_{N+r}^1\big[s, \bar{W}_N^0(s), \bar{W}_r^1(s)\big] = C(s) + Q_2\big[s, \bar{W}_N^0(s), \bar{W}_N^1(s)\big] \\
&= C(s) + \sum_{\mathrm{e}^{-1/K}P \leqq n < P} \left(\frac{1}{n^s}\left\{1 + \frac{W_{Nn}^0}{n}\right\}^{-s'} \left\{1 + \frac{W_{rn}^1}{n}\right\}^{-s'} \right. \\
&\qquad \left. + \frac{\chi(s)}{n^{1-s}}\left\{1 + \frac{W_{Nn}^0}{n}\right\}^{s'} \left\{1 + \frac{W_{rn}^1}{n}\right\}^{s'} \right), \\
r &= 1, \ldots, N, \quad |\zeta_{N+r}^1(s)| \leqq A_0\sqrt{P}, \quad s \in \mathscr{P},
\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
W_{rn}^1(s) &= \frac{1}{N}\sum_{q=1}^{r} g_{qn}^1(s)\zeta_{N+q-1}^1(s), \qquad \zeta_N^1(s) = \zeta_N^0(s), \\
W_{rn}^1(s) &= W_{rn}^1\big[s, \bar{g}_1^1(s), \ldots, \bar{g}_{r-1}^1(s), g_{rn}^1(s), \zeta_N^1(s)\big] \\
&= W_{rn}^1\big[s, \bar{g}_1^1(s), \ldots, \bar{g}_{r-1}^1(s), g_{rn}^1(s), \|g^0(s)\|, \zeta(s)\big]
\end{aligned}$$

(при $r = 1$ совокупность векторов $\bar{g}_1^1, \ldots, \bar{g}_{r-1}^1$ является пустой; это имеет место и в других аналогичных случаях) – компоненты вектора

$$\begin{aligned}
\bar{W}_r^1(s) &= \bar{W}_r^1\big[s, \bar{g}_1^1, \ldots, \bar{g}_r^1, \|g^0\|, \zeta\big]; \\
|W_{rn}^1(s)| &\leqq \frac{\mathrm{e}^{-1/K}}{\sigma_0\omega}P, \qquad s \in \mathscr{P}, \ r = 1, \ldots, N.
\end{aligned}$$

Предположим, что последовательности $\left\{\|g^k(s)\|\right\}_{k=0}^{\ell}$, $\ell > 0$, где всякое $\|g^k(s)\|$ независимо пробегает класс $\mathbb{D}$, и начальному элементу

$$\zeta_{\ell N}^{\ell}(s) = \zeta_{\ell N}^{\ell-1}(s) = \zeta_{(\ell-1)N+N}^{\ell-1}(s)$$

уже сопоставлены бесконечные классы функций

$$[\zeta^{\ell}_{\ell N+1}],\ [\zeta^{\ell}_{\ell N+2}],\ \ldots,\ [\zeta^{\ell}_{\ell N+N}], \qquad \ell < L,$$

где

$$\begin{aligned}\zeta^{\ell}_{\ell N+r}(s) &= \zeta^{\ell}_{\ell N+r}\big[s, \bar W^0_N(s), \ldots, \bar W^{\ell-1}_N(s), \bar W^{\ell}_r(s)\big] \\ &= C(s) + Q_{\ell+1}\big[s, \bar W^0_N(s), \ldots, \bar W^{\ell-1}_N(s), \bar W^{\ell}_r(s)\big] \\ &= C(s) + \sum_{e^{-1/K}P \leqq n < P} \left(\frac{1}{n^s}\left\{1 + \frac{W^{\ell}_{rn}}{n}\right\}^{-s'} \prod_{j=1}^{\ell}\left\{1 + \frac{W^{j-1}_{Nn}}{n}\right\}^{-s'}\right. \\ &\qquad \left. + \frac{\chi(s)}{n^{1-s}}\left\{1 + \frac{W^{\ell}_{rn}}{n}\right\}^{s'} \prod_{j=1}^{\ell}\left\{1 + \frac{W^{j-1}_{Nn}}{n}\right\}^{s'}\right),\end{aligned} \tag{31}$$

$$|\zeta^{\ell}_{\ell N+r}(s)| \leqq A_0\sqrt{P}, \quad s \in \mathscr{P}, \quad r = 1\ldots, N,$$

