Christa Binder; Edmund Hlawka; Johannes Schoissengeier
Über einige Beispiele für Anwendungen der Theorie der Gleichverteilung

Mathematica Slovaca, Vol. 43 (1993), No. 4, 427--446

Math. Slovaca, 43 (1993), No. 4, 427–446

Mathematica Slovaca

ÜBER EINIGE BEISPIELE FÜR ANWENDUNGEN DER THEORIE DER GLEICHVERTEILUNG

CHRISTA BINDER *) — EDMUND HLAWKA *)
— JOHANNES SCHOISSENGEIER **)

(*Communicated by Robert F. Tichy*)

ABSTRACT. Some examples of applications of the theory of uniform distribution mod 1 are given: to modular functions and Hermitian matrices, to mechanics, to the set of spheres in higherdimensional spaces, and to convex bodies.

Einleitung

In dieser Arbeit wird gezeigt, daß die Theorie der Gleichverteilung etliche Anwendungen auf verschiedene Gebiete der Geometrie und der Mechanik gestattet. In §1 geben wir ein Beispiel für die Anwendung auf die Modulfigur (s. Hlawka – Schoißengeier [8] und Apostol [1]). Es wird eine Quadraturformel aufgestellt und eine Folge von primitiven, reduzierten, positiv definiten, binären quadratischen Formen untersucht. Dabei werden auch gute Gitterpunkte (s. Hlawka [5]) benützt.

In §2 werden im Zusammenhang mit der Picardschen Gruppe analoge Überlegungen für positiv definite Hermitesche Formen aufgestellt. Dieses Thema findet auch in anderer Hinsicht wieder Interesse; es sei nur auf Swan [13] hingewiesen. Hier besteht die Möglichkeit einer Anwendung auf die Zyklographie.

Das dritte Beispiel bringt eine Anwendung auf die Mechanik, und zwar auf ein Problem aus der Ballistik (Ricochet). Im Unterschied zu §2, wo es sich um Scharen von Kreisen handelt, haben wir es hier mit Parabeln zu tun.

In §4 behandeln wir anschließend an §2 Sphären im 3- und allgemein in höherdimensionalen Räumen. Wir betrachten die Menge der Sphären im Möbius-Lieschen Sinn, die Ebenen eingeschlossen, wie es in der Kugelgeometrie üblich

AMS Subject Classification (1991): Primary 11F03, 11J71, 11K06, 11R11. Secondary 52A15, 52A22, 60D05, 70D99.

Key words: Uniform distribution, Modular form.

ist, und zeigen, wie man in dieser Menge einen Gleichverteilungsbegriff einführen kann.

Im §5 wird die Eulersche Gleichung aus der Differentialgeometrie untersucht. Es werden zunächst Normalschnitte von Flächen in einem Punkt im 3-dimensionalen Raum, bzw. in höherdimensionalen Räumen, betrachtet. Dann untersuchen wir Normalschnitte von konvexen Flächen, wobei die Menge all dieser Normalschnitte nicht mehr durch einen festgehaltenen Punkt zu gehen braucht. Hier findet sich eine Gelegenheit, die berühmte Formel von M i n k o w - s k i (s. [11]) anzuwenden. Die mittlere Breite des konvexen Körpers wird dabei durch eine gleichverteilte Folge von Normalschnitten und von Punkten auf der Fläche angenähert.

In §6 wird eine weitere Konstruktion von Hermiteschen Matrizen gegeben.

Die hier gegebenen Beispiele gestatten noch eine Fülle weiterer Anwendungen, und wir hoffen, einige Anregungen zu näheren Untersuchungen gegeben zu haben.

Wir danken dem Referenten für seine Bemerkungen, besonders für den Hinweis auf die Verwendung von Fibonacci-Gitterpunkten (vgl. [14]).

§1. Modulfigur

Im ersten Beispiel wenden wir die Theorie der Gleichverteilung auf die bekannte Modulfigur an.

Wir betrachten die Abbildung

$$z(x,y) = x - \frac{1}{2} + \mathrm{i}\sqrt{\frac{1}{y^2} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2} \tag{1}$$

vom offenen Einheitsquadrat $E^2 := (0,1)^2$ auf das Innere des Fundamentalbereichs F der Modulgruppe Γ, wobei

$$F = \{z \mid |z| > 1,\ \operatorname{Im} z > 0,\ |\operatorname{Re} z| < 1/2\}.$$

Die Abbildung ist umkehrbar eindeutig und in beiden Richtungen beliebig oft differenzierbar.

Es sei nun p eine ungerade Primzahl und $1 \le g < p$ so gewählt, daß $(1,g)$ ein guter Gitterpunkt ist. Das bedeutet, daß es eine Konstante $c > 0$ gibt, sodaß für jede Funktion $f\colon [0,1]^2 \to \mathbb{C}$, deren Totalvariation V_f endlich ist, gilt

$$\left|\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p-1} f\bigl(k/p, \{gk/p\}\bigr) - \int_0^1\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right| \le cV_f\frac{\log^2 p}{p}. \tag{2}$$

Dabei ist $\{x\} = x - [x]$ der Bruchteil von x. Wir setzen $\omega_{kp} = z\left(\frac{k}{p}, \left\{\frac{gk}{p}\right\}\right)$ für $1 \leq k < p$. Dann ist ω_{kp} eine quadratische Irrationalzahl aus F, die Anlaß zu einer primitiven reduzierten positiv definiten binären quadratischen Form f_{kp} gibt, deren erste Wurzel ω_{kp} ist.

Sind nämlich a_{kp}, b_{kp}, c_{kp} die Koeffizienten der Form, so folgt aus

$$-\frac{b_{kp}}{2a_{kp}} = \frac{k}{p} - \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \frac{c_{kp}}{a_{kp}} = |\omega_{kp}|^2 = \frac{1}{\{gk/p\}^2}, \tag{3}$$

daß man, um eine primitive Form mit ganzen Koeffizienten zu erhalten,

$$\begin{aligned} a_{kp} &= p^3 \{gk/p\}^2, \\ b_{kp} &= (1/2 - k/p)\, 2p^3 \{gk/p\}^2 = (p-2k)p^2 \{gk/p\}^2 \\ c_{kp} &= p^3, \end{aligned} \tag{4}$$

zu wählen hat. Diese Formen haben die Diskriminante

$$D_{kp} = -p^4 \{gk/p\}^2 \left(4p^2 - (p-2k)^2 \{gk/p\}^2\right). \tag{5}$$

Die Klassenzahl $h(D_{kp})$ strebt mit p gegen unendlich.

