Mathematica Slovaca

Milan Matejdes

Sur les sélecteurs des multifonctions

Mathematica Slovaca, Vol. 37 (1987), No. 1, 111--124

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/136441

Math. Slovaca 37, 1987, No. 1, 111—124

SUR LES SELECTEURS DES MULTIFONCTIONS

MILAN MATEJDES

Dans l'article présent, nous traitons de quelques questions sur la continuité et la mesurabilité des multifonctions, donc, sur leurs sélecteurs. Nous caractérisons les multifonctions mesurables au sens de Baire à l'aide du terme généralisé de la quasi-continuité et aussi à l'aide des multifonctions semi-continues supérieurement et semi-quasi-continues inférieurement.

Nous étudions les suites des sélecteurs quasi-continus et des sélecteurs jouissant de la propriété de Baire et dans la dernière partie, nous démontrons la condition nécessaire et suffisante pour l'existence des sélecteurs jouissant de la propriété de Baire.

1. $\mathscr{C}$-continuité

Soient X et Y deux espaces topologiques. Nous désignons par le symbole $\mathscr{C}$ la famille des ensembles non vides situés dans l'espace X telle que $\mathscr{C} \neq \emptyset$.

Soit F une multifonction qui fait correspondre à tout point x de l'espace X un sous-ensemble non vide $F(x)$ de l'espace Y.

Définition 1.1. *La multifonction F est u-$\mathscr{C}$continue (l-$\mathscr{C}$-continue) au point x_1, lorsque, pour chaque sous-ensemble ouvert G de Y tel que $F(x_1) \subset G (F(x_1) \cap G \neq \emptyset)$ et pour chaque entourage U de x_1 il existe un ensemble $C \in \mathscr{C}$ tel que $C \subset U$ et $F(x) \subset G (F(x) \cap G \neq \emptyset)$ pour chaque $x \in C$. La multifonction F est dite $\mathscr{C}$-continue au point x lorsqu'elle est u-$\mathscr{C}$-continue au point x et l-$\mathscr{C}$-continue au point x. La multifonction F est dite u-$\mathscr{C}$-continue (l-$\mathscr{C}$-continue) lorsqu'elle est u-$\mathscr{C}$-continue (l-$\mathscr{C}$-continue) en chaque point.*

Si $\mathscr{C}$ est la famille des ensembles ouverts non vides, alors les notions de u-$\mathscr{C}$-continuité (l-$\mathscr{C}$-continuité) et de semi-quasi-continuité supérieure (inférieure) sont équivalentes.

Soit I un σ-idéal sur X. La famille des ensembles R tels que $R \notin I$ est désigné par $\mathscr{C}(I)$. Soit $A \subset X$. Désignons par $D_I(A)$ l'ensemble des points $x \in X$ tels que pour chaque entourage U de x l'ensemble $A \cap U \notin I$.

Les trois lemmes suivants sont évidents.

Lemma 1.1. *On a les formules suivantes:*

1. $D_I(A) \subset \bar{A}$ *($\bar{A}$ est la fermeture de A)*

2. $D_I(A) = \overline{D_I(A)}$

3. *Si on suppose que l'espace X admet une base dénombrable, on a $A \setminus D_I(A) \in I$ (voir [3, p. 51]).*

Lemme 1.2. *Pour que F soit l-$\mathscr{C}(I)$-continue (u-$\mathscr{C}(I)$-continue) au point x, il faut et il suffit que pour chaque ensemble ouvert G, la condition $G \cap F(x) \neq \emptyset$ ($F(x) \subset G$) entraîne $x \in D_I(F^-(G))$ ($x \in D_I(F^+(G))$), où $F^-(G) = \{x \in X: F(x) \cap G \neq \emptyset\}$ et $F^+(G) = \{x \in X: F(x) \subset G\}$.*

Le lemme 1.2 implique un lemme suivant.

Lemme 1.3. *Pour qu'une multifonction F soit l-$\mathscr{C}(I)$-continue (u-$\mathscr{C}(I)$-continue),* il faut et il suffit que $F^-(G) \subset D_I(F^-(G))$ ($F^+(G) \subset D_I(F^+(G))$), *quel que soit l'ensemble ouvert G.*

Lemme 1.4. *Si l'on suppose que les espaces X, Y admettent une base dénombrable, l'ensemble A des points de l-$\mathscr{C}(I)$-discontinuité de la multifonction F appartient à I. Si l'ensemble $F(x)$ est compact pour chaque $x \in X$, alors l'ensemble B des points de u-$\mathscr{C}(I)$-discontinuité de la multifonction F appartient à I.*

Démonstration. Soit $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ une base de l'espace Y. D'après le lemme 1.2, pour que la multifonction F ne soit pas l-$\mathscr{C}(I)$-continue au point x, il faut et il suffit que lorsqu'il existe un ensemble ouvert G_n tel que $x \in F^-(G_n) \setminus D_I(F^-(G_n))$ et d'après le lemme 1.1, on a $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} (F^-(G_n) \setminus D_I(F^-(G_n))) \in I$.

Soit $\{V_k\}_{k=1}^{\infty}$ une suite de tous les sommes finies de la forme $G_{n_1} \cup G_{n_2} \cup \ldots \cup G_{n_r}$. L'ensemble $F(x)$ est compact et d'après le lemme 1.2, pour que la multifonction F ne soit pas u-$\mathscr{C}(I)$-continue au point x, il faut et suffit que, lorsqu'il existe un ensemble V_k tel que $x \in F^+(V_k) \setminus D_I(F^+(V_k))$, d'où on a $B = \bigcup_{k=1}^{\infty} (F^+(V_k) \setminus D_I(F^+(V_k)))$ et d'après le lemme 1.1, $B \in I$.

Définition 1.2. *Une multifonction F est dite semi-continue supérieurement (u.s.c.) (semi-continue inférieurement (l.s.c.)) au point x, lorsque, pour chaque sous-ensemble ouvert G de Y, la condition $F(x) \subset G$ ($F(x) \cap G \neq \emptyset$) entraîne $x \in \operatorname{int}(F^+(G))$ ($x \in \operatorname{int}(F^-(G))$). La multifonction F est dite u.s.c (l.s.c.) lorsqu'elle est u.s.c. (l.s.c.) en chaque point. Si la multifonction F est u.s.c. et l.s.c., elle est dite continue.*

Le théorème suivant est une généralisation du théorème de Neubrunnová (voir [1]).

Théorème 1.1. *Soit F une multifonction l-$\mathscr{C}(I)$-continue (u-$\mathscr{C}(I)$-continue). Si des points de semi-discontinuité inférieure (supérieure) de la multifonction F constituent un ensemble, qui appartient à I, alors la multifonction F est* *semi-quasi-continue inférieurement* (*l-quasi-continue*) (*semi-quasi-continue supérieurement* (*u-quasi-continue*)).

