M. El Azhari

Formes positives dans les BP*-algèbres

Mathematica Slovaca, Vol. 45 (1995), No. 3, 281--285

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/136649

Math. Slovaca, **45** (1995), No. 3, 281–285

Mathematica Slovaca
©1995
Mathematical Institute
Slovak Academy of Sciences

FORMES POSITIVES DANS LES BP^*–ALGÈBRES

M. EL AZHARI

(*Communicated by Michal Zajac*)

ABSTRACT. Let A be a BP^*-algebra with a unit e, $P_1(A)$ be the set of all positive linear functionals f on A such that $f(e) = 1$, and let $M_s(A)$ be the set of all non-zero Hermitian multiplicative linear functionals on A. We prove that $M_s(A)$ is the set of extremal points of $P_1(A)$. We also prove that, if $M_s(A)$ is equicontinuous, then every positive linear functional on A is continuous. Finally, we give an example of a BP^*-algebra whose topological dual is not included in the vector space generated by $P_1(A)$, which gives a negative answer to a question posed by M. A. Hennings [3; question E].

1. Préliminaires

Soit A un espace vectoriel topologique, on note par A^* le dual algèbrique de A et par A' le dual topologique de A. Soit A une algèbre et $x \in A$, on note par $\mathrm{sp}_A\, x$ le spectre de x, par $\varrho_A(x) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \mathrm{sp}_A\, x\}$ le rayon spectral de x et par $R(A)$ le radical de A. Une algèbre topologique est une algèbre munie d'une topologie compatible avec sa structure d'espace vectoriel et pour laquelle la multiplication est séparément continue. Une algèbre localement convexe (en abrégé a.l.c.) est une algèbre topologique munie d'une topologie localement convexe. Toutes les algèbres topologiques considérées ici seront supposées séparées.

Soit A une a.l.c commutative unitaire, munie d'une involution continue. $\mathscr{B}$ l'ensemble des bornés, absolument convexes, contenant e, fermés, idempotents, hermitiens de A. Pour chaque $B \in \mathscr{B}$, on note par A_B le sous espace vectoriel engendré par B, A_B muni de la jauge $\|\ \|_B$ est une algèbre normée involutive. Si $A = \bigcup_{B\in\mathscr{B}} A_B$ et $(A_B, \|\ \|_B)$ est complète pour tout $B \in \mathscr{B}$, on dit que A est une BP^*-algèbre. On note par $P(A)$ l'ensemble des formes positives sur A.

AMS Subject Classification (1991): Primary 46J20. Secondary 46H99.
Key words: positive functional, BP^*-algebra, *-representation.

2. Caractérisation des points extrémaux de $P_1(A)$

Soit A une BP^*-algèbre, on a $A = \bigcup_{B\in\mathscr{B}} A_B$. Dans [5], T. Husain et S. A. Warsi ont essayé de caractériser les points extrémaux de $P_1(A)$, leur méthode repose essentiellement sur le fait que $P_1(A)$ est la limite projective des $P_1(A_B)$, cette méthode n'a pas donné de résultat dans le cas général. En utilisant la méthode connue des algèbres de Banach, nous caractérisons les points extrémaux de $P_1(A)$.

Lemme 1. ([6; Théorème 4.4.12]) *Soit H un espace de Hilbert et L une sous*-algèbre de $B(H)$. Alors L est irréductible sur H si et seulement si le centralisateur de L dans $B(H)$ ne contient que les multiples de l'application identité de H.*

Preuve. Cf. [6]. □

Théorème 2. *Soit A une BP^*-algèbre, alors les points extrémaux de $P_1(A)$ sont exactement les caractères (non nuls) hermitiens de A.*