и

$$\begin{aligned}W^{\ell}_{rn}(s) &= \frac{1}{N}\sum_{q=1}^{n} g^{\ell}_{rn}(s)\zeta^{\ell}_{\ell N+q-1}(s), \qquad \zeta^{\ell}_{\ell N}(s) = \zeta^{\ell-1}_{\ell N}(s), \\ W^{\ell}_{rn}(s) &= W^{\ell}_{rn}\big[s, \bar g^{\ell}_1(s), \ldots, \bar g^{\ell}_{r-1}(s), g^{\ell}_{rn}(s), \zeta^{\ell}_{\ell N}(s)\big]\end{aligned} \tag{32}$$

– компоненты вектора

$$\begin{aligned}\bar W^{\ell}_r(s) &= \bar W^{\ell}_r\big[s, \bar g^{\ell}_1(s), \ldots, \bar g^{\ell}_r(s), \|g^{\ell-1}(s)\|, \ldots, \|g^0(s)\|, \zeta(s)\big] \\ |W^{\ell}_{rn}(s)| &\leqq \frac{e^{-1/K}}{\sigma_0\omega}P.\end{aligned} \tag{33}$$

Теперь, бесконечному классу $\mathbb{D}$ матриц $\|g^{\ell+1}(s)\|$ и начальному элементу

$$\zeta^{\ell+1}_{(\ell+1)N}(s) = \zeta^{\ell}_{\ell+1)N} = \zeta^{\ell}_{\ell N+N}(s)$$

мы сопоставим, способом п. 4, бесконечные классы функций

$$[\zeta^{\ell+1}_{(\ell+1)N+1}],\ [\zeta^{\ell+1}_{(\ell+1)N+2}],\ \ldots,\ [\zeta^{\ell+1}_{(\ell+1)N+N}],$$

где

$$\begin{aligned}\zeta^{\ell+1}_{(\ell+1)N+r}(s) &= \zeta^{\ell+1}_{(\ell+1)N+r}\big[s, \bar W^0_N(s), \ldots, \bar W^{\ell}_N(s), \bar W^{\ell+1}_r(s)\big] \\ &= C(s) + Q_{\ell+2}\big[s, \bar W^0_N(s), \ldots, \bar W^{\ell}_N(s), \bar W^{\ell+1}_r(s)\big] \\ &= C(s) + \sum_{e^{-1/K}P \leqq n < P} \left(\frac{1}{n^s}\left\{1 + \frac{W^{\ell+1}_{rn}}{n}\right\}^{-s'} \prod_{j=1}^{\ell+1}\left\{1 + \frac{W^{j-1}_{Nn}}{n}\right\}^{-s'}\right. \\ &\qquad \left. + \frac{\chi(s)}{n^{1-s}}\left\{1 + \frac{W^{\ell+1}_{rn}}{n}\right\}^{s'} \prod_{j=1}^{\ell+1}\left\{1 + \frac{W^{j-1}_{Nn}}{n}\right\}^{s'}\right),\end{aligned}$$

$$|\zeta^{\ell+1}_{(\ell+1)N+r}(s)| \leqq A_0\sqrt{P}, \quad s \in \mathscr{P}, \quad r = 1\ldots, N,$$

и

$$W_{rn}^{\ell+1}(s) = \frac{1}{N}\sum_{q=1}^{n} g_{rn}^{\ell+1}(s)\zeta_{(\ell+1)N+q-1}^{\ell+1}(s), \qquad \zeta_{(\ell+1)N}^{\ell+1} = \zeta_{(\ell+1)N}^{\ell},$$

$$W_{rn}^{\ell+1}(s) = W_{rn}^{\ell+1}\big[s, \bar{g}_1^{\ell+1}(s), \dots, \bar{g}_{r-1}^{\ell+1}(s), g_{rn}^{\ell+1}(s), \zeta_{(\ell+1)N}^{\ell+1}(s)\big]$$