Démonstration. Soit G un ensemble ouvert tel que $F(x)\cap G\neq\emptyset$ $(F(x)\subset G)$ et soit U un entourage de x. La multifonction F est l-$\mathscr{C}(I)$-continue (u-$\mathscr{C}(I)$-continue) au point x, d'où $U\cap F^-(G)\notin I(U\cap F^+(G)\notin I)$. Donc, il existe un point x_1 tel que $x_1\in U\cap F^-(G)(x_1\in U\cap F^+(G))$ et F est *l.s.c.* (u.s.c.) *au point* x_1, *d'où il existe un ensemble ouvert* $H\subset U\cap F^-(G)(H\subset U\cap F^+(G))$ *et* $x_1\in H$.

Définition 1.3. *Une multifonction F jouit de la propriété* $H_I^-(H_I^+)$ *au point* x, *lorsque, pour chaque sous-ensemble ouvert* G *de* Y, *la condition* $F(x)\cap G\neq\emptyset$ $(F(x)\subset G)$ *entraîne* $x\in \operatorname{int} D_I(F^-(G))$ $(x\in\operatorname{int} D_I(F^+(G)))$.

Remarque 1.1. Soit $I=\{A\subset X$: A est un ensemble de I-e catégorie$\}$. Soit $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ une base de l'espace Y. L'ensemble B des points où la multifonction F ne possède pas la propriété H_I^- s'obtient par la réunion d'un nombre des $F^-(G_n)\setminus\operatorname{int} D_I(F^-(G_n))$. Les ensembles $R_n=(D_I(F^-(G_n))\setminus\operatorname{int} D_I(F^-(G_n)))\cap F\ (G_n)$ et $S_n=F^-(G_n)\setminus D_I(F^-(G_n))$ sont de I-e catégorie (voir [3, p. 51]), d'où l'ensemble $B=\bigcup_{n=1}^{\infty}(S_n\cup R_n)$ est de I-e catégorie. Si l'ensemble $F(x)$ est compact pour chaque $x\in X$, alors l'ensemble des points où la multifonction F ne possède pas la propriété H_I^+ est aussi de I-e catégorie.

Théorème 1.2. *Soit* $\mathscr{C}=\{(G\setminus S_1)\cup S_2$: *G est ouvert tel que* $G\notin I$, $S_1, S_2\in I\}$. *Y etant l'espace régulier, soit F une multifonction u-*$\mathscr{C}$*-continue. Si la multifonction F jouit de la propriété* H_I^- *au point* x, *alors la multifonction F est l.s.c.*

Démonstration. En supposant que la multifonction F ne soit pas *l.s.c.* au point x, il existe un ensemble ouvert G tel que $F(x)\cap G\neq\emptyset$ et à chaque entourage U de x corresponde un point $x_1\in U$ tel que $F(x_1)\subset Y\setminus\bar G$. La multifonction F jouit de la propriété H_I^- au point x, donc, il existe un entourage ouvert U_1 de x tel que la condition $H\subset U_1$ (H ouvert non vide) entraîne $H\cap F^-(G)\notin I$. Donc, aussi il existe un point $x_1\in U_1$ tel que $F(x_1)\subset Y\setminus\bar G$. La multifonction F étant u-$\mathscr{C}$-continue au point x_1, il existe un ensemble $A\subset U_1$ tel que $A=(V\setminus S_1)\cup S_2$ (V ouvert, $V\notin I$, S_1, $S_2\in I$) et pour chaque $x\in A$ on a $F(x)\subset Y\setminus\bar G$. Posons $H=V\cap U_1$. On a $A\subset U_1$ et $V\notin I$, d'où $H\subset U_1$ (H ouvert non vide) et pour chaque $x\in H\setminus S_1\neq\emptyset$ on a $F(x)\subset Y\setminus\bar G$, contrairement à la multifonction F jouit de la propriété H_I^- au point x.

Le théorème suivant se démontre de façon analogue.

Théorème 1.3. *Soit* $\mathscr{C}=\{(G\setminus S_1)\cup S_2$: *G est ouvert,* $G\notin I$ et $S_1, S_2\in I\}$. *Y étant l'espace régulier, soit F une multifonction l-*$\mathscr{C}$*-continue, soit* $F(x)$ *compact pour chaque* $x\in X$. Si la multifonction F jouit de la propriété H_I^+ *au point* x, *alors la multifonction F est u.s.c. au point* x.

Le théorème suivant se démontre de la façon analogue élaborée par Neubrunn et Náther (voir [2]).

On suppose que $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{C}$ pour $A_n \in \mathscr{C}$ et la puissance de l'ensemble $\mathscr{C}(A_n) = \{x \in X$: à chaque entourage U de x corresponde un ensemble $C \in \mathscr{C}$ tel que $C \subset U \cap A_n\}$ est $\geqq 2$.

Théorème 1.4. *On suppose que l'epace Y admet une base denombrable, soient X, Y les espaces réguliers, et chaque point de X admet une base dénombrable. La condition nécessaire et suffisante pour que F soit u-$\mathscr{C}$-continue au point x est l'existence d'un ensemble $A \in \mathscr{C}$ tel que $x \in \mathscr{C}(A)$ et la multifonction partielle $F|A \cup \{x\}$ soit u.s.c. au point x.*

2. $\mathscr{B}$-continuité

Dans cette partie nous supposons que I soit un σ-idéal des ensembles de I-e catégorie et $\mathscr{B}$ soit une famille des sous-ensembles de X de II-e catégorie qui jouissent de la proprieté de Baire.

Dans sinq théorèmes suivants on suppose que l'espace Y admet une base dénombrable, Y étant l'espace régulier.

Théorème 2.1. *Si une multifonction F est u-$\mathscr{B}$-continue, alors les points de semi-discontinuité inférieure de la multifonction F constituent un ensemble de I-e catégorie.*

Démonstration. D'après la remarque 1.1, l'ensemble des points où la multifonction F ne possède pas la proprieté H_I est de I-e catégorie et d'après le théorème 1.2, les points de semi-discontinuité inférieure de la multifonction F constituent un ensemble de I-e catégorie.

La démonstration du théorème suivant est analogue.

Théorème 2.2. *Soit F une multifonction l-$\mathscr{B}$-continue. Si l'ensemble $F(x)$ est compact pour chaque $x \in X$, alors les points de semi-discontinuité supérieure de la multifonction F constituent un ensemble de I-e catégorie.*

Théorème 2.3. *Si une multifonction F est $\mathscr{B}$-continue, alors la multifonction F est l-quasi-continue.*

Démonstration. D'après le théorème 2.1, l'ensemble des points de semi-discontinuité inférieure de la multifonction F est de I-e catégorie et d'après le théorème 1.1, la multifonction F est l-quasi-continue.

La démonstration du théoıème suivant est analogue.

