Štefan Solčan

Zur mengentheoretischen Darstellung gewisser Primideale

Mathematica Slovaca, Vol. 35 (1985), No. 2, 199--210

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/136388

Math. Slovaca 35, 1985, No. 2, 199—210

ZUR MENGENTHEORETISCHEN DARSTELLUNG GEWISSER PRIMIDEALE

ŠTEFAN SOLČAN

Das „klassische Kurvenproblem" gehört zu anspruchsvollen Problemen, die einen grossen Arbeitseinsatz erfordern. L. Kronecker formulierte es als Erster (1882): „Jede algebraische Varietät im n-dimensionalen Raum ist ein Durchschnitt von höchstens $n+1$ Hyperflächen". Weitere Studien der Problematik orientierten sich auf:

(a) Verminderung dieser Grenze,

(b) Bestimmung der Bedingungen, unter denen diese Grenze minimal ist.

Die vorliegende Arbeit ist ein Beitrag zu (b). In der algebraischen Sprache kann man das Problem folgendermassen formulieren: Es sei $\boldsymbol{a}$ ein r-dimensionales Ideal in einem n-dimensionalen kommutativen noetherschen Ring $\mathbf{A}$. Gibt es $s=n-r$ Elemente $a_1, \ldots, a_s$ aus $\boldsymbol{a}$ derart, dass die Radikale von $\boldsymbol{a}$ und $(a_1, \ldots, a_s)$ gleich sind? Wenn es solche gibt, dann ist $\boldsymbol{a}$ mengentheoretisch ein vollständiger Durchschnitt (siehe Definition 3.1).

Das Ziel der vorliegenden Arbeit besteht darin, gewisse Ergebnisse, Untersuchungen und Methoden der Arbeiten [1, 3] zu analysieren und zu vereinfachen. Als das Hauptergebnis geben wir hier einen neuen Beweis des Satzes 3.2. Dieser Satz wurde von R. Achilles und W. Vogel in [1] als eine Folgerung eines allgemeineren Ergebnisses bewiesen ([1], Satz 1). Dieses Ergebnis wurde in [3] und mit dem neuen Beweis auch in [1] bewiesen. Die beiden Beweise arbeiten mit dem starken und viel zu abstrakten mathematischen Apparat und benutzen ein starkes Ergebnis von [3] („Generalized Cutting Lemma for O"). Unser Beweis meidet dieses Ergebnis durch die Konstruktion der Elemente mit speziellen Eigenschaften (siehe Lemma 3.3, Proposition 3.4 und Proposition 3.5).

An dieser Stelle möchte ich Herrn Prof. W. Vogel und Herrn Dr. J. Stückrad für die hilfreiche Anleitung und für die wertvollen Gespräche bei der Anfertigung dieser Arbeit danken.

1. Die Parametersysteme und die Multiplizität

Mit $(\mathbf{A}, \boldsymbol{m})$ bezeichnen wir einen lokalen Ring $\mathbf{A}$ (noethersch, kommutativ mit Einselement) mit seinem einzigen maximalen Ideal $\boldsymbol{m}$. Die kleinste Anzahl der

Elemente, die ein beliebiges $\boldsymbol{m}$-primäres Ideal $\boldsymbol{q}$ in $\mathbf{A}$ erzeugen, heisst die Dimension des Ringes $\mathbf{A}$ und wird durch $\dim(\mathbf{A})$ bezeichnet. (Siehe z.B. [2].) Die Dimension eines Ideals $\boldsymbol{a}$ in $\mathbf{A}$ definieren wir als die Dimension des Ringes $\mathbf{A}/\boldsymbol{a}$. Mit Spec ($\mathbf{A}$) bezeichnen wir die Menge aller Primideale des Ringes $\mathbf{A}$ und mit Ass($\boldsymbol{a}$) die Menge aller Primideale, die zu $\boldsymbol{a}$ assoziiert sind.