– компоненты вектора

$$\bar{W}_r^{\ell+1}(s) = \bar{W}_r^{\ell+1}\big[s, \bar{g}_1^{\ell+1}(s), \dots, \bar{g}_r^{\ell+1}(s), \|g^{\ell}(s)\|, \dots, \|g^0(s)\|, \zeta(s)\big]$$

$$|W_{rn}^{\ell+1}(s)| \leqq \frac{\mathrm{e}^{-1/K}}{\sigma_0\omega}P.$$

Определение 3. Элементы бесконечных классов

$$[\zeta_{\ell N+1}^{\ell}], \ [\zeta_{\ell N+2}^{\ell}], \ \dots, \ [\zeta_{\ell N+N}^{\ell}], \qquad \ell = 1, \dots, L,$$

мы назовем *итерациями высших порядков функций* $\zeta(s)$, $s \in \mathscr{P}$.

6. Разность соседних итераций

Справедлива следующая лемма.

Лемма 2. *При условиях* (21) *имеет место*

$$\zeta_{\ell N+r+1}^{\ell}(s) - \zeta_{\ell N+r}^{\ell}(s) = \frac{1}{N\omega}F_{\ell N+r}^{\ell}(s)\zeta_{\ell N+r}^{\ell}(s), \tag{34}$$

где

$$F_{\ell N+r}^{\ell}(s) = F_{\ell N+r}^{\ell}\big[s, \bar{g}_1^{\ell}(s), \dots, \bar{g}_{r+1}^{\ell}(s), \|g^{\ell-1}(s)\|, \dots, \|g^0(s)\|, \zeta(s)\big] = O(1)$$

и $F_{\ell N+r}^{\ell}(s)$ *– аналитическая функция своих аргументов.*

Доказательство. Фиксируем любое значение $\ell = 0, 1, \dots, L$ и пусть, сначала, $r = 1, \dots, N-1$. Рассмотрим следующую разность

$$\zeta_{\ell N+r+1}^{\ell}(s) - \zeta_{\ell N+r}^{\ell}(s), \qquad s \in \mathscr{P}. \tag{35}$$

Так как (см. (32))

$$W_{r+1,n}^{\ell} = W_{r,n}^{\ell} + w_{r+1,n}^{\ell}, \qquad w_{r+1,n}^{\ell} = \frac{1}{N}g_{r+1,n}^{\ell}\zeta_{\ell N+r}^{\ell}, \tag{36}$$

то

$$\left(1+\frac{W^{\ell}_{r+1,n}}{n}\right)^{\pm s'}-\left(1+\frac{W^{\ell}_{r,n}}{n}\right)^{\pm s'}=\left(1+\frac{W^{\ell}_{r,n}}{n}\right)^{\pm s'}\left\{\left(1+\frac{w^{\ell}_{r+1,n}}{n+W^{\ell}_{rn}}\right)^{\pm s'}-1\right\}. \tag{37}$$

Далее, поскольку (см. (4), (31) – (33), (36))

$$w^{\ell}_{r+1,n}(s)=O\Big(\frac{P}{N\sigma_0\omega}\Big), \qquad W^{\ell}_{rn}=O\Big(\frac{P}{\sigma_0\omega}\Big)=o(P), \tag{38}$$

то (см. (3))

$$\begin{aligned}
\frac{w^{\ell}_{r+1,n}}{n+W^{\ell}_{rn}}&=O\Big(\frac{P}{N\sigma_0\omega}\,\frac{1}{P}\Big)=O\Big(\frac{1}{N\sigma_0\omega}\Big),\\
\log\left(1+\frac{w^{\ell}_{r+1,n}}{n+W^{\ell}_{rn}}\right)&=\frac{w^{\ell}_{r+1,n}}{n+W^{\ell}_{rn}}\left\{1+O\Big(\frac{1}{N\sigma_0\omega}\Big)\right\},\\
s'\log\left(1+\frac{w^{\ell}_{r+1,n}}{n+W^{\ell}_{rn}}\right)&=O\Big(\frac{1}{N\omega}\Big).
\end{aligned} \tag{39}$$