Théorème 2.4. *Soit F une multifonction $\mathscr{B}$-continue. Si l'ensemble $F(x)$ est compact pour chaque $x \in X$, alors la multifonction F est u-quasi-continue.*

Deux théorèmes précédents impliquent un théorème suivant

Théorème 2.5. *X étant l'espace de Baire, soit $F(x)$ compact pour chaque $x \in X$. Pour que la multifonction F soit $\mathscr{B}$-continue, il faut et il suffit que la multifonction F soit quasi-continue.*

3. Propriété de Baire

Définition 3.1. *Une multifonction F jouit de la propriété de Baire, lorsque, quel que soit l'ensemble ouvert G, l'ensemble $F^-(G)$ jouit de la propriété de Baire.*

La démonstration du lemme suivant est évidente.

Lemme 3.1. *Soit X l'espace de Baire. Si les points de u-$\mathcal{B}$-discontinuité (l-$\mathcal{B}$-discontinuité) de la multifonction F constituent un ensemble A de I-e catégorie dans X, alors la multifonction partielle $F|X\setminus A$ est u-$\mathcal{B}_A$-continue (l-$\mathcal{B}_A$-continue), où $\mathcal{B}_A$ est la famille des sous-ensemble de $X\setminus A$ de II-e catégorie dans $X\setminus A$ qui jouissent de la propriété de Baire dans $X\setminus A$.*

Dans trois théorèmes suivants on suppose que l'espace Y admet une base dénombrable, Y étant l'espace métrique, soit X l'espace de Baire et $F(x)$ est compact pour chaque $x \in X$.

Théorème 3.1. *Pour qu'une multifonction F jouisse de la propriété de Baire, il faut et suffit que les points de l-$\mathcal{B}$-discontinuité de la multifonction F constituent un ensemble de I-e catégorie.*

Démonstration. Si la multifonction F jouit de la propriété de Baire, d'après le lemme 1.4, les points de l-$\mathcal{B}$-discontinuité de la multifonction F constituent un ensemble de I-e catégorie.

On suppose que les points de l-$\mathcal{B}$-discontinuité de la multifonction F constituent un ensemble A de I-e catégorie. D'après le lemme 3.1, la multifonction partielle $F|X\setminus A$ est l-$\mathcal{B}_A$-continue et d'après le théorème 2.2, les points de semi-discontinuité supérieure de la multifonction $F|X\setminus A$ constituent un ensemble S de I-e catégorie dans $X\setminus A$. Posons $Z=F|(X\setminus A)\setminus S$. Soit G ouvert. On a $Z^+(G)=(H\setminus A)\setminus S=(F^+(G)\setminus A)\setminus S$, où H est ouvert dans X, A est l'ensemble de I-e catégorie dans X et S est l'ensemble de I-e catégorie dans $X\setminus A$, donc aussi dans X, d'où l'ensemble $F^+(G)$ jouit de la propriété de Baire. Y étant l'espace métrique on a $Y\setminus G=\bigcap_{n=1}^{\infty} H_n$ (H_n ouvert) et $F^-(G)=X\setminus F^+(Y\setminus G)=X\setminus F^+\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} H_n\right)=X\setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} F^+(H_n)$, d'où l'ensemble $F^-(G)$ jouit de la propriété de Baire.

Théorème 3.2. *Pour qu'une multifonction F jouisse de la propriété de Baire, il faut et il suffit que les points de u-$\mathcal{B}$-discontinuité de la multifonction F constituent un ensemble de I-e catégorie.*

Démonstration. On suppose que la multifonction F jouit de la propriété de Baire. On a $F^+(G)=X\setminus F^-(Y\setminus G)=X\setminus F^-\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} H_n\right)=X\setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} F^-(H_n)$, où la suite $\{H_n\}_{n=1}^{\infty}$ est non croissante telle que H_n est ouvert et à chaque ensemble ouvert $U\supset Y\setminus G$ correspond l'ensemble H_n tel que $U\supset \bar{H}_n\supset H_n\supset Y\setminus G$. ($F(x)$ est compact, d'où on a $F\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} H_n\right)=\bigcap_{n=1}^{\infty} F^-(H_n)\Big)$. Donc, l'ensemble $F^+(G)$ jouit de la propriété de Baire. D'après le lemme 1.4, les points de u-$\mathscr{B}$-discontinuité de la multifonction F constituent un ensemble de I-e catégorie.

On suppose que les points de u-$\mathscr{B}$-discontinuité de la multifonction F constituent un ensemble A de I-e catégorie. D'après le lemme 3.1, la multifonction partielle $F|X\setminus A$ est u-$\mathscr{B}_A$-continue et d'après le théorème 2.1, les points de semi-discontinuité inférieure de la multifonction $F|X\setminus A$ constituent un ensemble S de I-e catégorie dans $X\setminus A$, donc, $Z^-(G)=(H\setminus A)\setminus S = (F^-(G)\setminus A)\setminus S$, ou $Z=F|(X\setminus A)\setminus S$, H est ouvert dans X, A est l'ensemble de I-e catégorie dans X et S est l'ensemble de I-e catégorie dans $X\setminus A$, donc aussi dans X, d'où l'ensemble $F^-(G)$ jouit de la propriété de Baire, où G est ouvert.

Deux théorèmes précédents impliquent le théorème suivant.

Théorème 3.3. *Les conditions suivantes sont équivalentes.*

1. *Une multifonction F jouit de la propriété de Baire.*
2. *Les points de l-$\mathscr{B}$-discontinuité de la multifonction F constituent un ensemble de I-e catégorie.*
3. *Les points de u-$\mathscr{B}$-discontinuité de la multifonction F constituent un ensemble de I-e catégorie.*
4. *Les points de $\mathscr{B}$-discontinuité de la multifonction F constituent de I-e catégorie.*

4. Propriété de Baire et des multifonctions semi-continues

Définition 4.1. *Soit F une multifonction, soit $x_1\in X$. Désignons par $\mathscr{C}_F(x_1)$ l'ensemble des points $y\in Y$ tels que pour chaque entourage V de y et pour chaque entourage U de x_1 il existe un ensemble $C\in\mathscr{C}$ tel que $C\subset U$ et $F(x)\cap V\neq\emptyset$ pour chaque $x\in C$.*

Lemme 4.1. *L'ensemble $\mathscr{C}_F(x_1)$ est fermé.*

Démonstration. Soit $y\in\overline{\mathscr{C}_F(x_1)}$. Soit V un entourage de y, soit U un entourage de x_1. Il existe un point $y_1\in V$ tel que $y_1\in\mathscr{C}_F(x_1)$, d'où il existe un ensemble $C\in\mathscr{C}$ tel que $C\subset U$ et $F(x)\cap V\neq\emptyset$ pour chaque $x\in C$, donc $y\in\mathscr{C}_F(x_1)$.