Weiter sei

$$\operatorname{Assh}(\boldsymbol{a}) = \{\boldsymbol{p} \in \operatorname{Ass}(\boldsymbol{a});\ \dim(\boldsymbol{p}) = \dim(\boldsymbol{a})\}.$$

Das Supremum der Längen von Primidealketten

$$\boldsymbol{p}_0 \subset \boldsymbol{p}_1 \subset \ldots \subset \boldsymbol{p}_k = \boldsymbol{p}$$

in $\mathbf{A}$ heisst die Höhe des Primideals $\boldsymbol{p}$ in $\mathbf{A}$ und wird durch $\operatorname{ht}(\boldsymbol{p})$ bezeichnet. Für ein beliebiges Ideal $\boldsymbol{a}$ in $\mathbf{A}$ definieren wir die Höhe

$$\operatorname{ht}(\boldsymbol{a}) = \inf\{\operatorname{ht}(\boldsymbol{p});\ \boldsymbol{p} \in \operatorname{Spec}(\mathbf{A}),\ \boldsymbol{p} \supseteq \boldsymbol{a}\}.$$

Definition 1.1. *Ein System $\{a_1, \ldots, a_d\}$ der Elemente von $\boldsymbol{p}$ in einem d-dimensionalen lokalen Ring $(\mathbf{A}, \boldsymbol{m})$ heisst ein Parametersystem, wenn $\boldsymbol{q} = (a_1, \ldots, a_d)$ ein $\boldsymbol{m}$-primäres Ideal ist. Ein $\boldsymbol{m}$-primäres Ideal $\boldsymbol{q}$, das von einem Parametersystem erzeugt wird, heisst ein Parameterideal.*

Lemma 1.2. *Es seien $(\mathbf{A}, \boldsymbol{m})$ ein d-dimensionaler lokaler Ring und $a_1, \ldots, a_d$ Elemente aus $\boldsymbol{m}$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) *die Elemente $a_1, \ldots, a_d$ bilden ein Parametersystem in $\mathbf{A}$*
(b) *$a_1, \ldots, a_d$ erzeugen ein $\boldsymbol{m}$-primäres Ideal*
(c) $\dim(\mathbf{A}/(a_1, \ldots, a_i)) = d - i$ *für jedes* $i = 1, \ldots, d$
(d) *$a_i \notin \boldsymbol{p}$ für alle $\boldsymbol{p} \in \operatorname{Assh}((a_1, \ldots, a_{i-1}))$ und für jedes $i = 1, \ldots, d$ (für $i = 1$ setzen wir $(a_1, \ldots, a_{i-1}) = (0)$).*

Für den Beweis dieses Lemmas und weitere Eigenschaften der Parametersysteme siehe z.B. [6].

Lemma 1.3. *Es seien $(\mathbf{A}, \boldsymbol{m})$ ein lokaler Ring und $\boldsymbol{a}$ ein Ideal in $\mathbf{A}$ mit* $\dim(\mathbf{A}/\boldsymbol{a}) < \dim(\mathbf{A})$. *Es seien $x_1, \ldots, x_r$ Elemente aus $\boldsymbol{m}$ derart, dass die Bilder $\bar{x}_i$ von x_i in der kanonischen Projektion $\mathbf{A} \to \mathbf{A}/\boldsymbol{a}$ ein Parametersystem in $\mathbf{A}/\boldsymbol{a}$ bilden. Dann existieren r Elemente $y_1, \ldots, y_r$ aus $\boldsymbol{m}$ derart, dass sie ein Teil eines Parametersystems in $\mathbf{A}$ bilden und für die Bilder $\bar{y}_i$ von y_i in $\mathbf{A}/\boldsymbol{a}$ gilt $\bar{y}_i = \bar{x}_i$ für jedes $i = 1, \ldots, r$.*

Beweis. Wir benutzen Induktion. Es sei das Lemma für $i - 1$ richtig. Wir finden ein Element y_i, $i \leq r$, derart, dass $y_i \notin \boldsymbol{p}$ für jedes $\boldsymbol{p} \in \operatorname{Assh}((y_1, \ldots, y_{i-1}))$ und $y_i + \boldsymbol{a} = x_i + \boldsymbol{a}$. Es sei

$$\{\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_k\} = \{\boldsymbol{p} \in \operatorname{Assh}((y_1, \ldots, y_{i-1}));\ x_i \notin \boldsymbol{p}\}$$

und

$$\{\boldsymbol{p}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{p}_t\} = \{\boldsymbol{p} \in \operatorname{Assh}((y_1, \ldots, y_{i-1}));\ x_i \in \boldsymbol{p}\}. \tag{1}$$

