Mathematica Slovaca

Mária Barnovská; Viktor Vasiľevich Tikhomirov

О базисности Рисса корневых векторов нелокальных задач для системы дифференциальных уравнений

Mathematica Slovaca, Vol. 43 (1993), No. 2, 193--205

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/136579`

Math. Slovaca, 43 (1993), No. 2, 193–205

О БАЗИСНОСТИ РИССА КОРНЕВЫХ ВЕКТОРОВ НЕЛОКАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

М. БАРНОВСКА *) — В. В. ТИХОМИРОВ **) [1]

(*Communicated by Jozef Kačúr*)

ABSTRACT. Necessary and sufficient conditions for Riesz basisness of the system of root vectors for spectral problem of the type of Bicadze-Samarskij are studied. Non-local conditions for the system $Lu = u' + \mathbf{Q}(x)u$ of differential equations with complexvalued matrix coefficient are supposed. The conditions are formulated both without concrete form of boundary conditions and adjoint type conditions at points of dicsontinuity of the operators in question.

В работе устанавливаются необходимые и достаточные условия базисности Рисса систем корневых векторов спектральных задач типа Бицадзе-Самарского [1] с нелокальными условиями для системы дифференциальных уравнений.

Рассмотрение таких задач мотивировано тем, что во многих случаях можно свести обобщенную задачу о собственных значениях в пространстве скалярных или векторных функций к некоторой обычной задаче о собственных значениях в пространстве вектор-функций (см. А. М. Наймарк: Линейные дифференциальные операторы, М., «Наука», 1969, стр. 111–112).

В пространстве $\mathbb{C}^N$ комплексных векторных функций

$$u(x) = (u^1(x), \dots, u^N(x))$$

рассмотрим оператор

$$Lu = u'(x) + \mathbf{Q}(x)u(x) \tag{1}$$

AMS Subject Classification (1991): Primary 47E05. Secondary 34B05, 46B15.
Key words: Root vectors, Non-local problem, Riesz basisness.

[1]) Совместная работа возникла во время пребывания доц. В. В. Тихомирова в Братиславе в 1988 г. по плану сотрудничества между Московским университетом им. Ломоносова и Братиславским университетом им. Коменского.

с комплекснозначным матричным коэффициентом $\mathbf{Q}(x)$ с элементами $q_{ij}(x)$ $(i,j = 1,\dots,N)$ из класса L_2 на конечном интервале $[0,1]$. Пусть при помощи точек $0 = \xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_m < \xi_{m+1} = 1$ интервал $[0,1]$ разбивается на $m+1$ интервалов (ξ_{l-1},ξ_l), $l = 1,2,\dots,m+1$. Для оператора (1) поставим следующую спектральную задачу: найти собственные и присоединенные векторы оператора (1), удовлетворяющие условию

$$u(1) = \sum_{l=1}^{m} \mathbf{A}_l u(\xi_l), \tag{2}$$

где $\mathbf{A}_l$ – комплексные $N \times N$ числовые матрицы.

Обозначим через L^*v дифференциальный оператор, формально сопряженный к оператору (1), примененный к комплекснозначной функции $v \in \mathbb{C}^N$, т.е., положим

$$L^*v = -v'(x) + \mathbf{Q}^*(x)v(x), \tag{1*}$$

где $\mathbf{Q}^*(x)$ – сопряженная к $\mathbf{Q}(x)$ матрица (т.е., $\mathbf{Q}^* = \bar{\mathbf{Q}}^T$). Легко проверить, что сопряженной к задаче (1), (2) будет задача: найти собственные и присоединенные векторы оператора (1^*) на каждом из интервалов (ξ_{l-1},ξ_l), $l = 1,2,\dots,m+1$, удовлетворяющих условиям

$$v(0) = 0, \qquad [v]|_{\xi_l} = \mathbf{A}_l^* v(1), \tag{2*}$$

где $[v]|_\xi = v(\xi+0) - v(\xi-0)$ – скачок вектора $v(x)$ в точке $x = \xi$. Таким образом сопряженная задача (1^*), (2^*) является спектральной задачей с разрывным оператором.