Lemme 4.2. *Pour qu'une multifonction F soit l-$\mathscr{C}$-continue au point x_1 il faut et il suffit que $F(x_1)\subset\mathscr{C}_F(x_1)$.*

Démonstration. Si $y\in F(x_1)$ et la multifonction F est *l-$\mathscr{C}$-continue au point* x_1, pour chaque entourage V de y et pour chaque entourage U de x_1 il existe un ensemble $C\in\mathscr{C}$ tel que $C\subset U$ et $F(x)\cap V\neq\emptyset$ pour chaque $x\in C$, d'où $y\in\mathscr{C}_F(x_1)$.

Soit $F(x_1)\subset\mathscr{C}_F(x_1)$. Soit V un ensemble ouvert, soit U un entourage de x_1. Si $V\cap F(x_1)\neq\emptyset$, il existe un point $y\in V\cap F(x_1)$. $F(x_1)\subset\mathscr{C}_F(x_1)$, d'où il existe un ensemble $C\in\mathscr{C}$ tel que $C\subset U$ et $F(x)\cap V\neq\emptyset$ pour chaque $x\in C$, donc la multifonction F est l-$\mathscr{C}$-continue au point x_1.

Lemma 4.3. *Soit* $\{x_t, t\in T\}$ *un système filtrant qui converge vers* x_1. *Soit* $\{y_t, t\in T\}$ *un système filtrant qui converge vers* y_1 *tel que* $y_t\in\mathscr{C}_F(x_t)$. *On a* $y_1\in\mathscr{C}_F(x_1)$.

Démonstration. Si V est entourage ouvert de y_1 et U est un entourage de x_1, il existe $t_1\in T$ tel que $y_t\in V$ et $x_t\in U$ pour chaque $t>t_1$. Le point $y_t\in\mathscr{C}_F(x_t)$, d'où il existe un ensemble $C\in\mathscr{C}$ tel que $C\subset U$ et $F(x)\cap V\neq\emptyset$ pour chaque $x\in C$, donc $y_1\in\mathscr{C}_F(x_1)$.

Lemme 4.4. *Soit* Y *l'espace de Hausdorff compact. Si l'ensemble* $\mathscr{C}_F(x)$ *est non vide pour chaque* $x\in X$, *alors la multifonction* $\mathscr{C}_F$: $x\mapsto\mathscr{C}_F(x)$ *est u.s.c.*

Démonstration. En supposant que la multifonction $\mathscr{C}_F$ ne soit pas *u.s.c.* au point x_1, il existe un ensemble ouvert G tel que $G\supset\mathscr{C}_F(x_1)$, il existe un système filtrant $\{x_t, t\in T\}$ qui converge vers x_1 tel que pour chaque $t\in T$ il existe un point $y_t\in\mathscr{C}_F(x_t)\setminus G$. Y est l'espace de Hausdorff compact, donc il existe un système filtrant partiel $\{y_{t'}, t'\in T'\}$ du système filtrant $\{y_t, t\in T\}$ qui converge vers $y_1\in Y\setminus G$. D'après le lemme 4.3, $y_1\in\mathscr{C}_F(x_1)$, contrairement à la formule $\mathscr{C}_F(x_1)\subset G$.

Le lemme suivant est évident.

Lemme 4.5. *Soit* Y *l'espace régulier. Soit* $F(x_1)$ *un ensemble fermé. Si* F *est u.s.c. au point* x_1, *alors* $\mathscr{C}_F(x_1)\subset F(x_1)$.

Théorème 4.1. *On suppose que l'espace* Y *admet une base dénombrable,* Y *étant l'espace de Hausdorff compact, soit* X *l'espace de Baire. Soit* $F(x)$ *compact pour chaque* $x\in X$. *Pour que* F *jouisse de la propriété de Baire, il faut et il suffit qu'il existe une multifonction* G: $X\to Y$ *telle que* G *est u.s.c. et l-quasi-continue,* $G(x)$ *est compact pour chaque* $x\in X$ *et l'ensemble* $\{x\in X\colon F(x)\neq G(x)\}$ *est de I-e catégorie.*

Démonstration. D'après le théorème 3.1, les points de *l*-$\mathscr{B}$-discontinuité de la multifonction F constituent un ensemble A de I-e catégorie et d'après le lemme 4.2, on a: $F(x)\subset\mathscr{B}_F(x)$ pour chaque $x\in X\setminus A$. X est l'espace de Baire, d'où l'ensemble $X\setminus A$ est dense et d'après le lemme 4.3, l'ensemble $\mathscr{B}_F(x)$ est non vide pour chaque $x\in X$. D'après la remarque 1.1, l'ensemble S des points où la multifonction F ne possède pas la propriété H_I^+ est de I-e catégorie. Nous montrerons que $F(x)\supset\mathscr{B}_F(x)$ pour chaque $x\in X\setminus S$. S'il existe $x_1\in X\setminus S$ tel que $\mathscr{B}_F(x_1)\setminus F(x_1)\neq\emptyset$, il existe deux ensembles ouverts G_1, G_2 tels que $G_1\cap G_2=\emptyset$, $F(x_1)\subset G_2$ et $y_1\in G_1$, où $y_1\in\mathscr{B}_F(x_1)\setminus F(x_1)$. La multifonction F jouit de la propriété H_I^+ au point x_1, donc il existe un entourage ouvert U de x_1 et il existe un ensemble R de I-e catégorie tel que $R\subset U$ et $F(U\setminus R)\subset G_2$ (R est de I-e catégorie parce que la multifonction F jouit de la propriété de Baire). Le point $y_1\in\mathscr{B}_F(x_1)$, d'où il exists un ensemble B tel que tel que $B\in\mathscr{B}$, $B\subset U$ et $F(x)\cap G_1\neq\emptyset$ pour chaque $x\in B$, contrairement à la formule $G_1\cap G_2=\emptyset$. Donc $F(x)=\mathscr{B}_F(x)$ pour chaque $x\in X\setminus(S\cup A)$. Posons: $G=\mathscr{B}_F$. L'espace Y est compact, donc d'après le lemme 4.4, la multifonction $\mathscr{B}_F$ est *u.s.c.* Nous montretons que $\mathcal{B}_F$ est l-quasi-continue. Soit $x_1 \in X$, soit G un ensemble ouvert tel que $\mathcal{B}_F(x_1) \cap G \neq \emptyset$, soit U un entourage de x_1. L'ensemble $\mathcal{B}_F(x_1) \cap G$ est non vide, donc il existe un point $y_1 \in \mathcal{B}_F(x_1) \cap G$, d'où il existe un ensemble $B \in \mathcal{B}$ tel que $B \subset U$ et $F(x) \cap G \neq \emptyset$ pour chaque $x \in B$. Si $x \in X \setminus A$, $F(x) \subset \mathcal{B}_F(x)$, d'où $\mathcal{B}_F(x) \cap G \supset F(x) \cap G \neq \emptyset$ pour chaque $x \in B \setminus A \subset U$, donc $\mathcal{B}_F$ est l-$\mathcal{B}$-continue au point x_1. D'après le théorème 1.1, la multifonction $\mathcal{B}_F = G$ est l-quasi-continue.