Wir zeigen zuerst, dass

$$\mathfrak{a}\cap\mathfrak{p}_1\cap\ldots\cap\mathfrak{p}_k\not\subseteq\mathfrak{p}_{k+1}\cup\ldots\cup\mathfrak{p}_t. \tag{2}$$

Angenommen (2) gilt nicht, dann ist $\mathfrak{a}\subseteq\mathfrak{p}_j$ oder $\mathfrak{p}_m\subseteq\mathfrak{p}_j$ für gewisse $m\in\{1, \ldots, k\}$, $j\in\{k+1, \ldots, t\}$ (z.B. nach [2], Satz 1.11). Infolge $\dim(\mathfrak{p}_m) = \dim(\mathfrak{p}_j)$ und (1) kann nur der Fall $\mathfrak{a}\subseteq\mathfrak{p}_j$ sein. Da $\mathfrak{p}_j\supseteq(y_1, \ldots, y_{i-1})$, gilt dann

$$\mathfrak{p}_j\supseteq(\mathfrak{a}, y_1, \ldots, y_{i-1})=(\mathfrak{a}, x_1, \ldots, x_{i-1})$$

und

$$\dim(\mathbf{A})-i+1=\dim(\mathbf{A}/(y_1, \ldots, y_{i-1}))=\dim(\mathbf{A}/\mathfrak{p}_j)\leqslant$$
$$\leqslant\dim(\mathbf{A}/(\mathfrak{a}, x_1, \ldots, x_{i-1}))=\dim(\mathbf{A}/\mathfrak{a})-i+1$$

und damit $\dim(\mathbf{A})\leqslant\dim(\mathbf{A}/\mathfrak{a})$ im Widerspruch mit der Voraussetzung $\dim(\mathbf{A})>\dim(\mathbf{A}/\mathfrak{a})$. Also gilt (2).

Dann existiert ein Element $z_i\in\mathfrak{a}\cap\mathfrak{p}_1\cap\ldots\cap\mathfrak{p}_k$ derart, dass $z_i\notin\mathfrak{p}_j$ für alle $j=k+1, \ldots, t$. Für das Element $y_i=z_i+x_i$ gilt dann $y_i\notin\mathfrak{p}$ für alle $\mathfrak{p}\in\mathrm{Assh}((y_1, \ldots, y_{i-1}))$, wobei $y_i+\mathfrak{a}=x_i+\mathfrak{a}$ Nach Lemma 1.2 ist dann auch Lemma 1.3 bewiesen.

Lemma 1.4. *Es sei $(\mathbf{A}, \mathfrak{m})$ ein d-dimensionaler lokaler Ring, der der folgenden Bedingung genügt:*

(E) *Für jedes Ideal $\mathfrak{a}$ in $\mathbf{A}$ gilt:* $\mathrm{ht}(\mathfrak{a})+\dim(\mathfrak{a})=\dim(\mathbf{A})$.

Wenn die Elemente $a_1, \ldots, a_r$, $r\leqslant d$, ein Teil eines Parametersystems in $\mathbf{A}$ bilden, dann gilt für jedes isolierte Primideal $\mathfrak{p}$, das assoziiert zu $(a_1, \ldots, a_r)$ ist, dass

$$\dim(\mathfrak{p})=\dim((a_1, \ldots, a_r)),$$

d.h. $\mathfrak{p}\in\mathrm{Assh}((a_1, \ldots, a_r))$.