Нам удалось перенести результаты работ [2] – [4] на случай разрывных операторов в пространстве вектор-функций и установить необходимые и достаточные условия для базисности Рисса систем собственных и присоединенных функций в терминах, не содержащих не только конкретный вид краевых условий, но и конкретный вид условий сопряжения в точках разрыва этих операторов.

Аналогично работе [2] введем в рассмотрение произвольную биортонормированную[1] в $L_2[0,1]$ пару обобщенных (в смысле В. А. Ильина) систем корневых векторов $\{u_n(x)\}$ и $\{v_n(x)\}$, удовлетворяющих трем условиям **A**:

1) для каждого номера $n = 1, 2, \ldots$ функции $u_n(x)$ и $v_n(x)$ абсолютно непрерывны, имеют первые производные, суммируемые с квадратом, и для некоторого числа λ_n на каждом интервале (ξ_{l-1}, ξ_l), $l = 1, 2, \ldots, m+1$, почти всюду удовлетворяют уравнениям

$$Lu_n - \lambda_n u_n = \Theta_n u_{n-1}\,, \qquad L^* v_n - \bar{\lambda}_n v_n = \Theta_{n+1} v_{n+1}\,, \tag{3}$$

где L и L^* – операторы вида (1) и (1*), а число Θ_n равно либо нулю, либо единице (в последнем случае дополнительно требуется, чтобы $\lambda_n = \lambda_{n-1}$), причем $\Theta_1 = 0$;

2) существует постоянная C_0 такая, что для всех номеров n справедливо неравенство

$$|\operatorname{Re}\lambda_n| \leqq C_0\,; \tag{4}$$

3) хотя бы одна из систем $\{u_n\}$, $\{v_n\}$ является полной в $L_2[0,1]$.

Биортонормированная пара, удовлетворяющая трем условиям **A**, включает в себя системы собственных и присоединенных векторов всех пар сопряженных задач для операторов (1) и (1*), для которых выполнено условие (4) и хотя бы одна из них является полной и минимальной (и, в частности, включает в себя системы собственных и присоединенных векторов пары задач (1), (2) и (1*), (2*)).

Центральным результатом настоящей работы является следующее утверждение.

---

[1] т.е., удовлетворяющую соотношениям

$$(u_k, v_n) = \int_0^1 u_k(x)\bar{v}_n(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{N}\int_0^1 u_k^i(x)\bar{v}_n^i(x)\,\mathrm{d}x = \delta_{kn}\,,$$

где

$$\delta_{kn} = \begin{cases} 1\,, & \text{если} \quad k = n\,, \\ 0\,, & \text{если} \quad k \neq n\,. \end{cases}$$

Основная теорема. *Пусть элементы матрицы* $\mathbf{Q} = \big(q_{ij}(x)\big)$ *принадлежат классу* $L_2[0,1]$. *Тогда для базисности Рисса каждой из систем* $\{u_n\}$ *и* $\{v_n\}$, *входящих в произвольную биортонормированную пару, удовлетворяющую трем условиям* $\mathbf{A}$, *необходимо и достаточно, чтобы были справедливы два неравенства*

$$\sum_{\lambda \leqq |\lambda_n| \leqq \lambda+1} 1 \leqq C_1 \qquad (\textit{для любого вещественного } \lambda \geqq 0)\,, \tag{5}$$

$$\|u_n\| \cdot \|v_n\| \leqq C_2 \qquad (\textit{для всех номеров } n)\,, \tag{6}$$

где символ $\|f\|$ *обозначает* $\Big(\sum\limits_{j=1}^{N} \int\limits_0^1 |f^j|^2 \,\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{2}}$, *а* C_1 *и* C_2 *подходящие постоянные.*

Доказательство.