Preuve. Soit $\chi \in M_s(A)$ et $x \in A$, $\chi(x^*x) = \overline{\chi(x)}\chi(x) = |\chi(x)|^2 \geq 0$, donc $M_s(A) \subset P_1(A)$. Soit $f \in P_1(A)$, f est une forme positive hermitienne et admissible (cf. [4; Théorème 5.2]), donc on peut lui associer une représentation cyclique sur un espace de Hilbert H_f (cf [6; Théorème 4.5.4]), on note par T_f la représentation associée à f. Soit f un point extrémal de $P_1(A)$, T_f est une représentation irréductible d'après [5; Théorème 5.1]. En utilisant le lemme 1, le centralisateur Z de $\{T_f x : x \in A\}$ dans $B(H_f)$ ne contient que les multiples de l'application identité de H_f. Comme A est commutative, il s'ensuit que $\{T_f x : x \in A\} \subset Z$, donc pour tout $x \in A$ il existe $\chi(x) \in \mathbb{C}$ tel que $T_f x = \chi(x)I$. On vérifie facilement que l'application $x \to \chi(x)$ de A dans $\mathbb{C}$ est un caractère (non nul) hermitien de A. Soit h un vecteur cyclique de H_f tel que $f(x) = \langle T_f x(h), h\rangle$ pour tout $x \in A$, alors $f(x) = \chi(x)\|h\|^2$, ainsi $\|h\|^2 = 1$ car $f(e) = \chi(e) = 1$, d'où $f = \chi \in M_s(A)$. Réciproquement, soit $\chi \in M_s(A)$ et (T_χ, H_χ) la représentation cyclique associée à χ. On a $\dim H_\chi = \dim A/_{\operatorname{Ker}\chi} = 1$, donc T_χ est irréductible, ainsi χ est un point extrémal de $P_1(A)$ d'après [5; Théorème 5.1]. □

3. Sur le rayon spectral symétrique d'une BP^*-algèbre

Soit A une BP^*-algèbre, on note par ϱ_s le rayon spectral symétrique de A défini par $\varrho_s(x) = \sup\{|\chi(x)| : \chi \in M_s(A)\}$ pour tout $x \in A$. On a $\varrho_s(x) \leq \varrho_A(x) < +\infty$ pour tout $x \in A$.

Théorème 3. *Soit A une BP^*-algèbre, alors*

$$\varrho_s(x) = \left[\operatorname{Sup}\{f(x^*x) : f \in P_1(A)\}\right]^{\frac{1}{2}} \qquad \textit{pour tout} \quad x \in A.$$

P r e u v e . Posons $|x| = \left[\mathrm{Sup}\{f(x^*x) :\ f \in P_1(A)\}\right]^{\frac{1}{2}}$ pour tout $x \in A$. Soit $\chi \in M_s(A) \subset P_1(A)$ et $x \in A$, on a $|\chi(x)|^2 = \chi(x^*x) \leq |x|^2$, ainsi $\chi(x) \leq |x|$, d'où $\varrho_s(x) \leq |x|$. Réciproquement, soit $f \in P_1(A)$, en utilisant le théorème 2 et le théorème de Krein-Milman, il existe une suite généralisée $(f_\alpha)_{\alpha\in\Lambda} \subset \mathrm{conv}\, M_s(A)$ telle que $f_\alpha \underset{\alpha}{\rightarrow} f$ pour la topologie faible $\sigma(A^*, A)$. Pour chaque $\alpha \in \Lambda$, il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}^+$, $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, et $\chi_1, \dots, \chi_n \in M_s(A)$ tel que $f_\alpha = \lambda_1\chi_1 + \cdots + \lambda_n\chi_n$. Soit $x \in A$, on a $f_\alpha(x^*x) \leq \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i|\chi_i(x)|^2 \leq \left[\varrho_s(x)\right]^2$, comme $f_\alpha(x^*x) \underset{\alpha}{\rightarrow} f(x^*x)$, il s'ensuit que $f(x^*x) \leq \left[\varrho_s(x)\right]^2$, donc $\mathrm{Sup}\{f(x^*x) :\ f \in P_1(A)\} \leq \left[\varrho_s(x)\right]^2$, i.e. $|x| \leq \varrho_s(x)$. □