Следовательно, (см. (36), (39))

$$\begin{aligned}
&\exp\left\{\pm s'\log\left(1+\frac{w^{\ell}_{r+1,n}}{n+W^{\ell}_{rn}}\right)\right\}-1\\
&=\pm\, s'\frac{w^{\ell}_{r+1,n}}{n+W^{\ell}_{rn}}\left\{1+O\Big(\frac{1}{N\sigma_0\omega}\Big)\right\}\left\{1+O\Big(\frac{1}{N\omega}\Big)\right\}\\
&=\pm\,\frac{s'}{N}\,\frac{g^{\ell}_{r+1,n}}{n+W^{\ell}_{rn}}\left\{1+O\Big(\frac{1}{N\omega}\Big)\right\}\zeta^{\ell}_{\ell N+r}.
\end{aligned} \tag{40}$$

Теперь из (31) в силу (37), (40) получаем

$$\begin{aligned}
&\zeta^{\ell}_{\ell N+r+1}(s)-\zeta^{\ell}_{\ell N+r}(s)\\
&=\sum_{e^{-1/K}P\leqq n<P}\frac{1}{n^s}\left\{\left(1+\frac{W^{\ell}_{r+1,n}}{n}\right)^{-s'}-\left(1+\frac{W^{\ell}_{rn}}{n}\right)^{-s'}\right\}\prod_{j=1}^{\ell}\left(1+\frac{W^{j-1}_{Nn}}{n}\right)^{-s'}\\
&\quad+\sum_{e^{-1/K}P\leqq n<P}\frac{\chi(s)}{n^{1-s}}\left\{\left(1+\frac{W^{\ell}_{r+1,n}}{n}\right)^{s'}-\left(1+\frac{W^{\ell}_{rn}}{n}\right)^{s'}\prod_{j=1}^{\ell}\left(1+\frac{W^{j-1}_{Nn}}{n}\right)^{s'}\right.\\
&=\frac{1}{N\omega}F^{\ell}_{\ell N+r}(s)\zeta^{\ell}_{\ell N+r}(s),
\end{aligned} \tag{41}$$

где

$$F_{\ell N+r}^{\ell}(s)=F_{\ell N+r}^{\ell 1}(s)+F_{\ell N+r}^{\ell 2}(s)\,,$$

$$\begin{aligned}F_{\ell N+r}^{\ell 1}(s)&=-s'\omega\sum_{e^{-1/K}P\leqq n<P}\frac{1}{n^s}\frac{g_{r+1,n}^{\ell}}{n+W_{rn}^{\ell}}\left\{1+O\Big(\frac{1}{N\omega}\Big)\right\}\\&\quad\cdot\left(1+\frac{W_{rn}^{\ell}}{n}\right)^{-s'}\prod_{j=1}^{\ell}\left(1+\frac{W_{Nn}^{j-1}}{n}\right)^{-s'},\\F_{\ell N+r}^{\ell 2}(s)&=s'\omega\sum_{e^{-1/K}P\leqq n<P}\frac{\chi(s)}{n^{1+s}}\frac{g_{r+1,n}^{\ell}}{n+W_{rn}^{\ell}}\left\{1+O\Big(\frac{1}{N\omega}\Big)\right\}\\&\quad\cdot\left(1+\frac{W_{rn}^{\ell}}{n}\right)^{s'}\prod_{j=1}^{\ell}\left(1+\frac{W_{Nn}^{j-1}}{n}\right)^{s'}.\end{aligned}\tag{42}$$

Для последних сумм получаются следующие оценки (см. (4), (21), (23), (24), (38))

$$\begin{aligned}F_{\ell N+r}^{\ell 1}(s)&=O\left(\sigma_0\omega\frac{P}{K}\frac{1}{\sqrt{P}}\frac{1}{P}\frac{\sqrt{P}}{\sigma_0\omega}K\right)=O(1)\,,\\F_{\ell N+r}^{\ell 2}(s)&=O(1)\,,\end{aligned}\tag{43}$$

равномерно относительно $\ell=0,1,\dots,L$, $r=1,\dots,N-1$ при $s\in\mathscr{P}$. Теперь из (41) в силу (42), (43) следует (34), (35).

Еще нам нужна оценка разности (сп. (32))

$$\zeta_{\ell N+1}^{\ell}(s)-\zeta_{\ell N}^{\ell}(s)=\zeta_{\ell N+1}^{\ell}(s)-\zeta_{\ell N}^{\ell-1}(s)=\zeta_{\ell N+1}^{\ell}(s)-\zeta_{(\ell-1)N+N}^{\ell-1}(s)\,,\qquad \ell\geqq 1\,,\tag{44}$$

соответствующая значению $r=0$ характеризующая «соприкосновение» между итерациями порядков ℓ и $\ell-1$.