1°. Сначала докажем достаточность условий (5), (6) для базисности Рисса системы $\{u_n(x)\}$ (а стало быть и $\{v_n(x)\}$), развивая технику работы [3], [4]. Для этого в силу теоремы Н. К. Бари [5] достаточно доказать, что для произвольной вектор-функции $f(x)$ из класса $L_2[0,1]$ справедливы неравенства

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(u_n,f)|^2 \|u_n\|^{-2} < \infty\,, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} |(v_n,f)|^2 \|v_n\|^{-2} < \infty\,. \tag{7}$$

Положим для краткости $G_l = [\xi_{l-1}, \xi_l]$, $l = 1, \ldots, m+1$,

$$(f,g)_{G_l} = \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{\xi_{l-1}}^{\xi_l} f^j(x) \bar{g}^j(x)\,\mathrm{d}x\,, \qquad \|f\|_{G_l} = \sqrt{(f,f)_{G_l}}\,.$$

Так как (в силу неравенства Коши-Буняковского)

$$|(u_n,f)_G|^2 \leqq (m+1) \sum_{l=1}^{m+1} |(u_n,f)_{G_l}|^2, \qquad \|u_n\|_G^{-2} \leqq \|u_n\|_{G_l}^{-2}\,,$$

(где $G = [0,1]$) и аналогичные соотношения справедливы и для $v_n(x)$ (причем $\|u_n\|_{G_l} \neq 0$, $\|v_n\|_{G_l} \neq 0$), то для доказательства соотношений (7) достаточно для каждого l установить неравенства

$$\sum_{n=1}^{\infty}{}' |(u_n,f)_{G_l}|^2 \|u_n\|_{G_l}^{-2} < \infty\,, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}{}' |(v_n,f)_{G_l}|^2 \|v_n\|_{G_l}^{-2} < \infty\,, \tag{8}$$

где штрих означает, что в сумме пропущены слагаемые, для которых соответствующие нормы равны 0.

Поскольку почти всюду на G_l функции u_n, v_n удовлетворяют уравнениям (3), то для них справедливы (см. [4]) оценки

$$\begin{aligned} &\sup_{x\in G_l} |u_n(x)| \leqq C_3\|u_n\|_{G_l}, \qquad &&\sup_{x\in G_l} |v_n(x)| \leqq \tilde{C}_3\|v_n\|_{G_l}, \\ &\|\Theta_n u_{n-1}\|_{G_l} \leqq C_4\|u_n\|_{G_l}, \qquad &&\|\Theta_{n+1} v_{n+1}\|_{G_l} \leqq \tilde{C}_4\|v_n\|_{G_l}. \end{aligned} \tag{9}$$

В работе [4] содержится доказательство справедливости неравенств подобных неравенствам (8), основанное лишь на оценках (9) и на предположении о том, что функции u_n и v_n являются почти всюду решениями уравнений (3). Тем самым доказательство достаточности завершено.

2°. Переходим к доказательству необходимости для базисности Рисса системы $\{u_n(x)\}$ (или $\{v_n(x)\}$) каждого из условий (5), (6).

Необходимость условия (6) даже для обычной базисности системы $\{u_n\}$ (или $\{v_n\}$) хорошо известна (см., например [6, стр. 272]). Остается доказать необходимость условия (5).

С этой целью для любого номера $l = 1, \ldots, m+1$, фиксируем компакт $K_l = [\xi_{l-1}, \xi_l - \delta]$ ($\delta > 0$ – фиксированное достаточно малое число). Достаточно показать, что существует положительная постоянная $C(l)$ такая, что для любого $\lambda \geqq 0$ справедлива оценка

$$\sum_{\lambda\leqq|\lambda_n|\leqq\lambda+1} \|u_n\|^2_{K_l} = \sum_{\lambda\leqq|\lambda_n|\leqq\lambda+1} \int\limits_{K_l} |u_n(x)|^2 \, dx \leqq C(l). \tag{10}$$

Действительно, поскольку в работе [4] установлено, что при выполнении условий основной теоремы найдется постоянная $\tilde{C}(l)$ такая, что для всех номеров n

$$\|u_n\|^2_{G_l} \leqq \tilde{C}(l)\|u_n\|^2_{K_l}, \tag{11}$$

то из оценки (10) получим неравенство

$$\sum_{\lambda\leqq|\lambda_n|\leqq\lambda+1} \|u_n\|^2_{G_l} \leqq C(l)\tilde{C}(l).$$