COROLLAIRE 4. *Soit A une BP^*-algèbre symétrique, alors*

$$R(A) = \left\{x \in A :\ f(x^*x) = 0 \ \textit{pour tout}\ f \in P_1(A)\right\} \quad (\textit{i.e.}\ R(A) = R^*(A)).$$

P r e u v e . Tout caractère de A est hermitien, donc

$$\begin{aligned} R(A) &= \left\{x \in A :\ \chi(x) = 0 \ \text{pour tout}\ \chi \in M_s(A)\right\} \\ &= \left\{x \in A :\ \varrho_s(x) = 0\right\}. \end{aligned}$$

□

THÉORÈME 5. *Soit A une BP^*-algèbre. Soit $f \in P(A)$, alors*

$$|f(x)| \leq f(e)\varrho_s(x) \qquad \textit{pour tout} \quad x \in A.$$

P r e u v e . Soit $f \in P(A)$. Si $f(e) = 0$, en utilisant l'inégalité de Schwarz, on a $|f(x)|^2 \leq f(e)f(x^*x)$ pour tout $x \in A$, d'où f est nulle. Si $f(e) \neq 0$, posons $f_1 = \left[f(e)\right]^{-1} f$, il est clair que $f_1 \in P_1(A)$. Soit $x \in A$, en utilisant le théorème 3, on a $f_1(x^*x) \leq \left[\varrho_s(x)\right]^2$, ainsi $|f_1(x)|^2 \leq f_1(x^*x) \leq \left[\varrho_s(x)\right]^2$, donc $|f_1(x)| \leq \varrho_s(x)$, i.e. $|f(x)| \leq f(e)\varrho_s(x)$. □

COROLLAIRE 6. *Soit A une BP^*-algèbre. Si $M_s(A)$ est équicontinue, alors toute forme positive sur A est continue.*

P r e u v e . Si $M_s(A)$ est équicontinue, alors ϱ_s est continue. □

COROLLAIRE 7. *Soit A une BP^*-algèbre tonnelée, telle que tout caractère hermitien de A est continu. Alors toute forme positive sur A est continue.*

P r e u v e . $M_s(A)$ est bornée pour la topologie faible $\sigma(A', A)$. Comme A est tonnelée, il s'ensuit que $M_s(A)$ est équicontinue d'après le théorème de Banach-Steinhaus. □

R e m a r q u e s.

1. Le corollaire 6 est une amélioration du [4; Théorème 5.7].

2. Le corollaire 7 est une réponse partielle au problème suivant: Est-ce-que toute forme positive sur une BP^*-algèbre tonnelée est continue?

4. Sur une question de M. A. Hennings

Soit A une BP^*-algèbre. Dans [3], H e n n i n g s a posé la question suivante: Est-ce-que $A' \subset \mathrm{Span}_{A^*} P(A)$?

Nous donnons une réponse négative à cette question, nous avons d'abord la proposition suivante:

PROPOSITION 8. *Soit A une BP^*-algèbre symétrique. Si $A' \subset \mathrm{Span}_{A^*} P(A)$, alors A est semi-simple.*

P r e u v e. Remarquons d'abord que $\mathrm{Span}_{A^*} P(A) = \mathrm{Span}_{A^*} P_1(A)$. D'après le corollaire 4, $R(A) = \{x \in A :\ f(x^*x) = 0 \text{ pour tout } f \in P_1(A)\}$. Soit $x \in R(A)$, en utilisant l'inégalité de Schwarz, on a $|f(x)|^2 \le f(x^*x)$ pour tout $f \in P_1(A)$, ainsi $f(x) = 0$ pour tout $f \in P_1(A)$. Comme $A' \subset \mathrm{Span}_{A^*} P_1(A)$, il s'ensuit que $g(x) = 0$ pour tout $g \in A'$, d'où $x = 0$. $\square$

R e m a r q u e. La proposition 8 est une généralisation du résultat suivant de Hennings: Si A est une MQ^*-algèbre unitaire, symétrique, telle que $A' \subset \mathrm{Span}_{A^*} P(A)$, alors A est semi-simple.