Wir haben auf dem Fundamentalbereich F das Maß

$$\frac{\mathrm{d}z}{(\operatorname{Im} z)^2} = \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{y^2}. \tag{6}$$

Ist $f\colon F \to \mathbb{C}$ eine bezüglich dieses Maß es integrierbare Funktion, so ergibt sich

$$\int_F f(x,y)\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{y^2} = \int_0^1\int_0^1 f\big(z(x,y)\big)\frac{1}{\frac{1}{y^2} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2} |\operatorname{Det} J_z(x,y)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

wobei $J_z(x,y)$ die Jacobimatrix von z im Punkt (x,y) bezeichnet. Also ist

$$\begin{aligned}\int_F f(x,y)\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{y^2} &= \int_0^1\int_0^1 f\big(z(x,y)\big)\frac{1}{y^3}\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\left(\frac{1}{y^2} - \left(x-\frac{1}{2}\right)^2\right)^{3/2}} \\ &= \int_0^1\int_0^1 f\big(z(x,y)\big)\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\left(1 - y^2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\right)^{3/2}}.\end{aligned}$$

Damit haben wir die Quadraturformel

$$\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p-1} f(\omega_{kp}) \frac{1}{\left(1-\left\{\frac{gk}{p}\right\}^2\left(\frac{k}{p}-\frac{1}{2}\right)^2\right)^{3/2}} - \int_F f(x,y)\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{y^2} = O\left(\frac{\log^2 p}{p}\right) \tag{7}$$

für genügend glattes f.

Betrachtet man an Stelle der Punkte $\left(\frac{k}{p}, \left\{\frac{gk}{p}\right\}\right)$ die Punkte $\left(\frac{k}{F_m}, \left\{\frac{F_{m-1}k}{F_m}\right\}\right)$, wo F_m die m-te Fibonacci-Zahl bezeichnet, so lät sich, wie in [14] gezeigt wurde, sogar $O\left(\frac{\log F_m}{F_m}\right)$ erreichen. Siehe auch [12].

Wir weisen auch auf die Arbeit von Artin (siehe [2]) hin.

Betrachten wir die Modulfunktion J an der Stelle

$$\frac{-b+\mathrm{i}\sqrt{D}}{2a} = \omega_{kp} \tag{8}$$

so ist sie bekanntlich eine ganze algebraische Zahl. Es wäre interessant, diese Zahlen näher zu untersuchen.

Sei nun $s \geq 1$ eine natürliche Zahl. Wir betrachten die Abbildung $z_s = z \times \cdots \times z$ (s mal) von E^{2s} in das s-fache Produkt der Modulfigur. Damit wird jetzt jeder $2s$-dimensionalen gleichverteilten Folge in E^{2s} eine Folge in Γ^s zugeordnet. Nehmen wir insbesondere einen guten Gitterpunkt $g = (1, g_1, \ldots, g_{2s-1})$ zu einer Primzahl p, so wird der zugehörigen Folge

$$\frac{k}{p},\; g_1\frac{k}{p},\; \ldots,\; g_{2s-1}\frac{k}{p} \qquad (1 \leq k \leq p-1)$$

eine Folge von reduzierten quadratischen Formen zugeordnet. Es wäre interessant, diese Kette von quadratischen Formen für ein festes k zu untersuchen.

In diesem Zusammenhang weisen wir auch auf Hlawka [6] hin.

§2. Gaußsche Zahlen

Es sei $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ der Ring der ganzen Gaußschen Zahlen und $G := SL(2, \mathbb{Z}[\mathrm{i}])$ die zugehörige Picardsche Gruppe.

Wir betrachten positiv definite Hermitesche Formen $f\colon \mathbb{C}\times\mathbb{C} \to \mathbb{R}$.

$$f(u,v) = a|u|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,(b\bar{u}v) + c|v|^2 \tag{1}$$

mit reellen a, c und komplexem b. Ergänzt man auf ein Quadrat, so ergibt sich

$$f(u,v) = a\left(\left|u + \frac{b}{a}v\right|^2 + \frac{ac - |b|^2}{a^2}|v|^2\right). \tag{2}$$

Wir nennen zwei solche Formen f und g äquivalent, wenn es ein positives $s > 0$ und ein

$$\sigma = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in G$$

gibt mit

$$f(u,v) = sg(\alpha u + \beta v, \gamma u + \delta v).$$

Jede Form ist dann mit einer äquivalent, deren erster Koeffizient gleich 1 ist. Diese lassen sich eindeutig in der Form

$$f(u,v) = |u + zv|^2 + \xi^2|v|^2 \tag{3}$$

schreiben, wobei $z \in \mathbb{C}$ und $\xi > 0$ ist. Wir identifizieren dann diese Formen mit $\mathbb{C} \times (0,\infty)$ (siehe [3], [4], [10], [13]).

G operiert auf $\mathbb{C} \times (0,\infty)$ auf folgende Weise:

$$\sigma(z,\xi) = \left(\frac{(\bar\alpha + \bar z\bar\gamma)(\beta + z\delta) + \xi^2\bar\gamma\delta}{|\alpha + z\gamma|^2 + \xi^2|\gamma|^2}, \frac{\xi}{|\alpha + z\gamma|^2 + \xi^2|\gamma|^2}\right). \tag{4}$$

Insbesondere gilt:

(1) Ist $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, so ist $\sigma(z,\xi) = (z + \beta, \xi)$.

(2) Ist $\varepsilon^2 = -1$, also $\varepsilon = \pm i$ eine Einheit, so ist mit $\sigma = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \bar\varepsilon \end{pmatrix}$

$$\sigma(z,\xi) = (-z,\xi).$$

(3) Ist $\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, so ist $\sigma(z,\xi) = \left(\frac{-\bar z}{|z|^2 + \xi^2}, \frac{\xi}{|z|^2 + \xi^2}\right)$.

Auf diese Weise sieht man, daß jedes Paar $(z',\xi') \in \mathbb{C} \times (0,\infty)$ mit einem Paar (z,ξ) äquivalent ist, das $0 \le \operatorname{Re} z \le \frac{1}{2}$, $|\operatorname{Im} z| \le \frac{1}{2}$ und $|z|^2 + \xi^2 \ge 1$ erfüllt. Die zugehörige Hermitesche Form heißt dann reduziert.