Суммируя эти неравенства по всем l от 1 до $m+1$ и обозначая через C_5 постоянную вида $C_5 = \sum\limits_{l=1}^{m+1} C(l)\tilde{C}(l)$, получим неравенство

$$\sum_{\lambda \leqq |\lambda_n| \leqq \lambda+1} \|u_n\|^2 \leqq C_5 . \tag{12}$$

Теперь остается заметить, что всякий базис Рисса почти нормирован, т.е., для базиса Рисса $\{u_n(x)\}$ существуют положительные постоянные $\beta_2 \geqq \beta_1 > 0$, такие, что для всех номеров n

$$\beta_2 \geqq \|u_n\| \geqq \beta_1 . \tag{13}$$

Из соотношений (12) и (13) вытекает справедливость условия (5) с постоянной C_1 равной $C_5\beta_1^{-2}$.

Итак, нам остается доказать справедливость оценки (10) для любого $l = 1, \ldots, m+1$ и любого $\lambda \geqq 0$. Сначала рассмотрим случай $\lambda \geqq \lambda_0$, где λ_0 – достаточно большое положительное число.

Фиксируем на компакте K_l произвольную точку x и обозначим R любое положительное число меньшее δ. Рассмотрим следующую вектор-функцию $w(|x-y|) = (w^1, \ldots, w^N)$, зависящую от растояния $r = |x-y|$ переменной точки y от фиксированной точки x компакта K_l, где

$$w^i(|x-y|) = \begin{cases} \dfrac{1}{R}\cos\big(\lambda|x-y|\big), & \text{при} \quad |x-y| \le R, \\ 0, & \text{при} \quad |x-y| > R, \end{cases} \tag{14}$$

для всех $i = 1, \ldots, N$.

Вычислим коэффициент Фурье w_n функции (14) в ее разложении по системе $\{u_n(y)\}$ с помощью формулы среднего значения [4] для регулярного решения уравнения (3):

$$\begin{aligned} u_n(x+r) = u_n(x)\exp(\lambda_n r) - \int_0^r \mathbf{Q}(x+t)u_n(x+t)\exp\big[\lambda_n(r-t)\big]\,\mathrm{d}t \\ + \Theta_n \int_0^r \exp\big[\lambda_n(r-t)\big]u_{n-1}(x+t)\,\mathrm{d}t . \end{aligned} \tag{15}$$

Получим

$$
\begin{aligned}
w_n = {} & u_n(x) \int_0^R w(r) \exp(\lambda_n r)\, \mathrm{d}r \\
& - \int_0^R w(r) \left\{ \int_0^r \mathbf{Q}(x+t) u_n(x+t) \exp\left[\lambda_n (r-t)\right] \mathrm{d}t \right\} \mathrm{d}r \\
& + \Theta_n \int_0^R w(r) \left\{ \int_0^r u_{n-1}(x+t) \exp\left[\lambda_n (r-t)\right] \mathrm{d}t \right\} \mathrm{d}r .
\end{aligned}
\tag{16}
$$

Так как для любых комплексных чисел z, z_1, z_2 справедливо неравенство

$$
|z-(z_1+z_2)|^2 \geqq \frac{|z|^2}{2} - 2|z_1|^2 - 2|z_2|^2,
$$

то в силу (16) имеет место соотношение

$$
\begin{aligned}
|w_n|^2 \geqq {} & \frac{1}{2R^2} |u_n(x)|^2 \left| \int_0^R \cos(\lambda r) \exp(\lambda_n r)\, \mathrm{d}r \right|^2 \\
& - \frac{2}{R^2} \left| \int_0^R \cos(\lambda r) \int_0^r \mathbf{Q}(x+t) u_n(x+t) \exp\left[\lambda_n (r-t)\right] \mathrm{d}t\, \mathrm{d}r \right|^2 \\
& - \frac{2\Theta_n}{R^2} \left| \int_0^R \cos(\lambda r) \int_0^r u_{n-1}(x+t) \exp\left[\lambda_n (r-t)\right] \mathrm{d}t\, \mathrm{d}r \right|^2 .
\end{aligned}
\tag{17}
$$

Заметим, что в силу условия (4)

$$
|\exp(R\lambda_n)| = \exp\left[\operatorname{Re}(\lambda_n R)\right] \leqq \exp(C_0 R) \leqq M_1 . \tag{18}
$$

В целях сокращения записи каждый из интервалов в правой части (17) обозначим через $I_j(x,R)$ ($j = 1,2,3$). Ради определенности ниже будем считать, что $\operatorname{Im} \lambda_n \geqq 0$.