C o n t r e e x e m p l e. Soit E l'espace vectoriel des fonctions absolument continues sur $[0,1]$, muni de la norme $\|f\| = \int_0^1 |f(x)|\, \mathrm{d}x$, et de la multiplication-convolution $(f \times g)(x) = \int_0^x f(x-t)g(t)\, \mathrm{d}t$. $(E, \|\ \|)$ est une algèbre de Banach commutative, involutive ($f^*(x) = \overline{f(x)}$), symétrique, radicale (cf. [6; p. 316]). Soit $E \oplus \mathbb{C}e$ l'algèbre déduite de E par adjonction d'une unité. A est une algébre de Banach commutative unitaire, involutive, symétrique d'après [6; Théorème 4.7.9]. On vérifie facilement que $R(A) = E$, ainsi A n'est pas semi-simple, d'où $A' \not\subset \mathrm{Span}_{A^*} P(A)$ d'après la proposition 8.

5. Sur les représentations des BP^*-algèbres

Soit A une BP^*-algèbre et $f \in P(A)$. Soit $L_f = \{x \in A :\ f(x^*x) = 0\}$. On considère A/L_f l'espace préhilbertien muni du produit $\langle x+L_f, y+L_f\rangle = f(y^*x)$, $x, y \in A$. f est hermitienne et admissible donc on peut lui associer une représentation cyclique T_f sur un espace de Hilbert H_f, H_f étant le complété de A/L_f. Pour chaque $x \in A$, $T_f x$ est définie par $T_f x(y + L_f) = xy + L_f$ pour tout $y \in A$.

THÉORÈME 9. *Soit A une BP^*-algèbre telle que $M_s(A)$ soit équicontinue. Alors pour tout $f \in P(A)$, la représentation T_f est continue.*

Preuve. Soit $x, y \in A$, d'après le théorème 5, on a

$$f(y^*x^*xy) \le f(y^*y)\varrho_s(x^*x)$$

ainsi $$\langle xy+L_f,\, xy+L_f\rangle \le \langle y+L_f,\, y+L_f\rangle \varrho_s(x^*x)\,,$$

i.e. $$\|T_f x(y+L_f)\| \le \|y+L_f\| \varrho_s(x^*x)^{\frac{1}{2}}\,,$$

d'où $$\|T_f x\| \le \varrho_s(x^*x)^{\frac{1}{2}} = \varrho_s(x)\,.$$

Comme $M_s(A)$ est équicontinue, il s'ensuit que ϱ_s est continue, donc T_f est continue. □

Remarque. La théorème 9 est une amélioration du [5; Théorème 4.2].

Remerciements

Je remercie Monsieur le Professeur T. Husain pour l'aide précieuse qu'il m'a apportée durant l'élaboration de ce travail.

REFERENCES

[1] AKKAR, M.—EL AZHARI, M.—OUDADESS, M.: *On an expression of the spectrum in BP^*-algebras*, Period. Math. Hungar. **19** (1988), 65–67.

[2] ALLAN, G. R.: *On a class of locally convex algebra*, Proc. London Math. Soc. (3) **17** (1967), 91–114.

[3] HENNINGS, M. A.: *Topologies on BP^*-algebras*, J. Math. Anal. Appl. **140** (1989), 289–300.

[4] HUSAIN, T.—WARSI, S. A.: *Positive functionals on BP^*-algebras*, Period. Math. Hungar. **8** (1977), 15–28.

[5] HUSAIN, T.—WARSI, S. A.: *Representations of BP^*-algebras*, Math. Japon. **21** (1976), 237–247.

[6] RICHART, C. E.: *General Theory of Banach Algebras*, Van Nostrand, Princeton N. J., 1960.

[7] ROBERTSON, A. P.—ROBERTSON, W.: *Topological Vector Spaces*. Cambridge Tracts in Math. and Math. Phys. 53, Cambridge Univ. Press, London, 1973.

Received July 31, 1992
Revised July 6, 1993

Ecole Normale Supérieure
Avenue Oued Akreuch
Takaddoum, Rabat
B.P. 5118
MAROC