Math. Slovaca 37, 1987, No. 1, 125—134

ИДЕМПОТЕНТЫ ПОЛУГРУППЫ БЕСКОНЕЧНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ МАТРИЦ

Л. А. СКОРНЯКОВ

Описываются идемпотентные бесконечные стохастические матрицы. Доказывается также, что для каждой такой матрицы группа, для которой она служит единицей, изоморфна группе подстановок. Соответствующие результаты для конечного случая были получены Ш. Шварцем ([4]; см. также [3]). Аналогичные теоремы доказаны и для бесконечных дважды стохастических матриц (ср. [2], [5]).

Если X — некоторое множество, то *стохастической* X — матрицей называется отображение A прямого квадрата $X \times X$ в отрезок $[0, 1]$, обладающее следующими свойствами:

Для каждого $x \in X$ множество

$$\{y \mid y \in X,\ A(x, y) \neq 0\}$$

конечно и

$$\sum_{y \in X} A(x, y) = 1.$$

Легко видеть, что совокупность стохастических X-матриц образует моноид относительно обычного умножения матриц. Назовем X-матрицу A *стабильной*, если $A(x, z) = A(y, z) \neq 0$ для любых $x, y, z \in X$.

Разбиением множества X будем называть системы его попарно не пересекающихся непустых подмножеств, объединение которых совпадает s X. Стохастическая X-матрица A называется *канонической*, если для подходящего разбиения $\{X_\alpha \mid \alpha \in I\}$ множества X и некоторого $\infty \in I$ выполнены следующие условия (рис. 1):

(i) если $\alpha \neq \infty$, то X_α конечно и X_α-матрица A_α, где $A_\alpha(x, y) = A(x, y)$ для всех $x, y \in X_\alpha$ стабильна;

(ii) если $x \in X_\omega$, то найдутся числа λ_α, $\alpha \in I \setminus \infty$ такие, что для любого $y \in X_\alpha$ имеет место $A(x, y) = \lambda_\alpha A(s, y)$, где $s \in X_\alpha$;

(iii) если $x \in X_\alpha$, а $Y \notin X_\alpha$, где $\alpha \neq \infty$, или $x, y \in X_\infty$, то $A(x, y) = 0$.

Матрицы A_α назовем *клетками* канонической матрицы A.

Скажем, что от X-матрицы A к X-матрице B можно перейти перестановкой рядов, если существует такое взаимно однозначное отображение Φ множества X на себя, что $B(\xi, \eta)=A(\Phi(\xi), \Phi(\eta))$ для всех $\xi, \eta \in X$.

Теорема 1. *Для идемпотентности стохастической матрицы необходимо и достаточно, чтобы при подходящей перестановке рядов она переходила в каноническую.*

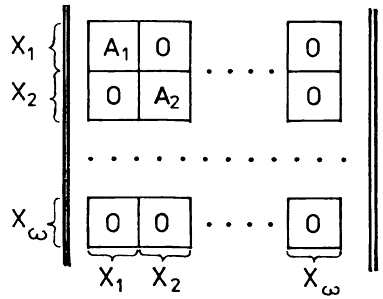

Рис. 1

Доказательство. Непосредственный подсчет показывает, что каноническая матрица идемпотентна. С отображением Φ свяжем X-матрицу Φ, где $\Phi(\xi, \eta)=1$, если $\eta=\Phi(\xi)$ и $\Phi(\xi, \eta)=0$ в противном случае. Тогда $\Phi A \Phi^{-1}(\xi, \eta)=A(\Phi(\xi), \Phi(\eta))$. Следовательно, $\Phi A \Phi^{-1}$ — каноническая матрица и

$$A^2=\Phi^{-1}(\Phi A \Phi^{-1})^2 \Phi=\Phi^{-1}\Phi A \Phi^{-1}\Phi=A.$$

Тем самым достаточность высказанного условия доказана.