Es sei jetzt wieder

$$F = \left\{(z,\xi) \in \mathbb{C} \times (0,\infty),\ 0 < \operatorname{Re} z < \frac{1}{2},\ |\operatorname{Im} z| < \frac{1}{2},\ |z|^2 + \xi^2 > 1\right\} \tag{5}$$

und

$$V\colon E^3 = (0,1)^3 \to F\,,$$

$$V(x,y,z) = \left(\frac{x}{2} + \mathrm{i}\left(y - \frac{1}{2}\right), \sqrt{\frac{1}{z^2} - \left|\frac{x}{2} + \left(y - \frac{1}{2}\right)\mathrm{i}\right|^2}\,\right). \tag{6}$$

V ist bijektiv und in beiden Richtungen beliebig oft differenzierbar.

Es sei p eine ungerade Primzahl und $g = (1, g_1, g_2)$ ein guter Gitterpunkt. Das bedeutet, daß für jede periodische Funktion $h\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}$ mit einer endlichen Totalvariation V_h auf dem kompakten Einheitswürfel $[0,1]^3$ gilt:

$$\left|\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p-1} h(gk) - \int_{E^3} h(x)\,\mathrm{d}x\right| \le cV_h \frac{\log^3 p}{p}\,. \tag{7}$$

Dabei ist $c > 0$ eine absolute Konstante. Für die Wahl von g für verschiedene Primzahlen p siehe etwa [9].

Bezeichnet man mit

$$\omega_{kp} = \big(k/p, \{g_1 k/p\}\,, \{g_2 k/p\}\,\big), \tag{8}$$

so geben die Zahlen $V(\omega_{kp})$ Anlaß zu unendlich vielen positiv definiten reduzierten paarweise nicht äquivalenten Hermiteschen Formen mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$, nämlich

$$2p^3\{g_2k/p\}^2\,|u|^2 + 2p^2\{g_1k/p\}\,\mathrm{Re}\,\big((k + \mathrm{i}(2p\{g_1k/p\} - p))\bar{u}v\big) + 2p^3|v|^2. \tag{9}$$

Beachtet man, daß positiv definite binäre quadratische Formen mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}$ spezielle Hermitesche Formen sind, so folgt leicht, daß die Klassenzahl mit wachsender Diskriminante wieder gegen ∞ strebt. Die Klassenzahlen der zugehörigen Diskriminanten der obigen Formen sind also nicht beschränkt.

Analoge Überlegungen gelten für Hermitesche Formen, wo die Koeffizienten a, c entgegengesetztes Vorzeichen haben. Dann hat man es mit reellen Kreisen zu tun (Zyklographie!). Dieser Fall ordnet sich dem übernächsten Beispiel ($s = 2$) unter. Analog kann man wie im ersten Beispiel die Abbildung $V^s\colon (E^3)^s \to F^s$ betrachten, die jedem s-tupel von Punkten in E^3 ein s-tupel von Hermiteschen Formen zuordnet.

§3. Mechanik

Als dritte Anwendung betrachten wir ein Problem in der Mechanik. Es sei in der Ebene ein x,y-Koordinatensystem gegeben, die x-Achse sei elastisch mit dem Elastizitätskoeffizienten e $(0 < e \leq 1)$. Vom Nullpunkt werde ein Ball (Punkt) in der Richtung $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ $(0 < \alpha < \frac{\pi}{2})$ geworfen. Seine Geschwindigkeit sei zunächst 1. Wenn der Ball wieder auf die x-Achse trifft, so wird er reflektiert und in der Richtung $(\cos\alpha, e\sin\alpha)$ weiterfliegen. Bei der nächsten Reflexion in der Richtung $(\cos\alpha, e^2\sin\alpha)$, usw., beim k-ten Aufprall in der Richtung $(\cos\alpha, e^{k-1}\sin\alpha)$.

Die Bewegung des Massenpunktes wird durch die folgenden Differentialgleichungen dargestellt:

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = 0, \qquad \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} = -g \tag{1}$$

mit den Anfangsbedingungen an den Stellen t_k

$$\begin{aligned} x(t_k) &= x_k, & y(t_k) &= 0, \\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t_k) &= \cos\alpha, & \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t_k) &= e^{k-1}\sin\alpha. \end{aligned} \tag{2}$$

Integration ergibt sofort

$$\begin{aligned} x(t) &= (t - t_k)\cos\alpha + x_k, \\ y(t) &= -\frac{g}{2}(t - t_k)^2 + e^{k-1}(t - t_k)\sin\alpha. \end{aligned} \tag{3}$$

Wieder zur x-Achse fällt der Ball zum Zeitpunkt t_{k+1}. Wir müssen also folgende Gleichung lösen

$$0 = y(t_{k+1}) = -\frac{g}{2}(t_{k+1} - t_k)^2 + e^{k-1}(t_{k+1} - t_k)\sin\alpha.$$

Es ist also

$$t_{k+1} - t_k = \frac{2e^{k-1}\sin\alpha}{g}$$

und damit

$$x_{k+1} = \frac{2e^{k-1}\cos\alpha\sin\alpha}{g} + x_k.$$

Bezeichnen wir nun den Ausdruck $\frac{2\cos\alpha\sin\alpha}{g} = \frac{\sin 2\alpha}{g}$ mit B, so erhalten wir

$$x_{k+1} = x_k + Be^{k-1}.$$

Damit können wir die gesamte Wurfweite W nach dem k-ten Wurf berechnen als

$$W = B(1 + e + \cdots + e^{k-1}). \tag{4}$$

Ist $e = 1$, so erhalten wir die Folge (Bk), die gegen unendlich geht, ist $e < 1$, so erhalten wir die Folge $B\frac{1-e^k}{1-e}$, die für $k \to \infty$ gegen $\frac{B}{e-1}$ konvergiert.

Im Weiteren wollen wir $1 - e$ mit η bezeichnen.

Nun untersuchen wir die Folge der Wurfweiten mod 1 und interessieren uns insbesondere für die Häufigkeit des Landens in den Intervallen $(m, m + \frac{1}{2})$, die wir mit $\frac{A_1}{N}$ bezeichnen, bzw. in den Intervallen $(m + \frac{1}{2}, m + 1)$, wo die Häufigkeit $\frac{A_2}{N}$ sei.