Убедимся в том, что существуют положительные константы α, M_1, M_2 такие, что для всех $x \in K_l$ и всех номеров n, для которых $\lambda_0 \leqq \lambda \leqq |\lambda_n| \leqq \lambda + 1$ при всех достаточно малых $R > 0$ и всех $\lambda \geqq \lambda_0 \geqq \dfrac{2M\sqrt{2}}{R}$ справедливы неравенства

$$\begin{gathered}\frac{1}{2R^2}|I_1(x,R)|^2 \geqq \alpha\,,\\ \frac{2}{R^2}|I_2(x,R)|^2 \leqq M_2\,o(1)\|u_n\|^2_{K_l}\,, \qquad \frac{2}{R^2}|I_3(x,R)|^2 \leqq M_3 R^2\|u_n\|^2_{K_l}\,,\end{gathered} \tag{19}$$

где $o(1) \to 0$ при $R \to 0$.

Для доказательства первой из оценок (19), учтем, что в силу очевидного неравенства $|a-b|^2 \geqq \dfrac{|a|^2}{2} - |b|^2$, справедливого для любих комплексных a и b, имеет место оценка

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2R^2}\left|\int_0^R \cos(\lambda r)\exp(\lambda_n r)\,\mathrm{d}r\right|^2\\ &= \frac{1}{8R^2}\left|\int_0^R \Big\{\exp\big[(\mathrm{i}\,\lambda + \lambda_n)r\big] + \exp\big[(-\mathrm{i}\,\lambda + \lambda_n)r\big]\Big\}\,\mathrm{d}r\right|^2\\ &= \frac{1}{8}\left|\frac{\exp\big[(\mathrm{i}\,\lambda + \lambda_n)R\big]-1}{(\mathrm{i}\,\lambda + \lambda_n)R} + \frac{\exp\big[(-\mathrm{i}\,\lambda + \lambda_n)R\big]-1}{(-\mathrm{i}\,\lambda + \lambda_n)R}\right|^2\\ &\geqq \frac{1}{16}\left|\frac{\exp\big[(-\mathrm{i}\,\lambda + \lambda_n)R\big]-1}{(\lambda_n - \mathrm{i}\,\lambda)R}\right|^2 - \frac{1}{8}\left|\frac{\exp\big[(\mathrm{i}\,\lambda + \lambda_n)R\big]-1}{(\mathrm{i}\,\lambda + \lambda_n)R}\right|^2, \qquad \mathrm{i} = \sqrt{-1}\,,\end{aligned} \tag{20}$$

и воспользуемся тем, что $|-\mathrm{i}\,\lambda + \lambda_n| \leqq \sqrt{1 + 2C_0^2}$,[2] $|\mathrm{i}\,\lambda + \lambda_n| \geqq \lambda \geqq \lambda_0$ (здесь используется неравенство $\operatorname{Im}\lambda_n \geqq 0$, $|\operatorname{Re}\lambda_n| \leqq C_0$). Пусть $\lambda_n = \mu_n + \nu_n\,\mathrm{i}$. Учитывая оценку (18), при любом $R \leqq 1$ найдем

$$\begin{aligned}\big|\exp\big[(\mathrm{i}\,\lambda + \lambda_n)R\big] - 1\big| &= \big|\exp\big\{\big[\mathrm{i}(\lambda + \mu_n) - \nu_n\big]R\big\} - 1\big|\\ &= \big|\exp(-\nu_n R)\big(\cos(\lambda + \mu_n)R - \mathrm{i}\sin(\lambda + \mu_n)R\big) - 1\big| \leqq M\,.\end{aligned}$$