On suppose qu'il existe une multifonction G: $X \to Y$ telle que G est *u.s.c.* et l-quasi-continue, $G(x)$ est compact pour chaque $x \in X$ et l'ensemble $R = \{x \in X\colon\ F(x) \neq G(x)\}$ est de I-e catégorie. Soit $H \subset Y$ ouvert. La multifonction G est l-quasi-continue, donc $G^-(H)$ jouit de la propriété de Baire. L'ensemble R est de I-e catégorie et $G^-(H) \cap (X \setminus R) = F^-(H) \cap (X \setminus R)$, d'où $F^-(H)$ jouit de la propriété de Baire.

5. Sélecteurs des multifonctions

Dans cette partie nous supposons que Y étant l'espace métrique compact et X étant l'espace de Baire. Soit F: $X \to Y$ une multifonction, soit r: $X \to Y$ une fonction. Désignons par F_r une multifonction telle que $F_r(x) = \{y \in F(x)\colon d(y, r(x)) = d(F(x), r(x))\}$, où $d(a, b)$ est la distance entre les points a et b et $d(A, b) = \inf\{d(a, b)\colon\ a \in A\}$ pour $A \subset Y$, $b \in Y$. Soit $2^Y = \{K \subset Y\colon\ K$ est compact, non vide$\}$.

Théorème 5.1. *Si la multifonction F: $X \to 2^Y$ et la fonction r: $X \to Y$ sont continues au point x_1, alors la multifonction F_r est u.s.c. au point x_1.*

Démonstration. Posons $S(\varepsilon, A) = \{y \in Y\colon\ d(A, y) < \varepsilon\}$. En supposant que la multifonction F_r ne soit pas *u.s.c.* au point x_1, il existe $\varepsilon > 0$ et il existe un système filtrant $\{x_t, t \in T\}$ qui converge vers x_1 tel que pour chaque $t \in T$ il existe $y_t \in F_r(x_t) \setminus S(\varepsilon, F_r(x_1))$. Parce que Y étant l'espace compact, il existe un point $y_1 \in Y \setminus S(\varepsilon, F_r(x_1))$ et un sous-système filtrant $\{y_{t'}, t' \in T'\}$ de $\{x_t, t \in T\}$ qui converge vers y_1. F est *u.s.c.* au point x_1, d'où $y_1 \in F(x_1)$. Parce que $y_1 \notin F_r(x_1)$ on a $d(y_1, r(x_1)) > s$ où $s = d(F(x_1), r(x_1))$. Soient s_1 et G ouvert tels que:

1. $\dfrac{d(y_1, r(x_1)) - s}{3} > s_1 > 0$
2. $S(s_1, y_1) \cap S(s, r(x_1)) = \emptyset$
3. $F_r(x_1) \subset G \subset S(\varepsilon, F_r(x_1))$
4. $S(s_1, y_1) \cap G = \emptyset$

Soit $\delta = \dfrac{d(y_1, r(x_1)) - s}{3}$. Parce que F est *l.s.c.* au point x_1 et r est continue au point x_1, il existe un entourage U de x_1 tel que pour chaque $x \in U$ on a:

$$r(x) \in S(\delta, r(x_1)) \tag{1}$$

$$d(F(x), r(x)) \leqq s + \delta \tag{2}$$

Parce que $\{y_{t'}, t' \in T'\}$ converge vers y_1 et $\{x_{t'}, t' \in T'\}$ converge vers x_1 il existe $t'_1 \in T'$ tel que $y_{t'} \in S(s_1, y_1)$ et $x_{t'} \in U$ pour chaque $t' > t'_1$, $t' \in T'$. Pour $t' > t'_1$ on a $y_1 \in F_r(x_{t'}) \cap S(s_1, y_1)$, d'où $d(F(x_{t'}), r(x_{t'})) > s + \delta$, contrairement à l'inégalité (2).

Théorème 5.2. *Si une multifonction F: $X \to 2^Y$ jouit de la propriété de Baire, alors il existe une multifonction F_*: $X \to 2^Y$ telle que les ensembles $\{x \in X$: $F_*(x) \subset F(x)\}$, $\{x \in X$: card $(F_*(x)) = 1\}$ sont résiduels et F_* est u.s.c. et l-quasi-continue (card (R) = la puissance de l'ensemble R).*

Démonstration. Si G est une multifonction, nous désignons par le symbole G_0 la multifonction $\mathscr{B}_G$. Soit $\{r_n, n = 1, 2, 3, \ldots\}$ un ensemble dense dans Y. Posons $F_1 = (F_0)_{r_1} = (\mathscr{B}_F)_{r_1}$, $F_n = ((F_{n-1})_0)_{r_n}$, $n = 2, 3, 4, \ldots$ D'après le théorème 4.1, l'ensemble $B = \{x \in X$: $F(x) \neq F_0(x)\}$ est de I-e catégorie. D'après le théorème 5.1, l'ensemble des points de semi-discontinuité supérieurement de la multifonction F_n constituent un ensemble A_n de I-e catégorie et d'après le lemme 4.5, $\{x \in X$: $(F_n)_0(x) \subset F_n(x)\} \subset X \setminus A_n$. Posons $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Si $x \in X \setminus A$, $F_{n+1}(x) \subset F_n(x)$ pour $n = 1, 2, \ldots$ Parce que Y étant l'espace compact et $F_n(x)$ est fermé, l'ensemble $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n(x)$ est non vide pour $x \in X \setminus A$. Si $y_1, y_2 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n(x)$, $(y_1 \neq y_2)$, $d(y_1, r_n) = d(y_2, r_n)$ pour chaque $n = 1, 2, 3, \ldots$ L'ensemble $\{r_n, n = 1, 2, 3, \ldots\}$ est dense dans Y, donc il existe un point r_i tel que $d(r_i, y_1) < d(y_1, y_2)/4$. On a:

$$d(y_1, y_2) \leqq d(y_1, r_i) + d(r_i, y_2) = 2d(r_i, y_1) < d(y_1, y_2)/2,$$

contrairement à l'inégalité $y_1 \neq y_2$, d'où on a l'égalité card $\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n(x)\right) = 1$ pour chaque $x \in X \setminus A$. F_n est u.s.c. au point $x \in X \setminus A$ pour $n = 1, 2, 3, \ldots$ d'où $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ est u.s.c. au point $x \in X \setminus A$ (voir [4, p. 37]). Posons $F_* = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n\right)_0$. L'ensemble $F_*(x)$ est non vide pour $x \in X \setminus A$. Parce que X étant l'espace de Baire, $X \setminus A$ est dense dans X, donc d'après le lemme 4.3, $F_*(x)$ est non vide pour chaque $x \in X$. D'après le théorème 4.1, la multifonction F_* est u.s.c., semi-quasi-continue inférieurement, card $(F_*(x)) = 1$ pour chaque $x \in X \setminus A$ et $F_*(x) \subset F(x)$ pour chaque $x \in X \setminus (A \cup B)$ (La multifonction $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ est u.s.c. au point $x \in X \setminus A$, d'où on a card $(F_*(x)) = 1$ pour chaque $x \in X \setminus A$, d'après le lemme 4.5).