Ist die Zahl B irrational, dann ist die Folge (Bk) (also im Fall $e = 1$) gleichverteilt mod 1, also sind $\frac{A_1}{N}$ und $\frac{A_2}{N}$ annähernd gleich groß, genauer gilt

$$\left|\frac{A_j}{N} - \frac{1}{2}\right| \le D_N \qquad (j = 1, 2)$$

wo D_N die Diskrepanz der Folge (Bk) ist, die ja für $N \to \infty$ gegen 0 geht.

Ist allerdings $e < 1$, so kann die Folge nicht gleichverteilt sein, denn sie konvergiert gegen $\frac{B}{1-e}$.

Betrachten wir ein festes k und vergleichen

$$B\frac{1-e^k}{1-e} = B\frac{1-(1-\eta)^k}{\eta} = B\left(k - \binom{k}{2}\eta + - \dots\right)$$

mit dem Fall der Gleichverteilung, also mit Bk, so ist die Differenz

$$\left|Bk - B\frac{1-e^k}{1-e}\right| \le B\eta k^2 \left(\frac{\binom{k}{2}}{k^2} + \frac{\binom{k}{3}\eta}{k^2} + \dots\right)$$

(wir haben k^2 herausgehoben).

Nehmen wir nun an, daß $k\eta < 1$ ist, so ist der Ausdruck in der Klammer $< 1 + \frac{1}{2!} + \cdots < 3$. Es ist also für $r = 1, 2, \dots, k$

$$\left|Br - B\frac{1-e^r}{1-e}\right| < 3Br^2\eta. \tag{5}$$

Bezeichnet $D_N(B,e)$ die Diskrepanz von $\left(B\frac{1-e^r}{1-e}\right)_{r\geq 1}$ und $D_N(B)$ die von $(Br)_{r\geq 1}$, so ist

$$|D_k(B,e) - D_k(B)| < 3B\eta k^2 \tag{6}$$

(Stetigkeit der Diskrepanzen!), also können wir für die Häufigkeit sagen

$$\left|\frac{A_j}{k} - \frac{1}{2}\right| < D_k(B) + 3B\eta k^2 \qquad (j = 1, 2).$$

Es gilt also *fast* Gleichverteilung, wenn $k < \sqrt[3]{\frac{1}{3B\eta}}$ ist, da dann

$$\left|\frac{A_j}{k} - \frac{1}{2}\right| < D_k + \frac{1}{k} \leq 2D_k \tag{7}$$

wird.

Man kann bei Benützung tieferliegender Sätze aus der Theorie der Gleichverteilung (z.B. der Sätze von H. Weyl und Vinogradow) sogar zeigen, daß auch für größeres k Gleichverteilung herrscht, aber, wie schon oben bemerkt, kann, wenn $e < 1$ ist, dies nicht für alle k gelten.

Nehmen wir noch zusätzlich an, daß auf der x-Achse ein Reibungskoeffizient μ vorhanden ist, und außerdem, daß die Geschwindigkeit nicht mehr 1 sondern allgemein v ist, dann ist die horizontale Geschwindigkeit zur Zeit t_k

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t_k) &= \big(\cos\alpha - (1+e)\mu(1+e+\cdots+e^{k-2})\sin\alpha\big)v \\ &= \left(\cos\alpha - \frac{1+e}{1-e}\mu(1-e^{k-1})\sin\alpha\right)v \end{aligned} \tag{8}$$

und die vertikale

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t_k) = ve^{k-1}\sin\alpha\,.$$

Wie vorhin erhält man für $t_k < t < t_{k+1}$, wo t_{k+1} wieder durch

$$x(t_{k+1}) = x_{k+1}\,, \qquad y(t_{k+1}) = 0$$

definiert ist,

$$\begin{aligned} x(t) &= (t-t_k)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t_k) + x_k\,, \\ y(t) &= -\frac{g}{2}(t-t_k)^2 + (t-t_k)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t_k)\,. \end{aligned}$$

(8) eingesetzt ergibt

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \frac{2e^{k-1}\sin\alpha}{g} v \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t_k) + x_k \\ &= v^2 \left(\frac{2e^{k-1}\sin\alpha}{g} \left(\cos\alpha - \mu \frac{1+e}{1-e}(1-e^{k-1})\sin\alpha \right) \right) + x_k . \end{aligned} \tag{9}$$

Ist

$$K = 1 + \frac{\log\left(1 - \dfrac{\cot\alpha}{\mu}\dfrac{1-e}{1+e}\right)}{\log e}$$

und $k > K$, so wird $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t_k) = 0$. Es genügt also, den Fall $1 \le k \le K$ zu betrachten.

Für die Wurfweite nach dem k-ten Aufprall erhalten wir durch Summieren

$$W = v^2 \left(B_1 \frac{1-e^k}{1-e} - B_2 \frac{(1-e^{k-1})(1-e^k)}{(1-e)^2} \right), \tag{10}$$

wobei zur Abkürzung

$$B_1 = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{g},$$

$$B_2 = \frac{2\sin^2\alpha}{g}\mu e$$

geschrieben wird.

Wie vorhin untersuchen wir den Fall $e = 1$ (auch v sei wieder 1), so wird die Wurfweite

$$B_1 k - B_2 k(k-1) \tag{11}$$

also, für den Fall, daß B_1, B_2 und 1 linear unabhängig sind, eine gleichverteilte Folge. Wieder wollen wir die Differenz Δ der Wurfweiten im Fall $e = 1$ und im allgemeinen Fall abschätzen. Für jedes r ($r = 1, \dots, k$) gilt ($1 - e = \eta$) laut (5)

$$\left| r - \frac{1-e^r}{1-e} \right| < 3r^2\eta .$$

und (mit ähnlicher Methode)

$$\left| \frac{1-e^r}{1-e}\frac{1-e^{r-1}}{1-e} - r(r-1) \right| < 27k^3\eta, \tag{12}$$

also wird

$$\left| B_1 \frac{1-e^r}{1-e} - B_2 \frac{1-e^{r-1}}{1-e} \frac{1-e^{r-1}}{1-e} \right| \leq 27\eta(B_1 r^2 + B_2 r^3)\,. \tag{13}$$

Wir können also auch in diesem Fall bei geeignetem k *fast* Gleichverteilung erreichen.

B e m e r k u n g . Ist $B_3 = (1+e)\mu \sin\alpha$ irrational, so liegt nach (8) bereits für $1 \leq r \leq k$ "fast" Gleichverteilung vor, denn dann können wir auf

$$B_3 \frac{1-e^{k-1}}{1-e}$$

die gleiche Überlegung anwenden wie vorher beim Fall, daß keine Reibung vorhanden ist.