Прежде всего из (31), $\ell\to\ell+1$, $r=N$, получаем формулу

$$\begin{aligned}&\zeta_{(\ell-1)N+N}^{\ell-1}(s)\\&=C(s)+\sum_{e^{-1/K}P\leqq n<P}\left\{\frac{1}{n^s}\prod_{j=1}^{\ell}\left(1+\frac{W_{Nn}^{j-1}}{n}\right)^{-s'}+\frac{\chi(s)}{n^{1-s}}\prod_{j=1}^{\ell}\left(1+\frac{W_{Nn}^{j-1}}{n}\right)^{s'}\right\}.\end{aligned}$$

Далее, в силу (31), $r=1$ и (44) получаем

$$\begin{aligned}\zeta_{\ell N+1}^{\ell}(s)-\zeta_{\ell N}^{\ell}(s)&=\sum_{e^{-1/K}P\leqq n<P}\frac{1}{n^s}\left\{\left(1+\frac{W_{1n}^{\ell}}{n}\right)^{-s'}-1\right\}\prod_{j=1}^{\ell}\left(1+\frac{W_{Nn}^{j-1}}{n}\right)^{-s'}\\&\quad+\sum_{e^{-1/K}P\leqq n<P}\frac{\chi(s)}{n^{1-s}}\left\{\left(1+\frac{W_{1n}^{\ell}}{n}\right)^{s'}-1\right\}\prod_{j=1}^{\ell}\left(1+\frac{W_{1n}^{j-1}}{n}\right)^{s'}.\end{aligned}$$

Поскольку (см. (32))

$$W_{1n}^{\ell}=\frac{1}{N}g_{1n}^{\ell}\zeta_{\ell N}^{\ell}=w_{1n}^{\ell},$$

то (ср. (40))

$$\left(1+\frac{W_{1n}^{\ell}}{n}\right)^{\pm s'}-1=\pm s'\frac{w_{1n}^{\ell}}{n}\left\{1+O\Big(\frac{1}{N\omega}\Big)\right\}=\pm\frac{s'}{N}\frac{g_{1n}^{\ell}}{n}\left\{1+O\Big(\frac{1}{N\omega}\Big)\right\}\zeta_{\ell N}^{\ell}. \tag{40'}$$

Следовательно, и в этом случае оценки типа (43) приводят нас к соотношению (34), $r=0$. □

7. Доказательство теоремы

Из соотношений (см. (34))

$$\begin{aligned}
\zeta_{\ell N+r}^{\ell}(s)&=\left\{1+\frac{1}{N\omega}F_{\ell N+r-1}^{\ell}(s)\right\}\zeta_{\ell N+r-1}^{\ell}(s),\\
\zeta_{\ell N+r-1}^{\ell}(s)&=\left\{1+\frac{1}{N\omega}F_{\ell N+r-2}^{\ell}(s)\right\}\zeta_{\ell N+r-2}^{\ell}(s),\\
&\ \ \vdots\\
\zeta_{\ell N+1}^{\ell}(s)&=\left\{1+\frac{1}{N\omega}F_{\ell N}^{\ell}(s)\right\}\zeta_{\ell N}^{\ell}(s),
\end{aligned}$$

следует формула

$$\zeta_{\ell N+r}^{\ell}(s)=\zeta_{\ell N}^{\ell}(s)\prod_{q_\ell=0}^{r-1}\left\{1+\frac{1}{N\omega}F_{\ell N+q_\ell}^{\ell}(s)\right\},\qquad r=1,\dots,N,\quad s\in\mathscr{P}. \tag{45}$$