Définition 5.1. *Soit f: $X \to Y$ une fonction. Si $f(x) \in F(x)$ pour chaque $x \in X$, la fonction f est dite un sélecteur de la multifonction F.*

Corollaire 1. *Si f est un sélecteur de la multifonction F_* (F_* du théorème 5.2), la fonction f est quasi-continue.*

Démonstration. L'ensemble $A=\{x\in X:\ \text{card}\,(F(x))>1\}$ est de I-e catégorie et la fonction f est continue au point $x\in X\setminus A$. Soit V un entourage de $f(x_1)$, soit U un entourage de $x_1\in X$. Parce que $f(x_1)\in F_*(x_1)$ et la multifonction F_* est semi-quasi-continue inférieurement au point x_1, il existe un ensemble ouvert $H\subset U$ tel que $F_*(x)\cap V\neq\emptyset$ pour chaque $x\in H$. Posons $B=H\setminus A\subset U$. L'ensemble $B\in\mathcal{B}$, $F_*(x)=\{f(x)\}\subset V$ pour chaque $x\in B$, donc f est $\mathcal{B}$-continue, d'où la fonction f est quasi-continue, d'après le théorème 1.1.

Corollaire 2. *Si la multifonction F: $X\to 2^Y$ jouit de la propriété de Baire, alors il existe une fonction quasi-continue f: $X\to Y$ de première classe de Baire telle que l'ensemble $\{x\in X:\ f(x)\notin F(x)\}$ est de I-e catégorie.*

Démonstration. D'après le théorème 5.2, F_* est u.s.c. et l'ensemble $\{x\in X:\ F_*(x)\subset F(x)\}$ est residuel. D'après le théorème de Kuratowski—Ryll—Nardzewski (voir [5, p. 433]), il existe un sélecteur f de F_* tel que f est de première classe de Baire et d'après le corollaire 1 du théorème 5.2, la fonction f est quasi-continue.

Corollaire 3. *Pour qu'une fonction f jouisse de la propriété de Baire, il faut et il suffit qu'il existe une fonction g: $X\to Y$ quasi-continue de première classe de Baire telle que l'ensemble $\{x\in X:\ f(x)\neq g(x)\}$ soit de I-e catégorie.*

Corollaire 4. *Si une multifonction F est u.s.c., il existe un sélecteur f de F tel que f est quasi-continu de première classe de Baire* (voir [5, p. 433]).

Théorème 5.3. *Si une multifonction F: $X\to 2^Y$ est u-$\mathcal{B}$-continue, il existe un sélecteur quasi-continu f de F.*

Démonstration. D'après le théorème 3.1, F jouit de la propriété de Baire et d'après le théorème 5.2, $F(x)\cap F_*(x)\neq\emptyset$ pour chaque $x\in X\setminus A$, où A est I e catégorie $A=\{x\in X:\ F_*(x)\not\subset F(x)\}$. Nous montrerons que $F(x)\cap F_*(x)\neq\emptyset$ pour chaque $x\in X$. Soit $x_1\in X$. En supposant que $F(x_1)\cap F_*(x_1)=\emptyset$, il existe des ensembles ouverts G_1, G_2 tels que $G_1\cap G_2=\emptyset$, $G_1\supset F_*(x_1)$, $G_2\supset F(x_1)$. F_* est u.s.c au point x_1, d'où il existe un entourage U de x_1 tel que $F_*(x)\subset G_1$ pour chaque $x\in U$. La multifonction F est u-$\mathcal{B}$-continue au point x_1, d'où il existe un ensemble $B\in\mathcal{B}$, $B\subset U$ tel que $F(x)\subset G_2$ pour chaque $x\in B$. On a donc $F(x)\cap F_*(x)=\emptyset$ pour chaque $x\in B$, contrairement à la formule $F(x)\cap F_*(x)\neq\emptyset$ pour chaque $x\in X\setminus A$. Soit f un sélecteur de $F\cap F_*$. D'après le corollaire 1 du théorème 5.1, la fonction f est quasi-continue.

Corollaire 1. *Si une multifonction F: $X\to 2^Y$ est semi-quasi-continue supérieurement, il existe un sélecteur quasi-continu de F.*

Théorème 5.4. *Soit F: $X\to 2^Y$. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

1. *Il existe un sélecteur f de F tel que l'ensemble des points de quasi-continuité de la fonction f est résiduel.*

2. *Il existe un ensemble S dense dans X tel que* $\mathscr{T}_F(x) \neq \emptyset$ *pour chaque* $x \in S$, *où* $\mathscr{T}$ *est une famille des ensembles ouverts non vides dans X.*

Démonstration. Soit f un sélecteur de F tel que l'ensemble S des points de quasi-continue de la fonction f est résiduel. X étant l'espace de Baire, l'ensemble S est dense et $f(x) \in \mathscr{T}_F(x)$ pour chaque $x \in S$.

Si $\mathscr{T}_F(x)$ est non vide pour chaque $x \in S$, alors $\mathscr{T}_F(x)$ est non vide pour chaque $x \in X$, d'après le lemme 4.3. D'après le lemme 4.4, la multifonction $\mathscr{T}_F$ est *u.s.c.* et d'après le corollaire 4 du théorème 5.2, il existe un sélecteur quasi-continu r de $\mathscr{T}_F$. L'ensemble A des points où la multifonction F ne possède pas la propriété H_I^+ est de I-e catégorie, d'après la remarque 1.1. Nous montrerons que $F(x) \supset \mathscr{T}_F(x)$ pour chaque $x \in X \setminus A$. En supposant qu'il existe des points x_1, y_1 tels que $x_1 \in X \setminus A$ et $y_1 \in \mathscr{T}_F(x_1) \setminus F(x_1)$, il existe deux ensembles ouverts G_1, G_2 tels que $y_1 \in G_1$, $F(x_1) \subset G_2$, $G_1 \cap G_2 = \emptyset$. La multifonction F jouit de la propriété H_I^+ au point x_1, donc, il existe un ensemble ouvert U, $x_1 \in U$ tel que pour chaque ensemble ouvert $H \subset U$ il existe un ensemble R de II-e catégorie tel que $R \subset H$ et $F(x) \subset G_2$ pour chaque $x \in R$. Le point $y_1 \in \mathscr{T}_F(x_1)$, donc, il existe un ensemble $T \in \mathscr{T}$, $T \subset U$ tel que $F(x) \cap G_1 \neq \emptyset$ pour chaque $x \in T$, contrairement à la formule $F(x) \subset G_2$ pour chaque $x \in R$, où R est II-e catégorie, $R \subset T$. Donc, $r(x) \in F(x)$ pour chaque $x \in X \setminus A$. La fonction r est quasi-continue, donc, l'ensemble B des points de discontinuité de la fonction r est de I-e catégorie. Soit $x_1 \in X \setminus (A \cup B)$. Nous montrerons que la multifonction F_r (voir le théorème 5.1) est u-quasi-continue au point x_1. Soit $S(\varepsilon, r(x_1)) \supset \{r(x_1)\} = F_r(x_1)$, soit U un entourage de x_1. La fonction r est continue au point x_1, donc il existe un entourage ouvert U_1 de x_1 tel que $U_1 \subset U$ et $r(U_1) \subset S(\varepsilon/4, r(x_1))$. Le point $r(x_1) \in \mathscr{T}_F(x_1)$, donc il existe un ensemble ouvert $V \subset U_1$ tel que $F(x) \cap S(\varepsilon/4, r(x_1)) \neq \emptyset$ pour chaque $x \in V$, d'où $d(r(x), F(x)) < \varepsilon/2$ pour chaque $x \in V$, donc, on a $F_r(x) \subset S(\varepsilon, r(x_1))$. Soit f un sélecteur de F_r $(F_r \subset F)$. Card $(F_r(x)) = 1$ pour chaque $x \in X \setminus (A \cup B)$ et la multifonction F_r est u-quasi--continue au point x, donc la fonction f est quasi--continue au point x.