Wir haben hier ein ganz einfaches Beispiel gewählt, aber man sieht bereits hier sehr deutlich, daß die Bewegung in ganz starker Weise von den Anfangsbedingungen abhängt, daß also Kausalität und Wahrscheinlichkeit nur zwei Facetten einer Wahrheit sind, sodaß auch ein Laplacescher Dämon, jedenfalls am Beginn einer Bewegung, keine Vorhersagen machen kann.

§4. Sphären

Als viertes Beispiel wählen wir ein Beispiel aus der Geometrie. Wir betrachten alle Sphären im s-dimensionalen Raum, in homogenen Koordinaten geschrieben[1]

$$a(y_1^2 + \cdots + y_s^2) + 2(b_1 y_1 + \cdots + b_s y_s)y_0 + c y_0^2 = 0 \tag{1}$$

oder kurz

$$ay^2 + 2byy_0 + cy_0^2 = 0 \tag{1'}$$

(wobei $y = (y_1, \ldots, y_s)$ und $b = (b_1, \ldots, b_s)$ vektoriell geschrieben sind). Wir lassen auch die Fälle $a = 0$, $b \neq 0$ (Ebene) und $a = b = 0$, $c \neq 0$ (uneigentliche Doppelebene) zu, wie dies in der Kugelgeometrie üblich ist. Wir setzen voraus, daß $b^2 - ac = D$ positiv ist (wir wollen ja reelle Sphären!), wo $b^2 = b_1^2 + \cdots + b_s^2$ ist. Ist $a \neq 0$, so liegt eine Sphäre mit Radius $R = \frac{\sqrt{D}}{|a|}$ vor. Wir denken uns

[1] Vgl. auch [6], Teil 1, wo alle Geraden in P^3 behandelt werden. Bekanntlich hängen Sphären und Gerade durch die Geraden-Kugeltransformation zusammen, welche allerdings durch das Imaginäre hindurchgeht. Dies soll in einer weiteren Arbeit behandelt werden.

jede Sphäre doppelt überdeckt, sodaß auch $-\frac{\sqrt{D}}{|a|}$ als Radius zugelassen ist, wie dies seit Lie üblich ist.

Die Sphären sind bestimmt durch a, c, $b_1, \ldots, b_s$ und $\sqrt{D} = \rho$. Es darf nicht alles 0 sein. Es ist dann

$$b_1^2 + \cdots + b_s^2 = \rho^2 + ac. \tag{2}$$

Wir setzen nun $a = u + v$, $c = u - v$; dann ist $ac = u^2 - v^2$ und

$$b_1^2 + \cdots + b_s^2 + v^2 = \rho^2 + u^2.$$

Da homogene Koordinaten vorliegen, sind diese Größen nur bis auf einen Faktor $\neq 0$ bestimmt. Wir wählen diesen Faktor so, daß $\rho^2 + u^2 = 1$, also $b_1^2 + \cdots + b_s^2 + v^2 = 1$ ist. Die Menge dieser Sphären ist also nichts anderes als das direkte Produkt

$$S^{s+1} \times S^1. \tag{3}$$

Wählen wir eine gleichverteilte Folge auf diesem Produkt, so liegt diese Folge innerhalb der Menge aller Sphären überall dicht und jede Sphäre läßt sich beliebig genau durch Glieder dieser Folge approximieren, wie dies allgemein in der Arbeit H l a w k a [6] dargestellt ist. Wir nennen daher die Sphären, die dieser Folge zugeordnet sind, gleichverteilt in der Menge der Sphären.

Eine solche Folge können wir folgendermaßen konstruieren (vgl. [7]):

Es sei zunächst s eine gerade Zahl, $s = 2m$, dann wählen wir folgende Parameterdarstellung:

$$\begin{aligned}
b_1 &= \sqrt{1 - v_1^2}\cos 2\pi\phi_1\,, \\
b_2 &= \sqrt{1 - v_1^2}\sin 2\pi\phi_1\,, \\
b_3 &= v_1\sqrt{1 - v_2^2}\cos 2\pi\phi_2\,, \\
b_4 &= v_1\sqrt{1 - v_2^2}\sin 2\pi\phi_2\,, \\
&\;\;\vdots \\
b_{2m-1} &= v_1 \ldots v_{m-1}\sqrt{1 - v_m^2}\cos 2\pi\phi_m\,, \\
b_s = b_{2m} &= v_1 \ldots v_{m-1}\sqrt{1 - v_m^2}\sin 2\pi\phi_m\,, \\
v = b_{2m+1} &= v_1 \ldots v_{m-1} v_m\,,
\end{aligned} \tag{4}$$

wobei

$$\begin{aligned} v_1 &= w_1^{\frac{1}{2m-1}}\,, \\ v_2 &= w_2^{\frac{1}{2m-3}}\,, \\ &\vdots \\ v_{m-1} &= w_{m-1}^{\frac{1}{3}}\,, \\ v_m &= 1-2u \end{aligned} \tag{5}$$

ist. Es ist stets $0 \le w_j < 1$, $0 \le u < 1$, $0 \le \phi_j < 1$ für alle j.

Ist s ungerade, $s = 2m+1$ dann wählen wir die Parameterdarstellung

$$\begin{aligned} b_1 &= \sqrt{1-v_1^2}\cos 2\pi\phi_1\,, \\ b_2 &= \sqrt{1-v_1^2}\sin 2\pi\phi_1\,, \\ b_3 &= v_1\sqrt{1-v_2^2}\cos 2\pi\phi_2\,, \\ b_4 &= v_1\sqrt{1-v_2^2}\sin 2\pi\phi_2\,, \\ &\vdots \\ b_s = b_{2m+1} &= v_1 \dots v_m \cos 2\pi\phi_{m-1}\,, \\ v = b_{2m+2} &= v_1 \dots v_m \sin 2\pi\phi_{m-1}\,, \end{aligned} \tag{6}$$

wobei

$$\begin{aligned} v_1 &= w_1^{\frac{1}{2m}}\,, \\ v_2 &= w_2^{\frac{1}{2(m-1)}}\,, \\ &\vdots \\ v_m &= w_m^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{7}$$

ist. Dabei gelte $0 \le v_j < 1$, $0 \le \phi_j < 1$ für alle j. Sei $\rho = \cos 2\pi\psi$, $u = \sin 2\pi\psi$. Man nimmt nun eine gleichverteilte Folge

$$\left(w_1^{(k)}, \dots, w_m^{(k)}, \phi_1^{(k)}, \dots, \phi_m^{(k)}, \psi^{(k)}, u^{(k)}\right) \qquad (k = 1, \dots, n)$$

im E^{2m+2} und erhält so eine Folge von Sphären, die in der Menge aller Sphären überall dicht sind, ja sogar gleichmäßig dicht.