Для доказательства необходимости назовем $(U \times V)$ — *подматрицей* X-матрицы A, где $U, V \subseteq X$, отображение H: $U \times V \to [0, 1]$, где $H(u, v)=A(u, v)$ для любых $u \in U$ и $v \in V$. Далее обозначим через Ω — наименьший трансфинит, мощность которого равна мощности множества X. *Углом* матрицы A назовем тройку (K, α, φ), где $\alpha \leqslant \Omega$, K — каноническая $[0, \alpha)$-матрица, φ — вложение отрезка $[0, \alpha)$ в множество X, причем $K(\xi, \eta)=A(\varphi(\xi), \varphi(\eta))$, если $\xi, \eta<\alpha$, и $A(\varphi(\xi), x)=0$, если $\xi<\alpha$ и $x \in X \setminus \varphi[0, \alpha)$. Если (K, α, φ) и (L, β, ψ) — углы, то положим $(K, \alpha, \varphi) \leqslant (L, \beta, \psi)$, если $\alpha \leqslant \beta$ и для любых $\xi, \eta<\alpha$ имеем $\varphi(\xi)=\psi(\xi)$ и $K(\xi, \eta)=L(\xi, \eta)$. Это определение превращает множество углов в частично упорядоченное множество, которое обозначим через $\mathcal{M}$.

Лемма. *Существует максимальный угол.*

Доказательство. В силу леммы Куратовского-Цорна, достаточно убедиться, что верхний конус любой цепи $\mathscr{L}$ из $\mathscr{M}$ не пуст. Но если $\mathscr{L}=\{(K_\varkappa, \alpha_\varkappa, \varphi_\varkappa) | \varkappa \in \Xi\}$, то этот верхний конус содержит угол (K, α, φ), где

$$[0, \alpha)=\bigcup_{\varkappa\in\Xi}[0, \alpha_\varkappa)$$

а K и φ продолжают отображения $K_\varkappa$ и $\varphi_\varkappa$ соотверственно.

Пусть (K, α, φ) — максимальный угол и $\{X_\varkappa | \varkappa \in I\}$ — разбиение множества $[0, \alpha)$, Упоминаемое в определении канонической матрицы, $Y_\varkappa=\varphi(X_\varkappa)$ и $Y=\varphi([0, \alpha))$. Если $X=Y$, то отображение φ^{-1} осуществляет искомую перестановку рядов. Так что можно считать, что $X \setminus Y \neq \emptyset$. Пусть $H-((X\setminus Y)\times(X\setminus Y))$ — подматрица матрицы A.

Допустим сначала, что $H\neq 0$. обозначим через p_0 номер ненулевой строки матрицы H, содержащей наименьшее число положительных координат, а через U — множество номеров столбцов, в которых располагаются эти координаты. Из определения угла вытекает, что

$$A(x, y)=0, \quad \text{если} \quad x\in Y \quad \text{и} \quad y \notin Y\setminus Y_\infty. \tag{1}$$

Если $q\notin U\cup Y$, то отсюда вытекает

$$0=A(p_0, q)=\sum_{x\in X} A(p_0, x)A(x, q),$$

что, в свою очередь, влечет

$$A(u, q)=0 \quad \text{для всех} \quad u\in U \quad \text{и} \quad q\notin U\cup Y. \tag{2}$$

Если $u\in U$ и $A(u, v)=0$ для некоторого $v\in U$, то, ввиду (2), u-я строка матрицы H содержит меньшее число положительных координат, чем p_0-я строка, что противоречит выбору последней. Следовательно,

$$A(u, v)\neq 0 \quad \text{для всех} \quad u, v\in U. \tag{3}$$

Пусть теперь через C обозначена $(U\times U)$ — подматрица матрицы A. Ввиду (2) и (1), для $p, q\in U$ имеем

$$C(p, q)=\sum_{x\in X} A(p, x)A(x, q)=\sum_{x\in U\cup Y} A(p, x)A(x, q)=$$
$$=\sum_{x\in U} A(p, x)A(x, q)=\sum_{x\in U} C(p, x)C(x, q).$$

Следовательно,

$$C^2=C. \tag{4}$$

Допустим теперь, что $A(u, q) \neq 0$ для некоторых $u \in U$ и $q \in Y_\infty$. Можно считать, что $A(v, q) \leqslant A(u, q)$ для всех $v \in U$ (напомним, что $|U| < \aleph_0$) Кроме того, из стохастичности матрицы A вытекает, что

$$\sum_{z \in U} A(u, z) < 1.$$

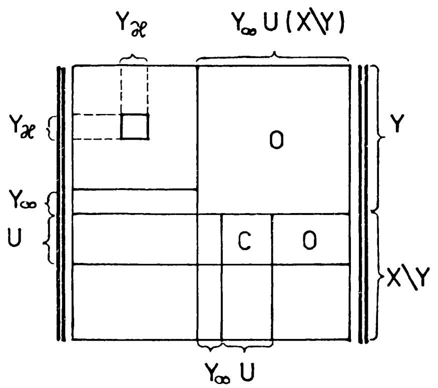

Рис. 2

Поэтому, учитывая (2) и (1), получаем

$$A(u, q) = \sum_{z \in X} A(u, z) A(z, q) = \sum_{z \in U} A(u, z) A(z, q) + \sum_{z \in Y} A(u, z) A(z, q) =$$

$$= \sum_{z \in U} A(u, z) A(z, q) \leqslant A(u, q) \sum_{z \in U} A(u, z) < A(u, q),$$