[2] Дейсвительно, $|\lambda_n - \mathrm{i}\,\lambda|^2 = (\operatorname{Im}\lambda_n)^2 + (\operatorname{Re}\lambda_n)^2 + \lambda^2 - 2\lambda\operatorname{Im}\lambda_n = \big[|\lambda_n|^2 - 2\lambda|\lambda_n| + \lambda^2\big] + 2\lambda\big(|\lambda_n| - \operatorname{Im}\lambda_n\big) = \big(|\lambda_n| - \lambda\big)^2 + 2\lambda\big(|\lambda_n| - \operatorname{Im}\lambda_n\big) \leqq 1 + 2|\lambda_n|\big(|\lambda_n| - \operatorname{Im}\lambda_n\big) \leqq 1 + 2\big(|\lambda_n|^2 - (\operatorname{Im}\lambda_n)^2\big) \leqq 1 + 2(\operatorname{Re}\lambda_n)^2 \leqq 1 + 2C_0^2$; $|\mathrm{i}\,\lambda + \lambda_n|^2 = (\operatorname{Im}\lambda_n + \lambda)^2 + (\operatorname{Re}\lambda_n)^2 \geqq \lambda^2$.

Поэтому для достаточно малого $R > 0$ и для любого $\lambda_0 \geqq \dfrac{2M\sqrt{2}}{R}$ получим неравенства

$$\left|\frac{\exp\left[(-\mathrm{i}\,\lambda + \lambda_n)R\right] - 1}{R(\lambda_n - \mathrm{i}\,\lambda)}\right|^2 > \frac{1}{2},$$
$$\left|\frac{\exp\left[(\mathrm{i}\,\lambda + \lambda_n)R\right] - 1}{(\lambda\mathrm{i} + \lambda_n)R}\right|^2 < \frac{1}{8}.$$

Таким образом, в силу (20) первая из оценок (19), справедлива с постоянной $\alpha = \dfrac{1}{64}$. Для установления остальных оценок (19) заметим, что $|\cos(\lambda r)| \leqq 1$ и что для всех $0 \leqq t \leqq r \leqq R$ и всех номеров n, в силу (18), справедлива оценка $\left|\exp\left[\lambda_n(r-t)\right]\right| \leqq M_1$. Кроме того, для всех $x \in K_l$ и всех $0 \leqq t \leqq r \leqq R$ точка $x+t$ принадлежит сегменту G_l и потому в силу первой оценки (9) и оценки (11) справедливо неравенство

$$|u_n(x+t)| \leqq C_6 \|u_n\|_{K_l}, \tag{21}$$

в котором $C_6 = C_3\left[\tilde{C}(l)\right]^{\frac{1}{2}}$. Из неравенства (21) вытекает, что величина $\dfrac{2}{R^2} I_2(x,R)$ мажорируется числом

$$\frac{2}{R^2}|I_2(x,R)|^2 \leqq \frac{2M_1^2}{R^2}\left[\int_0^R \sum_{i=1}^N \int_0^r \sum_{j=1}^N |q_{ij}(x+t)||u^j(x+t)|\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}r\right]^2$$
$$\leqq C_7\, o(1)\|u_n\|_{K_l}^2,$$

где $o(1) \to 0$ при $R \to 0$. Аналогичным рассуждением с учетом второй оценки (9) и оценки (11) находим, что

$$\frac{2}{R^2}|I_3(x,R)|^2 \leqq C_8 R^2 \|u_n\|_{K_l}^2.$$

Таким образом оценки (19) установлены и для величины $|w_n|^2$ из неравенства (17) имеет место оценка

$$|w_n|^2 \geqq \alpha |u_n(x)|^2 - M_2\, o(1)\|u_n\|_{K_l}^2 - M_3 R^2 \|u_n\|_{K_l}^2.$$

Интегрируя последнее неравенство по x по компакту K_l, получим

$$\|w_n\|_{K_l}^2 \geqq \|u_n\|_{K_l}^2 \left\{\alpha - \left(M_2\, o(1) + M_3 R^2\right) \int_{K_l} \mathrm{d}x\right\}. \tag{22}$$