§5. Krümmungen

Dieses Beispiel behandelt die Eulersche Gleichung aus der Differentialgeometrie:

Sei P ein Punkt auf einer glatten Fläche Φ im 3-dimensionalen Raum. Wir betrachten die Normalschnitte durch P. Dann gilt bekanntlich für die Krümmung

$$\kappa = \frac{1}{R_1}\cos^2\phi + \frac{1}{R_2}\sin^2\phi\,, \tag{1}$$

wo $\frac{1}{R_1}$ und $\frac{1}{R_2}$ die Hauptkrümmungen sind und ϕ die bekannte Bedeutung hat: Sind r_1 und r_2 die Hauptkrümmungsrichtungen und ist r die Richtung der Tangente der Kurve, die von dem Normalschnitt ausgeschnitten wird, dann ist ϕ der Winkel zwischen r und r_1. Ist $R_1 = R_2$, so wählen wir r_1, r, r_2 beliebig, aber $r_1 \perp r_2$.

Betrachten wir nun eine gleichverteilte Folge solcher Normalschnitte die durch

$$\phi_j = 2\pi\psi_j \qquad (j = 1, \ldots, N)$$

gegeben ist. D_N sei die Diskrepanz der Folge (ψ_j). Betrachten wir die Folge der Krümmungen $\kappa_j = \kappa(\psi_j)$, dann ist

$$\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\kappa_j = \frac{1}{NR_1}\sum_{j=1}^{N}\cos^2\phi_j + \frac{1}{NR_2}\sum_{j=1}^{N}\sin^2\phi_j\,.$$

Aus der Definition der Diskrepanz folgt

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\cos^2 2\pi\psi_j - \int_0^1 \cos^2 2\pi\psi\,\mathrm{d}\psi\right| \le 2\pi D_N\,. \tag{2}$$

Das gleiche gilt natürlich für den zweiten Summanden.

Der Wert der Integrale ist $\frac{1}{2}$, daher wird

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\kappa_j - H\right| \le 2\pi D_N\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \tag{3}$$

wo H die mittlere Krümmung ist.

Es kann natürlich auch der Fall eintreten, daß die linke Seite von (2), bzw. (3) Null ist. Dies gilt, z.B. bei (2) dann, wenn $\psi_j = \frac{j}{N}$ ist.

Bis jetzt haben wir den Punkt x auf der Fläche festgehalten. Nun wollen wir auch den Punkt variieren lassen, und nehmen der Einfachheit halber an, daß die Fläche Φ der dreimal stetig differenzierbare Rand eines konvexen Körpers ist. Ihre Krümmung $K(x)$ sei überall positiv. Wir wählen den Koordinatenursprung im Inneren des Körpers und ordnen jedem Punkt $x \in \Phi$ seine nach außen gerichtete Flächennormale $o_x \in S^2$ zu. Diese Zuordnung ist umkehrbar eindeutig; $x(o)$ sei ihre Inverse. Ist $\mathrm{d}o$ das Flächenelement auf S^2 und $\mathrm{d}x$ das auf Φ, so ist $K\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}o$. $p(o) = \langle x(o), o\rangle$ sei die Stützfunktion von Φ.

Wir betrachten jetzt eine gleichverteilte Folge $(o_n, \psi_n)_{n\geq 1}$ in $S^2 \times S^1$. Dann ist

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \frac{\kappa\big(x(o_n), \psi_n\big)}{K\big(x(o_n)\big)} = \frac{1}{4\pi}\int_{S^2} \frac{H\big(x(o)\big)}{K\big(x(o)\big)}\,\mathrm{d}o = \frac{1}{4\pi}\int_{\Phi} H(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Nun gilt nach Minkowski [11], insbesondere §4, (28), (29) und (30)

$$\int_{\Phi} H(x)\,\mathrm{d}x = \int_{S^2} p(o)\,\mathrm{d}o\,.$$

Es ist also die mittlere Breite

$$B(\Phi) = \frac{1}{4\pi}\int_{S^2} p(o)\,\mathrm{d}o = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\frac{\kappa\big(x(o_n), \psi_n\big)}{K\big(x(o_n)\big)}$$

der konvexen Fläche, bzw. des konvexen Körpers, der von Φ berandet wird.

Wir wollen jetzt eine endliche Folge betrachten und eine Restabschätzung durchführen: dazu betrachten wir die Funktion

$$F(o, \psi) = R_1\big(p(o)\big)\cos^2 2\pi\psi + R_2\big(p(o)\big)\sin^2 2\pi\psi\,,$$

das ist eine Funktion von o auf S^2 und von ψ auf S^1 $(0 \leq \psi < 1)$. Wir bezeichnen das Maximum der Hauptkrümmungsradien mit R_1, ihr Minimum mit R_2. Es seien A_1 und A_2 so gewählt, daß

$$0 < A_1 < R_1 < A_2 \quad \text{und} \quad 0 < A_1 < R_2 < A_2\,, \qquad R_2 \leq R_1\,.$$

Auf Φ gilt

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{R_1 + R_2 + \sqrt{(R_1+R_2)^2 - 4R_1R_2}}{2}\,, \\ R_2 &= \frac{R_1 + R_2 - \sqrt{(R_1+R_2)^2 - 4R_1R_2}}{2}\,. \end{aligned} \tag{4}$$

Nun ist

$$R_1 + R_2 = p_{11}(o) + p_{22}(o) + p_{33}(o)$$

und

$$R_1 R_2 = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p_{11} & p_{13} \\ p_{31} & p_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p_{22} & p_{23} \\ p_{32} & p_{33} \end{vmatrix} \tag{5}$$

(wo $p_{ik} = \dfrac{\partial^2 p}{\partial o_i \partial o_k}$ ist).