Beweis. Nach Lemma 1.2 ist $\dim((a_1, \ldots, a_r))=d-r$. Da $\mathfrak{p}$ das Ideal $(a_1, \ldots, a_r)$ enthält, ist $\dim(\mathfrak{p})\leqslant d-r$. Anderseits folgt nach [6], Vol. I., Chap. IV, Theorem 30, $\mathrm{ht}(\mathfrak{p})\leqslant r$. Daraus bekommen wir $\dim(\mathbf{A})-\dim(\mathfrak{p})\leqslant r$ und $d-r\leqslant\dim(\mathfrak{p})$. Also gilt

$$\dim(\mathfrak{p})=d-r=\dim((a_1, \ldots, a_r)). \qquad \text{q.e.d.}$$

Es seien $(\mathbf{A}, \mathfrak{m})$ ein lokaler Ring mit $\dim(\mathbf{A})=d$ und $\mathfrak{q}$ ein $\mathfrak{m}$-primäres Ideal in $\mathbf{A}$. Für eine genügend grosse ganze Zahl n ist die Länge $l_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}/\mathfrak{q}^n)$ des artinschen $\mathbf{A}$-Moduls $\mathbf{A}/\mathfrak{q}^n$ ein Polynom $\mathcal{P}_{\mathfrak{q}}(n)$ des Grades d (Hilbert—Samuelsches Polynom) und es gilt

$$\mathcal{P}_{\mathfrak{q}}(n)=e_0(\mathfrak{q}, \mathbf{A})\cdot\binom{n+d}{d}+\ldots+(-1)^d\cdot e_d(\mathfrak{q}, \mathbf{A}).$$

Die Koeffizienten $e_i(\mathfrak{q},\mathbf{A})$ des Polynoms $\mathcal{P}_{\mathfrak{q}}(n)$ sind ganze Zahlen und $e_0(\mathfrak{q},\mathbf{A})>0$.

Definition 1.5. *Die ganze positive Zahl $e_0(\boldsymbol{q}, \mathbf{A})$ heisst die Multiplizität des $(\boldsymbol{m}$-primären) Ideals $\boldsymbol{q}$.* (Siehe dazu z.B. [6], Vol. II., Chap. VIII, § 9 und § 10)

Lemma 1.6. *Es seien $(\mathbf{A}, \boldsymbol{m})$ ein d-dimensionaler lokaler Ring und $\boldsymbol{q} = (a_1, \ldots, a_d)$ ein Parameterideal in $\mathbf{A}$. Dann gilt*

$$e_0(\boldsymbol{q}, \mathbf{A}) = \sum_{\boldsymbol{p}} e_0(\boldsymbol{q} + \boldsymbol{p}/\boldsymbol{p}, \mathbf{A}/\boldsymbol{p}) \cdot e_0((a_1, \ldots, a_i) \cdot \mathbf{A}_{\boldsymbol{p}}, \mathbf{A}_{\boldsymbol{p}})$$

wo $\boldsymbol{p}$ alle Primideale der Höhe $\operatorname{ht}(\boldsymbol{p}) = i$ aus $\operatorname{Assh}((a_1, \ldots, a_i))$ durchläuft.

Für den Beweis dieses Lemmas siehe [4], Satz 24.7 (Associativity Formula).

2. Homogene Parametersysteme und Oberflächenelemente

Es sei $\operatorname{Gr}_{\boldsymbol{a}}(\mathbf{A})$ der assoziierte graduierte Ring des Ringes $\mathbf{A}$ bezüglich des Ideals $\boldsymbol{a} \subseteq \mathbf{A}$. (Für die Definition und die elementaren Eigenschaften siehe B [6], Vol. II, Kap. VIII.) Mit $\operatorname{in}_{\boldsymbol{a}}(x)$ bezeichnen wir die Anfangsform von x in $\operatorname{Gr}_{\boldsymbol{a}}(\mathbf{A})$, d.h. die Restklasse von x in $\boldsymbol{a}^v/\boldsymbol{a}^{v+1}$, wo $v = v(x)$ die Ordnung von x bezüglich $\boldsymbol{a}$ ist. Für ein Ideal $\boldsymbol{b} \subseteq \mathbf{A}$ bedeute $\operatorname{in}_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{b})$ das von allen Anfangsformen $\operatorname{in}_{\boldsymbol{a}}(x)$ mit $x \in \boldsymbol{b}$ erzeugte homogene Ideal in $\operatorname{Gr}_{\boldsymbol{a}}(\mathbf{A})$ (das Anfangsideal des Ideals $\boldsymbol{b}$).

Wie es leicht aus der Definition des Anfangsideals folgt, gilt:

Lemma 2.1.