Если теперь фиксировать достаточно малое $R > 0$ и достаточно большое $\lambda_0 \geqq 2\dfrac{M\sqrt{2}}{R}$ так, чтобы были выполнены условия $M_3R^2 < \dfrac{\alpha}{4}$, $M_2\, o(1) < \dfrac{\alpha}{4}$, то, учитивая, что $\int\limits_{K_l} \mathrm{d}x \leqq 1$, из (22) при всех $\lambda_0 \leqq \lambda \leqq |\lambda_n| \leqq \lambda + 1$ получим неравенство

$$\|u_n\|^2_{K_l} \leqq \frac{2}{\alpha}\|w_n\|^2_{K_l}\,.$$

Суммируя это неравенство по всем номерам n, для которых $\lambda_0 \leqq \lambda \leqq |\lambda_n| \leqq \lambda + 1$, и используя для функции (14) неравенство типа Бесселя по системе $\{u_n(y)\}$, в силу которого

$$\sum_{\lambda_0 \leqq \lambda \leqq |\lambda_n| \leqq \lambda+1} |w_n|^2 \leqq C_8 \int\limits_{G_l} |w|^2\, \mathrm{d}y\,, \tag{23}$$

где C_8 не зависит от λ и n, с учетом, что $\int\limits_{K_l} \mathrm{d}x \leqq 1$, получим оценку

$$\sum_{\lambda_0 \leqq \lambda \leqq |\lambda_n| \leqq \lambda+1} \|u_n\|^2_{K_l} \leqq \frac{2C_8N}{\alpha R^2} \int\limits_{K_l} \left\{ \int\limits_{x-R}^{x+R} \cos^2\left[\lambda(x-y)\right]\, \mathrm{d}y \right\} \mathrm{d}x \leqq \frac{4N}{\alpha R} C_8\,.$$

Тем самым при $\lambda \geqq \lambda_0$ оценка (10) с константой $C(l) = \dfrac{4NC_8}{\alpha R}$ установлена.

Остается установить оценку (10) для значений λ из сегмента $0 \leqq \lambda \leqq \lambda_0$. Вместо оценки (10) установим более сильную оценку, т.е., докажем, что существует постоянная $C_1(l)$ такя, что

$$\sum_{0 \leqq |\lambda_n| \leqq \lambda_0 + 1} \|u_n\|^2_{K_l} \leqq C_1(l)\,. \tag{24}$$

Для этого фиксируем точку x из компакта K_l и пусть $R > 0$ — произвольное настолько малое число, что одновременно выполнены два требования:

(1) R меньше расстояния компакта K_l от границы G_l;
(2) R такое, что для всех $|\lambda_n| \leqq \lambda_0 + 1$ и всех $0 \leqq t \leqq r \leqq R$ справедливы неравенства

$$\left|\frac{\exp(\lambda_n R) - 1}{R\lambda_n}\right| > \frac{1}{2}\,, \qquad \left|\exp\left[\lambda_n(r-t)\right]\right| \leqq M_1\,. \tag{25}$$

Рассмотрим вместо функции (14) функцию $w(|x-y|) = (w^1, \dots, w^N)$, где

$$w^i(|x-y|) = \begin{cases} \dfrac{1}{R}, & \text{если} \quad |x-y| \leqq R, \\ 0, & \text{если} \quad |x-y| > R, \end{cases} \tag{14'}$$

причем $i = 1, 2, \dots, N$.

Вычисляя коэффициенты Фурье w_n этой функции по системе $\{u_n(y)\}$ с помощью формулы среднего значения (15), вместо (16) получим следующее выражение:

$$\begin{aligned} w_n = u_n(x) \int_0^R w(r) \exp(\lambda_n r)\, \mathrm{d}r \\ - \int_0^R w(r) \left\{ \int_0^r \mathbf{Q}(x+t) u_n(x+t) \exp\left[\lambda_n(r-t)\right]\, \mathrm{d}t \right\} \mathrm{d}r \\ + \Theta_n \int_0^R w(r) \left\{ \int_0^r u_{n-1}(x+t) \exp\left[\lambda_n(r-t)\right]\, \mathrm{d}t \right\} \mathrm{d}r. \end{aligned} \tag{16'}$$