Далее, аналогичным образом получаем (ср. (32), (44))

$$\begin{aligned}
\zeta_{\ell N}^{\ell}(s)=\zeta_{(\ell-1)N+N}^{\ell-1}(s)&=\zeta_{(\ell-1)N}^{\ell-1}(s)\prod_{q_{\ell-1}=0}^{N-1}\left\{1+\frac{1}{N\omega}F_{(\ell-1)N+q_{\ell-1}}^{\ell-1}(s)\right\},\\
\zeta_{(\ell-1)N}^{\ell-1}(s)=\zeta_{(\ell-2)N+N}^{\ell-2}(s)&=\zeta_{(\ell-2)N}^{\ell-2}(s)\prod_{q_{\ell-2}=0}^{N-1}\left\{1+\frac{1}{N\omega}F_{(\ell-2)N+q_{\ell-2}}^{\ell-2}(s)\right\},\\
\zeta_{N}^{1}(s)=\zeta_{0\cdot N+N}^{0}(s)&=\zeta_{0}^{0}(s)\prod_{q_0=0}^{N-1}\left\{1+\frac{1}{N\omega}F_{0+q_0}^{0}(s)\right\},\qquad \zeta_0^0(s)=\zeta(s).
\end{aligned} \tag{46}$$

Следовательно, из (45) в силу (46) получается формула

$$\zeta^{\ell}_{\ell N+r}(s)=\zeta(s)\prod_{j=0}^{\ell}\prod_{q_j=0}^{N-1}{}^{*}\left\{1+\frac{1}{N\omega}F^{j}_{jN+q_j}(s)\right\}, \tag{47}$$

где

$$\prod_{q_\ell=0}^{N-1}{}^{*}=\prod_{q_\ell=0}^{r-1}, \quad \prod_{q_j=0}^{N-1}{}^{*}=\prod_{q_j=0}^{N-1}, \qquad j<\ell .$$

Окончательно, из (47) $r=N$ получаются, в свою очередь, формулы (6), (7) для полных итераций.

8. Некоторые алгебраические преобразования элементов класса $\mathbb{K}_0$

8.1. Комплексное среднее геометрическое элементов класса $\mathbb{K}_0$.

Исходим из класса $\mathbb{K}_0$ итерационных дзета-функций

$$\mathbb{K}_0(\mathscr{P})=\bigcup_{\ell\in\langle\frac{L}{2},L\rangle}\mathbb{K}^{\ell}(\mathscr{P})=\bigcup_{\ell\in\langle\frac{L}{2},L\rangle}[\zeta^{\ell}_{(\ell+1)N}]$$

(см. Определения 1, 3). Пусть

$$\ell_j\in\left\langle\frac{L}{2},L\right\rangle, \qquad j=1,\dots,k_0, \quad 1\leqq k\leqq\left[\tfrac{L}{2}\right]+1 .$$

Из класса $[\zeta^{\ell_j}_{(\ell_j+1)N}]$ мы выбираем $r(\ell_j)$ элементов

$$\zeta^{\ell_j,q(\ell_j)}_{(\ell j+1)N}(s)=\zeta^{\ell_j}_{(\ell_j+1)N}\left[s,\|g^{\ell_j,q(\ell_j)}(s)\|,\dots,\|g^{0,q(\ell_j)}(s)\|,\zeta(s)\right],$$
$$q(\ell_j)=1,\dots,r(\ell_j),$$

где $r(\ell_j)$ – любое натуральное число и полагаем (см. (6))

$$\begin{aligned}G^{r(\ell_1),\dots,r(\ell_k)}(s)&=\left\{\prod_{j=1}^{k}\prod_{q(\ell_j)=1}^{r(\ell_j)}\zeta^{\ell_j,q(\ell_j)}_{(\ell_j+1)N}(s)\right\}^{\frac{1}{r(\ell_1)+\dots+r(\ell_j)}}\\&=\zeta(s)\prod_{j=1}^{k}\prod_{q(\ell_j)=1}^{r(\ell_j)}\left\{\Lambda^{\ell_j,q(\ell_j)}_{(\ell_j+1)N}\right\}^{\frac{1}{r(\ell_1)+\dots+r(\ell_k)}}, \qquad s\in\mathscr{P},\end{aligned} \tag{48}$$

(в последней строке выбираются главные значения корней).