что невозможно. Следовательно,

$$A(u, q) = 0, \quad \text{если} \quad u \in U \quad \text{и} \quad q \in Y_\infty. \tag{5}$$

Пусть теперь $v \in U$ и $y \in Y_\varkappa$, где $\varkappa \neq \infty$. Ввиду (2), (5) и условия (iii) из определения канонической матрицы, получаем

$$A(u, y) = \sum_{z \in X} A(u, z) A(z, y) = A(y, y) \sum_{z \in Y_\varkappa} A(u, z) + \sum_{z \in U} A(u, z) A(z, y).$$

Суммируя по $y \in Y_\varkappa$, приходим к равенству

$$\sum_{y \in Y_\varkappa} A(u, y) = \sum_{y \in Y_\varkappa} A(y, y) \sum_{z \in Y_\varkappa} A(u, z) + \sum_{z \in U,\, y \in Y_\varkappa} A(u, z) A(z, y) =$$

$$= \sum_{z \in Y_\varkappa} A(u, z) + \sum_{z \in U,\, y \in Y_\varkappa} A(u, z) A(z, y).$$

В силу (3), отсюда вытекает, что

$$A(z, y) = 0 \quad \text{для всех} \quad z \in U \quad \text{и} \quad y \in Y_\varkappa.$$

Вместе с (2) и (5) это показывает, что C — стохастическая матрица. В силу 4 характеристическими корнями матрицы C могут служить лишь 0 и 1, а согласно теореме перрона ([1], ц. 319), 1 является простым корнем. Поэтому ранг матрицы C равен 1. Ясно, что пропорциональность строк стохастической матрицы влечет их равенство. Следовательно, C — стабильная матрица. Если n — ее порядок, то C можно отождествить с $[0, n)$-матрицей. Пусть $\beta = \alpha + n$. Образуем $[0, \beta)$-матрицу L, положив

$$L(\xi, \eta) = \begin{cases} K(\xi, \eta), & \text{если} \quad \xi, \eta < \alpha, \\ C(i, j), & \text{если} \quad \xi = \alpha + i \ \text{и} \ \eta = \alpha + j, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Отображение φ продолжим до отображения ψ: $[0, \beta) \to X$, отобразив $\{\alpha, \alpha+1, \ldots, \alpha+n-1\}$ на U произвольным образом. Тогда (L, β, ψ) оказыбается углом, причем $(K, \alpha, \varphi) < (L, \beta, \psi)$, вопреки максимальности угла (K, α, φ).

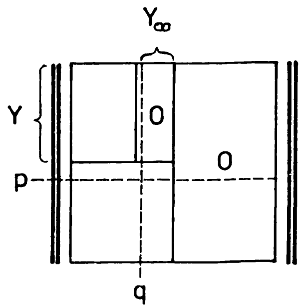

Рис. 3

Обратимся к случаю, когда $H = 0$ (рис. 3). Пусть $p \in Y \setminus X$. Если $q \in Y_\infty$, то

$$A(p, q) = \sum_{y \in Y} A(p, y) A(y, q) = 0. \tag{6}$$

Но $A(p, q) \neq 0$ для некоторого $q \in Y$. В силу (6) $q \in Y_\varkappa$ для некоторого $\varkappa \neq \infty$. Если $\lambda = \sum_{y \in Y_\varkappa} A(p, y)$, то

$$A(p, q) = \sum_{y \in Y_\varkappa} A(p, y) A(y, q) = \lambda A(q, q).$$

Следовательно, $[0, \alpha+1)$ — матрица L, где

$$L(\xi, \eta)=\begin{cases} K(\xi, \eta), & \text{если} \quad \xi, \eta<\alpha, \\ A(p, \eta), & \text{если} \quad \xi=\alpha \text{ и } \eta<\alpha, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

оказывается канонической. Отображение ψ продолжим до отображения ψ: $[0, \alpha+1) \to X$, положив $\psi(\alpha)=p$. Тогда тройка $(L, \alpha+1, \psi)$ оказывается углом, превосходящим угол (K, α, φ), что, как и раньше, невозможно.