Wir wollen nun

$$\Delta = |F(o', \psi') - F(o, \psi)|$$

abschätzen. (Wir schreiben jetzt kürzer $R_i\big(p(o)\big) = R_i(o)$, bzw. $R_i\big(p(o')\big) = R_i(o')$, $i = 1, 2$ und $2\pi\psi = \phi$, bzw. $2\pi\psi' = \phi'$.) Es ist

$$\begin{aligned}\Delta = |&R_1(o')\cos^2\phi' - R_1(o)\cos^2\phi + R_2(o')\sin^2\phi' - R_2(o)\sin^2\phi \\ &+ R_1(o')\cos^2\phi - R_1(o')\cos^2\phi + R_2(o)\sin^2\phi' - R_2(o)\sin^2\phi'|\,.\end{aligned}$$

Also ist

$$\begin{aligned}\Delta &\le \big|\big(R_1(o') - R_1(o)\big)\cos^2\phi\big| + \big|R_1(o')(\cos^2\phi' - \cos^2\phi)\big| \\ &\quad + \big|\big(R_2(o') - R_2(o)\big)\sin^2\phi'\big| + \big|R_2(o)(\sin^2\phi' - \sin^2\phi)\big| \\ &\le 4A_2|\phi' - \phi| + |R_1(o') - R_1(o)| + |R_2(o') - R_2(o)|\,.\end{aligned}$$

Wir haben hier $\cos^2$ und $\sin^2$ durch 1 abgeschätzt, und $|\cos^2\phi' - \cos^2\phi| = |\sin^2\phi' - \sin^2\phi| = |(\sin\phi' - \sin\phi)(\sin\phi' + \sin\phi)| \le 2|\sin\phi' - \sin\phi| \le 2|\phi' - \phi|$ benützt. Nun benützen wir (4) um Δ weiter abzuschätzen:

Es sei M eine obere Schranke für alle $|p_{ik}|$ und alle $p_{ikl} = \left|\dfrac{\partial^3 p}{\partial o_i \partial o_k \partial o_l}\right|$. Dann folgt aus (4) und (5), wenn wir $R_1 + R_2 = D_1$, $R_1 R_2 = D_2$ und $D_3 = \sqrt{D_1^2 - 4D_2}$ setzen,

$$2|R_i(o') - R_i(o)| \le |D_1(o) - D_1(o')| + |D_3(o) - D_3(o')|\,.$$

Es ist

$$|D_1(o) - D_1(o')| \le 3M|o - o'|$$

und

$$|D_2(o) - D_2(o')| \le 6M^2|o - o'|\,,$$

also

$$\begin{aligned}|D_3(o) - D_3(o')| &= \left|\sqrt{D_1^2(o) - 4D_2(o)} - \sqrt{D_1^2(o') - 4D_2(o')}\,\right| \\ &\leq \sqrt{|D_1^2(o) - D_1^2(o')|} + 2\sqrt{|D_2(o) - D_2(o')|} \leq (\sqrt{6} + 4\sqrt{2}\,)M|o - o'|^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Es wird also

$$|\Delta| \leq 10(A_2 + M)\left(|\phi' - \phi| + \sqrt{|o - o'|}\,\right).$$

Nun ist

$$|\phi - \phi'| + \sqrt{|o - o'|} \leq 10\left(\sqrt{|\phi - \phi'|^2 + |o - o'|^2}\,\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Es ist also $F(o, \psi)$ eine Lipschitzfunktion der Ordnung $\frac{1}{2}$ auf $S^2 \times S^1$ mit der Lipschitzkonstanten $10(A_2 + M)$. Es sei nun $D^{\Lambda}_{N,\frac{1}{2}}$ die Diskrepanz der zugehörigen Doppelfolge (o_i, ψ_i) (zur Definition von $D^{\Lambda}_{N,\frac{1}{2}}$ vgl. [6]), dann erhalten wir

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \frac{\kappa(P_i, \psi_i)}{K(P_i)} - B(\Phi)\right| \leq 10(M + B)D^{\Lambda}_{N,\frac{1}{2}}.$$

Dieses Ergebnis lät sich verallgemeinern. Wir betrachten jetzt eine l-dimensionale Hyperfläche im $\mathbb{R}^{l+1}$ ($l > 2$). Die zugehörige Eulersche Gleichung lautet

$$\kappa = \kappa_1 s_1^2 + \cdots + \kappa_l s_l^2$$

wo $s_1^2 + \cdots + s_l^2 = 1$ ist. $\kappa_1, \ldots, \kappa_l$ sind die Hauptkrümmungen in einem Punkt der Hyperfläche. Wir schreiben kurz $s = (s_1, \ldots, s_l)$. Betrachten wir nun eine Folge $s^{(1)}, \ldots, s^{(n)}$ und ist D^{Λ}_N die Lipschitzdiskrepanz dieser Folge (vergl. [6]), so erhält man analog zu (3), da $\int s_j^2\,\mathrm{d}o = \frac{1}{l}$ ist

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\kappa_j - \frac{1}{l}\left(\frac{1}{R_1} + \cdots + \frac{1}{R_l}\right)\right| \leq 2lD^{\Lambda}_N.$$

§6. Weitere Konstruktionen von Hermiteschen Matrizen

Sei $\operatorname{Det}(U - e^{i\phi} E) \neq 0$. Dann ist

$$H = (-i)(U + e^{i\phi} E)(U - e^{i\phi} E)^{-1}$$

eine Hermitesche Matrix, wenn die Umkehrmatrix

$$U = e^{i\phi}(H - iE)(H + iE)^{-1} = \begin{bmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{bmatrix}$$

unitär ist.

Sei Δ die Determinante von $U - e^{i\phi} E$

$$\Delta = 2e^{i\phi}(\cos\phi - \operatorname{Re} a).$$

Wir können nun H berechnen:

$$H = \frac{1}{\operatorname{Re} a - \cos\phi} \begin{bmatrix} \sin\phi + \operatorname{Im} a & i\bar{b} \\ -ib & \sin\phi - \operatorname{Im} a \end{bmatrix}.$$

Ist weiters $a = a_1 + i a_2$, $b = b_1 + i b_2$, so wird

$$H = S + iA$$

wo S die symmetrische Matrix

$$S = \frac{1}{a_1 - \cos\phi} \begin{bmatrix} \sin\phi + a_2 & b_2 \\ b_2 & \sin\phi - a_2 \end{bmatrix}$$

und A die schiefe Matrix

$$A = \frac{1}{a_1 - \cos\phi} \begin{bmatrix} 0 & b_1 \\ -b_1 & 0 \end{bmatrix}$$

ist. Es ist weiters $O = (E - A)(E + A)^{-1}$

$$O = \frac{1}{(a_1 - \cos\phi)^2 + b_1^2} \begin{bmatrix} (\cos\phi - a_1)^2 - b_1^2 & -2b_1(a_1 - \cos\phi) \\ 2b_1(a_1 - \cos\phi) & (a_1 - \cos\phi)^2 - b_1^2 \end{bmatrix}$$

eine Drehung.