(a) $\operatorname{Gr}_{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}/\boldsymbol{b}}(\mathbf{A}/\boldsymbol{b}) \cong \operatorname{Gr}_{\boldsymbol{a}}(\mathbf{A})/\operatorname{in}_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{b})$
(b) wenn $\boldsymbol{b} \subseteq \boldsymbol{c}$, dann $\operatorname{in}_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{b}) \subseteq \operatorname{in}_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{c})$
(c) $\operatorname{in}_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{b}) \cdot \operatorname{in}_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{c}) \subseteq \operatorname{in}_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c})$, speziell $\operatorname{in}_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{b})^n \subseteq \operatorname{in}_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{b}^n)$
(d) $\operatorname{in}_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{b}) + \operatorname{in}_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{c}) \subseteq \operatorname{in}_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})$

Bemerkung 2.2. Für die Dimension eines lokalen Ringes $(\mathbf{A}, \boldsymbol{m})$ und seinen assoziierten graduierten Ring $\operatorname{Gr}_{\boldsymbol{q}}(\mathbf{A})$ bezüglich eines $\boldsymbol{m}$-primären Ideals $\boldsymbol{q} \subseteq \mathbf{A}$ gilt

$$\dim(\operatorname{Gr}_{\boldsymbol{q}}(\mathbf{A})) = \dim(\mathbf{A}),$$

für das einzige homogene maximale Ideal $\operatorname{in}_{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{m})$ in $\operatorname{Gr}_{\boldsymbol{q}}(\mathbf{A})$ gilt $\operatorname{ht}(\operatorname{in}_{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{m})) = \operatorname{ht}(\boldsymbol{m})$ und damit auch

$$\dim(\operatorname{Gr}_{\boldsymbol{q}}(\mathbf{A})_{\operatorname{in}_{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{m})}) = \dim(\mathbf{A}),$$

dies folgt z.B. nach [5]. Daraus folgt dann, dass für ein homogenes Ideal $\boldsymbol{a} \subseteq \operatorname{in}_{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{m})$ in $\operatorname{Gr}_{\boldsymbol{q}}(\mathbf{A})$ gilt

$$\dim(\boldsymbol{a} \cdot \operatorname{Gr}_{\boldsymbol{q}}(\mathbf{A})_{\operatorname{in}_{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{m})}) = \dim(\boldsymbol{a}).$$

Definition 2.3. *Es sei $\operatorname{Gr}_{\boldsymbol{q}}(\mathbf{A})$ der assoziierte graduierte Ring des d-dimensionalen lokalen Ringes $(\mathbf{A}, \boldsymbol{m})$ bezüglich eines $\boldsymbol{m}$-primären Ideals $\boldsymbol{q}$. Ein System von d homogenen Elementen $x_1, \ldots, x_d$ aus $\operatorname{in}_{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{m})$ heisst ein homogenes Parametersy-*

stem, wenn die Elemente $x_i \cdot \mathrm{Gr}_q(\mathbf{A})_{\mathrm{in}_q(m)}$ *ein Parametersystem in* $\mathrm{Gr}_q(\mathbf{A})_{\mathrm{in}_q(m)}$ *bilden.*

(Nach den obigen Bemerkungen ist es genau dann, wenn

$$\dim((x_1, \ldots, x_i)) = \dim(\mathrm{Gr}_q(\mathbf{A})) - i = d - i$$

für jedes $i = 1, \ldots, d$.)

Lemma 2.4. *Es seien* $(\mathbf{A}, \boldsymbol{m})$ *ein lokaler Ring,* $\boldsymbol{q}$ *ein* $\boldsymbol{m}$*-primäres Ideal und* $a_1, \ldots, a_i$ *Elemente aus* $\boldsymbol{q}$ *derart, dass*

$$\dim(\mathrm{Gr}_q(\mathbf{A})/(\mathrm{in}_q(a_1), \ldots, \mathrm{in}_q(a_i))) = \dim(\mathrm{Gr}_q(\mathbf{A})) - i.$$