Corollaire 1. *Si l'ensemble A des points de quasi-continuité d'une fonction f est dense, A est résiduel.*

Corollaire 2. *Si l'ensemble des points de l-quasi-continuité d'une multifonction F:* $X \to 2^Y$ *est dense, il existe un sélecteur f de F tel que les points de quasi-discontinuité du sélecteur f constituent un ensemble de I-e catégorie.*

Théorème 5.5. *Soit F:* $X \to 2^Y$. *Les conditions suivantes sont équivalentes.*

1. *Il existe un sélecteur f de F tel que f jouit de la propriété de Baire.*
2. *Il existe un ensemble S dense dans X tel que* $\mathscr{B}_F(x) \neq \emptyset$ *pour chaque* $x \in S$.

Démonstration. Soit f un sélecteur de F tel que f jouit de la propriété de Baire. D'après le théorème 3.3, les points de $\mathscr{B}$-discontinuité de la fonction f constituent un ensemble A de I-e catégorie. X étant l'espace de Baire, l'ensemble $S = X \setminus A$ est dense dans X et $f(x) \in \mathscr{B}_F(x)$ pour chaque $x \in S$.

Si $\mathscr{B}_F(x)$ est non vide pour chaque $x \in S$, alors $\mathscr{B}_F(x)$ est non vide pour chaque $x \in X$, d'après le lemme 4.3. D'après le lemme 4.4, la multifonction $\mathscr{B}_F$ est *u.s.c.* et d'après le corollaire 4 du théorème 5.2, il existe un sélecteur quasi-continu r de $\mathscr{B}_F$. L'ensemble A des points où F ne possède pas la propriété H_I^+ est de I-e catégorie, d'après la remarque 1.1. Nous démontrerons que $\mathscr{B}_F(x) \subset F(x)$ pour chaque $x \in X \setminus A$. En supposant qu'il existe des points x_1 et y_1 tels que $x_1 \in X \setminus A$ et $y_1 \in \mathscr{B}_F(x_1) \setminus F(x_1)$, il existe deux ensembles ouverts G_1 et G_2 tels que $y_1 \in G_1$, $G_2 \supset F(x_1)$, $G_1 \cap G_2 = \emptyset$. La multifonction F jouit de la propriété H_I^+ au point x_1, donc il existe un entourage U de x_1 tel que pour chaque ensemble ouvert $H \subset U$ il existe un ensemble T de II-e catégorie tel que $T \subset H$ et $F(x) \subset G_2$ pour chaque $x \in T$. Le point $y_1 \in \mathscr{B}_F(x_1)$, donc il existe un ensemble $B \in \mathscr{B}$, $B \subset U$ tel que $F(x) \cap G_1 \neq \emptyset$ pour chaque $x \in B$. Soit $B = (H \setminus R_1) \cup R_2$, où H est ouvert et R_1 et R_2 sont de I-e catégorie. L'ensemble $H \cap U$ est non vide. X étant l'espace de Baire, l'ensemble $(H \cap U) \setminus R_1$ est non vide et $F(x) \cap G_1 \neq \emptyset$ pour chaque $x \in (H \cap U) \setminus R_1$. Donc, il existe un ensemble T de II-e catégorie, $T \subset H \cap U$ et $F(x) \subset G_2$ pour $x \in T$, d'où $F(x) \subset G_2$ et $F(x) \cap G_1 \neq \emptyset$ pour chaque $x \in T \setminus R_1$, contrairement à la formule $G_1 \cap G_2 = \emptyset$. Donc $r(x) \in F(x)$ pour chaque $x \in X \setminus A$. La fonction r est quasi-continue, donc l'ensemble C des points de discontinuité de la fonction r est de I-e catégorie. Soit $z \in X \setminus (A \cup C)$. Nous démontrerons que F_r (voir le théorème 5.1) est u-$\mathscr{B}$-continue au point z. Soit $S(\varepsilon, r(z)) \supset \{r(z)\} = F_r(z)$, soit U un entourage de z. La fonction r est continue au point z, donc il existe un entourage U_1 de z tel que $U_1 \subset U$ et $r(U_1) \subset S(\varepsilon/4, r(z))$. Le point $r(z) \in \mathscr{B}_F(z)$, donc il existe un ensemble $B_1 \in \mathscr{B}$ tel que $F(x) \cap S(\varepsilon/4, r(z)) \neq \emptyset$ pour chaque $x \in B_1$, d'où on a $d(r(x), F(x)) < \varepsilon/2$ pour chaque $x \in B_1$, donc $F_r(x) \subset S(\varepsilon, r(z))$. Soit f un sélecteur de $F_r (F_r \subset F)$, soit $x \in X \setminus (A \cup C)$. Card $(F_r(x)) = 1$ et F_r est u-$\mathscr{B}$-continue au point x, donc la fonction f est u-$\mathscr{B}$-continue au point x. L'ensemble $A \cup C$ est de I-e catégorie, donc d'après le théorème 3.2, la fonction f jouit de la propriété de Baire.