Теорема 2. *Группа стохастических X-матриц, единицей которой служит идемпотентная стохастическая матрица A, изоморфна группе подстановок множества клеток канонической матрицы, к которой A приводится перестановкой рядов.*

Доказательство. Пусть A — каноническая стохастическая X-матрица и $\mathscr{L}$ — подконвексор конвексора всех X-мерных строк, порожденный строками матрицы A ([6], с. 25). Учитывая [6], с. 30, предложение 7, нетрудно установить, что $\mathscr{L}$ — свободный конвексор, базой которого служат первые строки клеток матрицы A. Из [6] с. 30, предложение 9, вытекает, что группа автоморфизмов конвексора $\mathscr{L}$ изоморфна группе подстановок на иножестве клеток. Поэтому справедливость теоремы 2 является следствием следующего факта:

Предложение. *Моноид* End $\mathscr{L}$ *эндоморфизмов свободного конвексора* $\mathscr{L}$ *изоморфен моноиду*

$$\mathscr{Z}(A)=\{C \mid C \text{ — стохастическая } X\text{-матрица, } CA=AC=C\}.$$

Доказательство. Если $\varphi, \psi \in \operatorname{End} \mathscr{L}$, то считаем $\bar{v}(\varphi\psi)=(\bar{v}\varphi)\psi$ для всех $\bar{v} \in \mathscr{L}$. Если $\bar{v}$ — некоторая X-мерная строка и $x \in X$, то через $\bar{v}(x)$ условимся обозначать x-ю координату строки $\bar{v}$. Символом $A\langle x\rangle$ обозначается x-я строка X-матрицы A. Для любых X-матриц P и Q справедливо соотношение

$$(AB)\langle x\rangle=\sum_{z\in X} A(x, z)B\langle z\rangle. \tag{7}$$

В самом деле, для любых $x, y \in X$ имеем

$$(AB)(x, y)=\sum_{z\in X} A(x, z)B(z, y)=\Big(\sum_{z\in X} A(x, z)B\langle z\rangle\Big)(y).$$

Если, далее, $\varphi \in \operatorname{End} \mathscr{L}$, то определим X-матрицу $\Gamma(\varphi)$, положив

$$\Gamma(\varphi)(x, y)=(A\langle x\rangle\varphi)(y)$$

для любых $x, y \in X$. Ясно, что $\Gamma(\varphi)$ — стохастическая матрица. Кроме того,

$$A\langle x\rangle\varphi=\sum_{s\in X} \lambda_{xs}A\langle s\rangle, \tag{8}$$

где $0 \leqslant \lambda_{xs} \leqslant 1$ и $\Sigma \lambda_{xs} = 1$. Учитывая (7), (8) и равенство $A^2 = A$, получим

$$
\begin{aligned}
(\Gamma(\varphi) A)(x, y) &= \sum_{z \in X} \Gamma(\varphi)(x, z) A(z, y) = \\
= \sum_{z \in X} (A\langle x \rangle \varphi)(z) A(z, y) &= \sum_{z \in X} \Big(\sum_{s \in X} \lambda_{xs} A\langle s \rangle \Big)(z) A(z, y) = \\
&= \sum_{s,\, z \in X} \lambda_{xs} A(s, z) A(z, y) = \sum_{s \in X} \lambda_{xs} A^2(s, y) = \\
&= \sum_{s \in X} \lambda_{xs} A(s, y) = (A\langle x \rangle \varphi)(y) = \Gamma(\varphi)(x, y)
\end{aligned}
$$

для любых $x, y \in X$, откуда

$$\Gamma(\varphi) A = \Gamma(\varphi). \tag{9}$$

Используя (7), будем иметь

$$
\begin{aligned}
(A\Gamma(\varphi))(z, y) &= ((A\Gamma(\varphi))\langle x \rangle)(y) = \Big(\sum_{z \in X} A(x, z) \Gamma(\varphi)\langle z \rangle \Big)(y) = \\
= \Big(\sum_{z \in X} A(x, z)(A\langle z \rangle \varphi) \Big)(y) &= \Big(\sum_{z \in X} A(x, z) A\langle z \rangle \Big) \varphi(y) = \\
&= (A^2\langle x \rangle \varphi)(y) = (A\langle x \rangle \varphi)(y) = \Gamma(\varphi)(x, y),
\end{aligned}
$$