Dann

$$\dim(\mathbf{A}/(a_1, \ldots, a_i)) = \dim(\mathbf{A}) - i.$$

Beweis. Da $\mathrm{in}_q(a_j) \in \mathrm{in}_q(a_1, \ldots, a_i)$ für $j = 1, \ldots, i$, gilt $(\mathrm{in}_q(a_1), \ldots, \mathrm{in}_q(a_i)) \subseteq \mathrm{in}_q(a_1, \ldots, a_i)$. Nach Lemma 2.1 und Bemerkung 2.2 ist dann

$$\begin{aligned}\dim(\mathbf{A}/(a_1, \ldots, a_i)) &= \dim(\mathrm{Gr}_{q/(a_1, \ldots, a_i)}(\mathbf{A}/(a_1, \ldots, a_i))) = \\ &= \dim(\mathrm{Gr}_q(\mathbf{A})/\mathrm{in}_q(a_1, \ldots, a_i)) \leqslant \\ &\leqslant \dim(\mathrm{Gr}_q(\mathbf{A})/(\mathrm{in}_q(a_1), \ldots, \mathrm{in}_q(a_i))) = \dim(\mathrm{Gr}_q(\mathbf{A})) - i = \dim(\mathbf{A}) - i.\end{aligned}$$

Da das Ideal $(a_1, \ldots, a_i)$ durch i Elemente erzeugt ist, gilt $\dim(\mathbf{A}/(a_1, \ldots, a_i)) \geqslant \dim(\mathbf{A}) - i$.

Damit ist das Lemma bewiesen.

Kürzer kann man die obige Aussage so formulieren: wenn die Anfangsformen der Elemente a_i einen Teil eines homogenen Parametersystems in $\mathrm{Gr}_q(\mathbf{A})$ bilden, so bilden die Elemente a_i einen Teil eines Parametersystems in $\mathbf{A}$.

Definition 2.5. *Ein Element* x *eines lokalen Ringes* $(\mathbf{A}, \boldsymbol{m})$ *heisst ein Oberflächenelement (des Grades* s*) bezüglich eines* $\boldsymbol{m}$*-primären Ideals* $\boldsymbol{q}$*, wenn* $x \in q^s - q^{s+1}$ *und es existiert eine nichtnegative ganze Zahl* c *derart, dass*

$$(q^n : (x)) \cap q^c = q^{n-s}$$

für alle genügend grosse n.

Mit den Ideen aus [6] und [4] kann man weitere charakteristische Eigenschaften der Oberflächenelemente formulieren:

Lemma 2.6. *Es seien* $(\mathbf{A}, \boldsymbol{m})$ *ein lokaler Ring,* $\boldsymbol{q}$ *ein* $\boldsymbol{m}$*-primäres Ideal und* $x \in \mathbf{A}$ *ein Element mit* $x \in q^s - q^{s+1}$. *Dann sind die folgende Aussagen äquivalent:*

(a) *x ist ein Oberflächenelement (des Grades s)*
(b) *wenn $a \neq 0$ ein homogenes Element in $\mathrm{Gr}_q(\mathbf{A})$ mit $a \cdot \mathrm{in}_q(x) = 0$ in $\mathrm{Gr}_q(\mathbf{A})$ ist, dann ist die Ordnung $v(a)$ von a bezüglich q kleiner als c.*

(c) $\mathrm{in}_q(x)$ *ist in keinem von denjenigen Primidealen enthalten, die assoziiert zum Nullideal in* $\mathrm{Gr}_q(\mathbf{A})$ *sind und die das Ideal* $\mathrm{in}_q(q) = \bigoplus_{n>0} (q^n/q^{n+1})$ *nicht enthalten.*

Lemma 2.7. *Es seien* $(\mathbf{A}, m)$ *ein d-dimensionaler lokaler Ring mit unendlichem Restklassenkörper* $\mathbf{A}/m$ *und* q *ein* m*-primäres Ideal in* $\mathbf{A}$. *Es sei* $(b_1, \ldots, b_d) \subseteq q$ *ein Parameterideal in* $\mathbf{A}$ *derart, dass die Bilder* $\bar{b}_i$ *der Elemente* b_i *in* $\mathbf{A}/(b_1, \ldots, b_{i-1})$ *Oberflächenelemente ersten Grades bezüglich* $q/(b_1, \ldots, b_{i-1})$ *für alle* $i = 1, \ldots, d$ *sind. Dann gilt*

$$e_0((b_1, \ldots, b_d), \mathbf{A}) = e_0(q, \mathbf{A}).$$

Beweis. Es folgt unmittelbar aus dem Beweis des Theorems 22 in [6], Vol. II, Kap. VIII, § 10.