Corollaire 1. *Si l'ensemble A des points de $\mathscr{B}$-continuité d'une fonction f est dense, alors $X \setminus A$ est de I-e catégorie.*

Corollaire 2. *Si l'ensemble des points de l-$\mathscr{B}$-continuité d'une multifonction F est dense, alors il existe un sélecteur f de F qui jouit de la propriété de Baire.*

Définition 5.2. *Une multifonction F: $X \to Y$ est dite s-$\mathscr{C}$-continue au point z, lorsque pour chaque ensemble ouvert G tel que $F(z) \subset G$, pour chaque ensemble V tel que $F(z) \cap V \neq \emptyset$ et pour chaque entourage U de z il existe un ensemble $C \in \mathscr{C}$ tel que $C \subset U$ et $F(x) \subset G$ et $F(x) \cap V \neq \emptyset$ pour chaque $x \in C$. La multifonction F est dite s-$\mathscr{C}$-continue, lorsqu'elle est s-$\mathscr{C}$-continue en chaque point.*

Théorème 5.6. *Si une multifonction F: $X \to 2^Y$ est s-$\mathscr{B}$-continue, alors il existe une suite des sélecteurs quasi-continus $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ de F telle que $F = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} f_n}$.*

Démonstration. Soit $r=\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ une suite dense dans Y. Posons $r_1=\{s_1, s_2, s_3, \ldots\}, \ldots, r_n=\{s_n, s_2, s_3, \ldots, s_n, \ldots\}$. La suite r_n est dense dans Y, donc d'après la démonstration du théorème 5.2, il existe une multifonction F_*^n telle que des enembles $\{x\in X\colon \operatorname{card}(F_*^n(x))>1\}$ et $\{x\in X\colon F_*^n(x)\not\subset F(x)\}$ sont de I-e catégorie. L'espace Y admet une base dénombrable, donc pour chaque $x\in X$ et pour chaque n il existe une suite $\{y_i^n(x)\}_{i=1}^{\infty}$ dense dans $F_*^n(x)\cap F(x)$. $.(y_i^n(x)\in F_*^n(x)\cap F(x)$, $F^n(x)\cap F(x)$ est non vide, d'après le théorème 5.3). Posons $f_i^n(x)=y_i^n(x)$ pour chaque $n=1, 2, 3, \ldots$ $i=1, 2, 3, \ldots$ La fonction f_i^n est continue et $F(x)\cap F_*^n(x)=\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} f_i^n(x)}$ pour chaque $x\in X$. Soit $x_1\in X$, soit $y_1\in F(x_1)$. Nous montrerons que pour chaque $\varepsilon>0$ il existe n tel que $F_*^n(x_1)\cap F(x_1)\cap S(\varepsilon, y_1)$ est non vide. La suite r est dense dans Y, donc il existe un point s_n tel que $d(s_n, y_1)<\varepsilon/16$. La multifonction F est s-$\mathcal{B}$-continue au point x_1, donc il existe un ensemble $B\in\mathcal{B}$ tel que pour chaque entourage U de x_1 on a $U\cap B\in\mathcal{B}$, $F(x)\cap S(\varepsilon/16, y_1)\neq\emptyset$ pour chaque $x\in B$ et si un système filtrant $\{x_t\in B, t\in T\}$ converge vers x_1 et un système filtrant $\{y_t\in F(x_t), t\in T\}$ converge vers y, alors $y\in F(x_1)$. On a $d(s_n, F(x))<\varepsilon/8$ pour chaque $x\in B$, donc $F_{s_n}(x)\subset S(\varepsilon/4, s_n)\subset S(\varepsilon/2, y_1)$ pour chaque $x\in B$. La multifonction F est s-$\mathcal{B}$-continue, donc d'après le théorème 2.1 et le théorème 2.2, un ensemble S des points de discontinuité de la multifonction F est de I-e catégorie. Si $x\in B\setminus S$, alors F_{s_n} est u.s.c. au point x et on a $(F_{s_n})_0(x)\subset S(\varepsilon/2, y_1)$, d'où $F_*^n(x)=\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} F_i^n\right)_0(x)\subset S(\varepsilon/2, y_1)$ pour chaque $x\in B\setminus S$, où $F_1^n=F_{s_n}$, $F_2^n=((F_{s_n})_0)_{s_2}, \ldots, F_{i+1}^n=((F_i^n)_0)_{s_{i+1}}, \ldots$ (Si G est une multifonction, nous désignons par le symbole G_0 la multifonction $\mathcal{B}_G$). X étant l'espace de Baire,donc $(B\setminus S)\cap U\neq\emptyset$ pour chaque entourage U de x_1, Y est compact, d'où il existe un système filtrant $\{x_t\in B\setminus S, t\in T\}$ qui converge vers x_1 et il existe un système filtrant $\{y_t\in F_*^n(x_t)\cap F(x_t), t\in T\}$ qui converge vers $y\in S(\varepsilon, y_1)$. La multifonction F_*^n est u.s.c. au point x_1 et la multifonction F est s-$\mathcal{B}$-continue au point x_1, d'où $y\in F_*^n(x_1)\cap F(x_1)\cap S(\varepsilon, y_1)$, donc on a $F=\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} F_*^n\cap F}$. Enfin on a $F=\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty}\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} f_i^n}}=\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{i=1}^{\infty} f_i^n}$.

Corollaire 1. *Soit $F\colon X\to 2^Y$ une multifonction. Si la multifonction F est u.s.c. et l-quasi-continue (l.s.c. et u-quasi-continue), alors il existe une suite des sélecteurs quasi-continus $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ de F telle que pour chaque $x\in X$ on a $F(x)=\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} f_n(x)}$.*

Corollaire 2. *Soit $F\colon X\to 2^Y$ une multifonction. Les conditions sont équivalentes*

1. *La multifonction F jouit de la propriété de Baire.*

2. *Il existe une multifonction* G: $X \to 2^Y$ *telle que* G *est u.s.c. et l-quasi-continue et l'ensemble* $\{x \in X\colon\ F(x) \neq G(x)\}$ *est de I-e catégorie.*

3. *Il existe une suite des fonctions quasi-continues* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *telle que l'ensemble* $\left\{x \in X\colon\ F(x) \neq \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} f_n(x)}\right\}$ *est de I-e catégorie.*

4. *Il existe une suite des sélecteurs* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *de* F *telle que* f_n *jouit de la propriété de Baire et pour chaque* $x \in X$ $F(x) = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} f_n(x)}$.

OUVRAGES CITÉS

[1] NEUBRUNNOVÁ, A.: On quasicontinuous and cliquish functions. Čas. pěst. mat. 99, 1974, 109—114.

[2] NEUBRUNN, T.—NÁTHER, O.: On a characterization of quasicontinuous multifunctions. Čas. pěst. mat. 107, 1982, 294—300.

[3] KURATOWSKI, C.: Topologoe I. Warszawa 1952.

[4] KURATOWSKI, C.: Topologie II. Warszawa 1952.

[5] KURATOWSKI, K.—MOSTOWSKI, A.: Teoria mnogosci. Warszawa 1978.

Reçu le 26 mars 1985

Matematický ústav SAV
Obrancov mieru 49
814 73 Bratislava

О СЕЛЕКТОРАХ МНОГОЗНАЧНЫХ ФУНКЦИЙ

Milan Matejdes

Резюме

В работе рассматривается связь между многозначными отображенями, измеримыми в смысле Бэра, и полунепрерывными (полуквазинепрерывными) многозначными отображениями. Также исследуются некоторые обобщения непрерывности и процесс конструкции измеримых и квазинепрерывных селекторов многозначных функций.