По Следствию 1 функции

$$\zeta(s), \quad G^{r(\ell_1),\dots,r(\ell_k)}(s); \qquad s \in \mathscr{P},$$

при любой выборке $\{r(\ell_1),\dots,r(\ell_k)\}$ имеют совпадающие множества нулей и кратностей нулей а по Следствию 2 – представление

$$G^{r(\ell_1),\dots,r(\ell_k)}(s) = \Lambda^{r(\ell_1),\dots,r(\ell_k)}[s,\zeta(s)] \prod_p \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}} \neq 0$$

для $s \in \mathscr{P}$, $\sigma > 1$; конечно, $\Lambda^{r(\ell_1),\dots,r(\ell_k)}[s,\zeta(s)]$ выражается нужным произведением (ср. (1)) в силу (7), (48) и бинома Нютона.

Замечание 11. Итак, преобразование (48) элементов класса $\mathbb{K}_0$ сохраняет свойства (а), (б) из Введения.

8.2. Линейные комбинации элементов класса $\mathbb{K}_0$, для которых гипотеза Римана неверна.

Элемент класса $\mathbb{K}_0(\mathscr{P})$ обозначим через $\zeta[s,\mathbb{K}_0]$. Пусть $\zeta_j[s,\mathbb{K}_0]$, $j = 1,\dots,k$ – любое конечное количество элементов и

$$H_k[s,\alpha_1,\dots,\alpha_k,\zeta_1,\dots,\zeta_k] = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \zeta_j[s,\mathbb{K}_0],$$

где α_j – комплексные числа. Пусть далее

$$\zeta(s_m) \neq 0, \qquad s_m \in \mathscr{P}, \quad m = 1,\dots,k-1, \quad s_m \neq s_{m'}.$$

В силу Следствия 1 имеет место

$$\zeta_j[s_m,\mathbb{K}_0] \neq 0, \qquad j = 1,\dots,k, \quad m = 1,\dots,k-1.$$

Так как линейная однородная система уравнений

$$\sum_{j=1}^{k} \alpha_j \zeta_j[s_m,\mathbb{K}_0] = 0, \qquad m = 1,\dots k-1,$$

всегда имеет нетривиальное решение $\overset{*}{\alpha}_j$, то функция

$$\overset{*}{\mathrm{H}}_k(s) = \sum_{j=1}^{k} \overset{*}{\alpha}_j \zeta_j[s,\mathbb{K}_0], \qquad s \in \mathscr{P},$$

кроме нулей $\varrho \in \mathscr{P}$, заведомо имеет $k-1$ нулей $s_m \in \mathscr{P}$, $s_m \neq \varrho$, при этом k может принимать сколь угодно большие значения.

Замечание 12. Точки $s_m \neq \varrho$ можно выбирать произвольно в любой части прямоугольниика $\mathscr{P}$. В частности, в случае $\frac{1}{2} < \mathrm{Re}\{s_m\} \leqq \sigma_0$ гипотеза Римана для соотвретствующей функции $\overset{*}{\mathrm{H}}$, $s \in \mathscr{P}$ – неверна.

Замечание 13. С другой же стороны, в связи с рассмотрением линейных комбинаций элементов класса $\mathbb{K}_0$ мы приходим к следующему вопросу: существует ли совокупность таких элементов $\bar{\zeta}_j[s, \mathbb{K}_0]$, $j = 1, \dots, k$, $k > 1$, для которых имеет место

$$\sum_{j=1}^{k} \bar{\zeta}_j[s, \mathbb{K}_0] \neq 0\,, \qquad s \neq \varrho \in \mathscr{P}\,,$$

или же

$$\sum_{j=1}^{k} p_j \bar{\zeta}_j[s, \mathbb{K}_0] \neq 0\,, \qquad s \neq \varrho \in \mathscr{P}\,,$$

где p_j, $j = 1, \dots, k$ – совокупность k разных простых чисел?

Литература

[1] КАРАЦУБА, А. А.: *Нули арифметических рядов Дирихле*, Math. Slovaca **44** (1994), 491-510.

[2] ТИТЧМАРШ, Е. К.: *Теория дзета-функции Римана*, ИЛ, Москва, 1953.

[3] SIEGEL, C. L.: *Über Riemanns Nachlass zur analytischen Zahlentheorie*, Quellen und Studien zur Geschichte der Math., Astr. und Physic, Abt. B: Studien **2** (1932), 45–80.

Received November 22, 1994

Department of Mathematical Analysis
Faculty of Mathematics and Physics
Comenius University
Mlynská dolina
SK-842 15 Bratislava
SLOVAKIA