Из $(16')$ следует неравенство

$$\begin{aligned} |w_n|^2 \geqq \frac{1}{2R^2} |u_n(x)|^2 \left| \int_0^R \exp(\lambda_n r)\, \mathrm{d}r \right|^2 \\ - \frac{2}{R^2} \left| \int_0^R \left\{ \int_0^r \mathbf{Q}(x+t) u_n(x+t) \exp\left[\lambda_n(r-t)\right]\, \mathrm{d}t \right\} \mathrm{d}r \right|^2 \\ - \frac{2\Theta_n}{R^2} \left| \int_0^R \left\{ \int_0^r u_{n-1}(x+t) \exp\left[\lambda_n(r-t)\right]\, \mathrm{d}t \right\} \mathrm{d}r \right|^2. \end{aligned} \tag{17'}$$

Используя оценки (25) и технику доказательства оценок (19), получим, что первый член в правой части $(17')$ оценивается снизу с константой $\alpha = \dfrac{1}{4}$, а модуль каждого из остальных членов в правой части $(17')$ оценивается сверху величиной $M_4 R^2 \|u_n\|^2_{K_l}$, где M_4 – некоторая положительная постоянная.

Итак, из $(17')$ вытекает, что для всех x из компакта K_l, для всех достаточно малых $R > 0$ и для всех номеров n, для которых $0 \leqq |\lambda_n| \leqq \lambda_0 + 1$, справедливо неравенство

$$|w_n|^2 \geqq \frac{1}{8}|u_n(x)|^2 - 2M_4R^2\|u_n\|^2_{K_l}.$$

Интегрируя это неравенство по компакте K_l и фиксируя $R > 0$ так, чтобы выполнялось условие $R < \frac{1}{4\sqrt{2M_4}}$, получим, что для всех n, для которых $0 \leqq |\lambda_n| \leqq \lambda_0 + 1$, справедлива оценка

$$\|u_n\|^2_{K_l} \leqq 16\|w_n\|^2_{K_l}.$$

Суммируя последнее неравенство по всем номерам n, для которых $0 \leqq |\lambda_n| \leqq \lambda_0 + 1$, и пользуясь для функции $(14')$ неравенством типа Бесселя (23) (в котором суммирование в левой части берется по номерам n, удовлетворяющим условию $0 \leqq |\lambda_n| \leqq \lambda_0 + 1$) получим оценку (24) с постоянной $C_1(l) = 32MC_8R^{-1}$.

Тем самым основная теорема полностью доказана.

Литература

[1] БИЦАДЗЕ, А. В.—САМАРСКИЙ, А. А: *О некоторых простейших обобщениях линейных эллептических краевых задач*, ДАН СССР **185** (1969), 739–740.

[2] ИЛЬИН, В. А.: *О безусловной базисности на замкнутом интервале систем собственных и присоединенных функций дифференциального оператора 2-го порядка*, ДАН СССР **273** (1983), 1048–1053.

[3] ИЛЬИН, В. А.: *Необходимые и достаточные условия базисности Рисса корневых векторов разрывных операторов 2-го порядка*, Дифференциальные уравнения **22** (1986), 2059–2071.

[4] МОИСЕЕВ, Е. И.—БАРНОВСКА, М.: *О безусловной базисности системы собственных и присоединенных функций дифференциального оператора первого порядка в пространстве вектор-функций*, Math. Slovaca **40** (1990), 325–336.

[5] БАРИ, Н. К.: *Биортогональные системы и базисы в гильбертовом пространстве*, Учен. зап. МГУ **4** (вып. 148) (1951), 69–107.

[6] ГОХБЕРТ, И. Ц.—КРЕЙН, М. Г.: *Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве*, «Наука», Москва, 1965.

Received July 5, 1989
Revised July 20, 1992

*) *Department of Mathematical Analysis*
Faculty of Mathematics and Physics
Comenius University
Mlynská dolina
842 15 Bratislava
Slovakia

**) *Кафедра общей математики*
Факультет ВМИК
В-234 Ленинские горы МГУ
117 234 Москва
Россия