откуда

$$A\Gamma(\varphi) = \Gamma(\varphi) \tag{10}$$

Ввиду (9) и (10), $\Gamma(\varphi) \in \mathscr{X}(A)$, т.е. Γ отображает End $\mathscr{L}$ в $\mathscr{X}(A)$. Ясно, что Γ — вложение. Если $B \in \mathscr{X}(A)$, то для любой $\bar{v} \in \mathscr{L}$ положим

$$\bar{v}\varphi = \bar{v}B.$$

Нетрудно проверить, что $\varphi \in \mathrm{End}\ \mathscr{L}$. С другой стороны,

$$\Gamma(\varphi)\langle x \rangle = A\langle x \rangle \varphi = A\langle x \rangle B = (AB)\langle x \rangle = B\langle x \rangle,$$

т.е.

$$\Gamma(\varphi) = B.$$

Следовательно, Γ — наложение. Наконец, снова используя (7) и (9), будем иметь

$$
\begin{aligned}
(\Gamma(\varphi) \Gamma(\psi))\langle x \rangle &= \sum_{z \in X} \Gamma(\varphi)(x, z) \Gamma(\psi)\langle z \rangle = \\
= \sum_{z \in X} (\Gamma(\varphi)(x, z))(A\langle z \rangle) \psi &= \Big(\sum_{z \in X} \Gamma(\varphi)(x, z) A\langle z \rangle \Big) \psi = \\
&= ((\Gamma(\varphi) A)\langle x \rangle) \psi = (\Gamma(\varphi)\langle x \rangle) \psi = \\
&= (A\langle x \rangle \varphi) \psi =)A\langle x \rangle)(\varphi\psi) = \Gamma(\varphi\psi)\langle x \rangle.
\end{aligned}
$$

Следовательно,

$$\Gamma(\varphi)\Gamma(\psi)=\Gamma(\varphi\psi),$$

чем и завершается доказательство предложения, а вместе с ним и теоремы 2.

Стохастическая X-матрица A называется *дважды стохастической*, если ее транспонированная A^* также стохастическая. Конечная квадратная матрица C порядка n называется *стационарной*, если $C(i, j)=1/n$ для любых i и j. Разумеется, стационарная матрица является дважды стохастической.

Теорема 3. *Для идемпотентности дважды стохастической матрицы необходимо и достаточно, чтобы при подходящей перестановке рядов она переходила в клеточно-диагональную матрицу, причем клетки, стоящие по диагонали, являются стационарными матрицами.*

Доказательство. Достаточно применить теорему 1, заметив, что каноническая матрица оказывается дважды стохастической в том и только том случае, когда $X_\infty=\emptyset$, а клетки стационарны.

Описание группы дважды стохастических матриц с данной идемпотентной матрицей в качестве единицы дает:

Теорема 4. *Пусть C — клеточно-диагональная X-матрица со стационарными клетками и m_i — мощность множества клеток размера $i\times i$ $(i=1, 2, \ldots)$. Тогда группа G всех дважды стохастических матриц, единицей которой служит матрица C, изоморфна прямому произведению*

$$\prod_{i=1}^{\infty}\gamma(m_i),$$

где $\gamma(m_i)$ — группа подстановок на множестве мощности m_i.

Доказательство. Пусть D — клеточно-диагональная X-матица со стационарными клетками D_ξ, являющимися $(X_\xi\times X_\xi)$ — подматрицами матрицы D. Для любой дважды стохастической X-матрицы A обозначим через $A_{\xi,\eta}$ ее $(X_\xi\times X_\eta)$ — подматрицу.

Лемма 1. *Если $x\in X_\xi$, $y\in X_\eta$, $\xi\neq\eta$, $AD=DA=A$ и $A(x, y)\neq 0$, то $A(x, y')=A(x, y'')$ для любых $y', y''\in X_\eta$ и $A(x', y)=A(x'', y)$ для любых $x', x''\in X_\xi$.*

Доказательство. Из равенства

$$A(x, y)=\sum_{z\in X}A(x, z)D(z, y)=\frac{1}{|X_\eta|}\sum_{z\in X_\eta}A(x, z)$$

видно, что x-я строка матрицы $A_{\xi\eta}$ состоит из одних и тех же элементов. Совпадение между собой координат ее y-го столбца устанавливается аналогично.