Setzen wir nun

$$a = \sqrt{1 - v^2}\, e^{2\pi i\alpha},$$
$$b = v\, e^{2\pi i\beta}$$

und $v = w^{1/2}$, also

$$a = \sqrt{1-w}\, e^{2\pi i \alpha},$$
$$b = \sqrt{w}\, e^{2\pi i \beta}$$

mit $|a|^2 + |b|^2 = 1$, $0 \le \alpha < 1$, $0 \le \beta < 1$, $v \le w$ (vgl. §4, (6)).

Es sei nun

$$(w_k, \alpha_k, \beta_k), \qquad 1 \le k \le N$$

eine gleichverteilte Folge in E^3 und

$$a_k = \sqrt{1-w_k}\, e^{2\pi i \alpha_k}, \qquad b_k = \sqrt{w_k}\, e^{2\pi i \beta_k},$$

so ist die Folge (a_k, b_k) auf der Sphäre S^3 gleichverteilt und wir erhalten eine Folge Hermitescher Matrizen (wir setzen zur Abkürzung $V_k = \sqrt{1-w_k}\cos 2\pi\alpha_k - \cos\phi$)

$$H_k = \frac{1}{V_k}\begin{bmatrix} \sin\phi + \sqrt{1-w_k}\sin 2\pi\alpha_k & i\sqrt{w_k}\, e^{-2\pi i \beta_k} \\ -i\sqrt{w_k}\, e^{2\pi i \beta_k} & \sin\phi - \sqrt{1-w_k}\sin 2\pi i \alpha_k \end{bmatrix}.$$

Es wird damit

$$S_k = \frac{1}{V_k}\begin{bmatrix} \sin\phi + \sqrt{1-w_k}\sin 2\pi\alpha_k & \sqrt{w_k}\sin 2\pi\beta_k \\ \sqrt{w_k}\sin 2\pi\beta_k & \sin\phi - \sqrt{1-w_k}\sin 2\pi\alpha_k \end{bmatrix}$$

und

$$A_k = \frac{1}{V_k}\begin{bmatrix} 0 & \sqrt{w_k}\cos 2\pi\beta_k \\ -\sqrt{w_k}\sin 2\pi\beta_k & 0 \end{bmatrix}$$

und es wird

$$O_k = \frac{1}{W_k^2 + w_k\cos^2 2\pi\beta_k}\begin{bmatrix} V_k^2 + w_k\cos^2 2\pi\beta_k & -2\sqrt{w_k}\cos 2\pi\beta_k V_k^2 \\ 2\sqrt{w_k}\cos 2\pi\beta_k V_k^2 & V_k^2 + w_k\cos^2 2\pi\beta_k \end{bmatrix}.$$

Wir haben in §1 und §2 quadratische bzw. Hermitesche Formen oder symmetrische und Hermitesche Matrizen von besonderer Bauart konstruiert. Damit können wir auch symplektische Matrizen konstruieren. Jede symplektische Matrix A hat die Gestalt

$$A = (E-T)(E+T)^{-1}$$

wo T eine infinitesimale symplektische Marix ist. Diese T haben die Gestalt

$$T = \begin{bmatrix} iH & -(S_1 - iS_2) \\ S_1 + iS_2 & -i\bar{H} \end{bmatrix}$$

wo S_1, S_2 symmetrische Matrizen und H eine Hermitesche Matrix ist. Wir können mittels der Formen in §1 und §2 sogar Scharen solcher T und damit auch Scharen von symplektischen Matrizen konstruieren.

REFERENCES

[1] APOSTOL, TOM M.: *Modular Functions and Dirichlet Series in Number Theory*, Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1976.

[2] ARTIN, E.: *Ein mechanisches System mit quasiergodischen Bahnen*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **3** (1929), 170–175.

[3] BIANCHI, L.: *Sui gruppi de sostituzioni lineari con coefficienti apparteneni a corpi quadratici immaginari*, Math. Ann. **40** (1892), 332–412.

[4] BLAHA, F.: *Über definite Hermitesche Formen*, Monatsh. Math. **47** (1939), 195–312.

[5] HLAWKA, E.: *Über einige Gitterreihen und Gitterfunktionen*, Sitzungsber. Österreich. Akad. Wiss. Math.-Naturwiss. Kl. Abt. II. **193** (1984), 247–287.

[6] HLAWKA, E.: *Beiträge zur Theorie der Gleichverteilung und ihren Anwendungen I*, Sitzungsber. Österreich. Akad. Wiss. Math.-Naturwiss. Kl. Abt. II. **197** (1989), 1–94.

[7] HLAWKA, E.: *Über die Konstruktion gleichverteilter Folgen auf Sphären, in der Drehgruppe und auf der unitären Gruppe.* (Im Erscheinen).

[8] HLAWKA, E.—SCHOISSENGEIER, J.: *Zahlentheorie, Eine Einführung*, Manz-Verlag, Wien, 1990.

[9] HUA, L. K.—WANG, Y.: *Applications of Number Theory to Numerical Analysis*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg and Science Press, Beijing, 1981.

[10] HUMBERT, G.: *Sur la réduction des formes d' Hermite dans un corps quadratiques imaginaire*, Compt. Rend. **161** (1915), 189–196.

[11] MINKOWSKI, H.: *Volumen und Oberfläche*, Math. Ann. **57** (1903), 447–495, (auch in: Gesammelte Abhandlungen II, 230-276, insbesondere Formeln (28), (29) und (30) auf S. 241).

[12] NIEDERREITER, H.: *Quasi-Monte Carlo methods and pseudo-random numbers*, Bull. Amer. Math. Soc. **84** (1978), 957–1041.

[13] SWAN, R. G.: *Generators and relations for certain special linear groups*, Adv. in Math. **6** (1971), 1–77.

[14] ZAREMBA, S. K.: *Good lattice points, discrepancy, and numerical integration*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **73** (1966), 293–317.

Received April 6, 1992

Revised December 14, 1992

*) *Institut für Technische Mathematik*
Technische Universität Wien
Wiedner Hauptstr. 8-10/1141
A-1040 Wien

**) *Institut für Mathematik*
Universität Wien
Strudlhofg. 4
A-1090 Wien