Лемма 2. *Если $x\in X_\xi$, $y\in X_\eta$, $\xi\neq\eta$, $AB=D$ и $A(x, y)\neq 0$, то $B(y, s)=0$ для всех $s\notin X_\xi$.*

Доказательство. Если $B(y, s) \neq 0$, где $s \notin X_\xi$, то

$$0 = D(x, s) = \sum_{z \in X} A(x, z) B(z, s) \geqslant A(x, y) B(y, s) > 0,$$

что невозможно.

Далее заметим, что, не ограничивая общности, можно считать, что

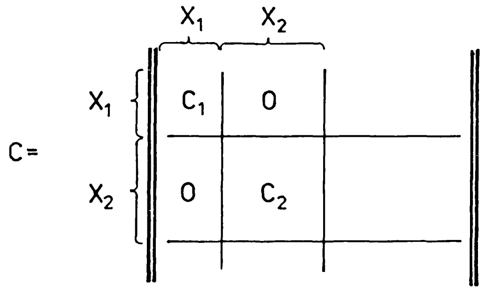

Рис. 4

где C_m — клеточно-диагональные матрицы со стационарными клетками порядка m. Следовательно,

$$X_m = \bigcup_{\xi \in \Xi_m} X_{m\xi},$$

где $|X_{m\xi}| = m$ и $(X_{m\xi} \times X_{m\xi})$ — подматрицы матрицы C_m стационарны.

Лемма 3. *Если $AB = BA = C$, $AC = CA = A$, $x \in X_{i\xi}$, $y \in X_{j\eta}$ и $A(x, y) \neq 0$, то $i = j$ и*

$$A(p, q) = \begin{cases} 1/i & \text{если} \quad p \in X_{i\xi} \quad \text{и} \quad q \in X_{i\eta}, \\ 0, & \text{если} \quad p \in X_{i\xi} \quad \text{и} \quad q \notin X_{i\eta}, \\ 0, & \text{если} \quad \zeta \neq \xi, \ p \in X_{i\zeta} \quad \text{и} \quad q \in X_{i\eta}. \end{cases}$$

Доказательство. Если $A(x, y) \neq 0$, то, по лемме 1, $A(x, s) \neq 0$ для всех $s \in X_{j\eta}$. Следовательно, по лемме 2, имеем $B(s, t) = 0$ для любых $s \in X_{j\eta}$ и $t \notin X_{i\xi}$. Поэтому $B(s, t_0) \neq 0$ для некоторого $t_0 \in X_{i\xi}$. Отсюда, как и выше, выводим, что $A(p, q) = 0$ для любых $p \in X_{i\xi}$ и $q \notin X_{j\eta}$. Следовательно,

$$\sum_{z \in X_{j\eta}} A(p, z) = 1.$$

Вместе с леммой 1 это дает, что $A(p, p') = 1/j$ для любых $p \in X_{i\xi}$ и $p' \in X_{j\eta}$. Переходя к транспонированным матрицам, аналогично получаем, что $A(p, p') = 1/i$ для любых $p \in X_{i\xi}$ и $p' \in X_{j\eta}$. Следовательно, $i = j$. Последнее соотношение вытекает из стохастичности столбцов матрицы A.

Из леммы 3 вытекает, что группа G изоморфна группе клеточно-диагональных матриц с клетками $G_1, G_2, \ldots$, каждая из которых является $(m_i \times m_i)$-матрицей, у которой в каждой строке и каждом столбце располагается в точности по одной единице, а остальные элементы — нули. А это и доказывает справедливость теоремы 4.

ЛИТЕРАТУРА

[1] БЕЛМАН, Р.: Введение в теорию матриц. М., Наука, 1969.

[2] FARAHAT, H. K.: The semigroup of doubly-stochastic matrices. Proc. Glasgow Math. Assoc., 1966, 7, 178—183.

[3] HARTFIEL, D. J.—MAXSON, C. J.: Constructing the maximal monoids in the semigroups $\mathcal{N}_n$, $\mathcal{S}_n$, and Ω_n. Compos. math., 1976, 32, 41—52.

[4] SCHWARZ, Š.: On the structure of the semigroup of stochastic matrices. Magyar Tud. Akad. Kutato Int. Közl., 1964, 9, 297—311.

[5] SCHWARZ, Š.: A note on the structure of the semigroup of doubly-stochastic matrices. Mat. Časop., 1967, 17, 308—316.

[6] SKORNJAKOV, L. A.: Convexors. Stud. Sci. Math. Hung., 1981, 16, 25—34.

Поступило 26. 4. 1985

Механико-математический факультет
В – 234 МГУ
117 237 Москва