3. Die mengentheoretische Darstellung

Definition 3.1. *Es sei* $\mathbf{A}$ *ein kommutativer noetherscher Ring (mit Einselement). Ein Ideal* $a \subseteq \mathbf{A}$ *ist mengentheoretisch ein vollständiger Durchschnitt, wenn* $s = \dim(\mathbf{A}) - \dim(a)$ *solche Elemente* $a_1, \ldots, a_s$ *existieren, dass die Radikale von Idealen* a *und* $(a_1, \ldots, a_s)$ *gleich sind.*

Satz 3.2. *Es sei* $(\mathbf{A}, m)$ *ein lokaler (noetherscher) Ring mit unendlichem Restklassenkörper* $\mathbf{A}/m$, *der der folgenden Bedingung genügt:*

(E) *Für jedes Ideal* $a \subseteq \mathbf{A}$ *gilt:* $\mathrm{ht}(a) + \dim(\mathbf{A}/a) = \dim(\mathbf{A})$.

Es sei p *ein Primideal in* $\mathbf{A}$ *mit* $\mathrm{ht}(p) > 0$. *Wenn* r *Elemente* $x_1, \ldots, x_r$ *aus* m *existieren so, dass diese ein Parametersystem in* $\mathbf{A}/p$ *bilden und es gilt*

$$e_0((p, x_1, \ldots, x_r), \mathbf{A}) = e_0((p, x_1, \ldots, x_r)/p, \mathbf{A}/p) \cdot e_0(p \cdot \mathbf{A}_p, \mathbf{A}_p),$$

dann ist p mengentheoretisch ein vollständiger Durchschnitt.

Für den Beweis dieses Satzes brauchen wir noch einige Hilfsätze.

Lemma 3.3. *Es sei* $(\mathbf{A}, m)$ *ein lokaler Ring, der der Bedingung* **(E)** *genügt. Es seien* $p \in \mathrm{Spec}(\mathbf{A})$ *mit* $\mathrm{ht}(p) > 0$ *und* $x_1, \ldots, x_r$ *Elemente aus* m *derart, dass ihre Bilder* $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_r$ *in* $\mathbf{A}/p$ *ein Parametersystem bilden. Bezeichnen wir noch* $q = (p, x_1, \ldots, x_r)$. *Dann existieren* r *Elemente* $x'_1, \ldots, x'_r$ *aus* m *derart, dass*

(a) $\mathrm{in}_q(x'_1), \ldots, \mathrm{in}_q(x'_r)$ *ein Teil eines homogenen Parametersystems in* $\mathrm{Gr}_q(\mathbf{A})$ *bilden*
(b) $\mathrm{in}_q(x'_i) \in q/q^2 = \mathrm{in}_q(q)_1$ *für jedes* $i = 1, \ldots, r$
(c) $(x'_i + p)/p = (x_i + p)/p$ *für jedes* $i = 1, \ldots, r$
(d) $(p, x'_1, \ldots, x'_r) = (p, x_1, \ldots, x_r)$
(e) $x'_1, \ldots, x'_r$ *ein Teil eines Parametersystems in* $\mathbf{A}$ *bilden.*

B e w e i s. Zuerst beweisen wir die Aussagen (a) und (b).

Da das Ideal $\boldsymbol{q}^n$ durch alle Produkte der Elemente einer (endlichen) Basis des Ideals $\boldsymbol{q}$ des Grades n erzeugt wird, ist der Ring $\mathrm{Gr}_{\boldsymbol{q}}(\mathbf{A})$ durch die Bilder der Basiselemente von $\boldsymbol{q}$ in $\boldsymbol{q}/\boldsymbol{q}^2$ erzeugt:

$$\begin{aligned}\mathrm{Gr}_{\boldsymbol{q}}(\mathbf{A}) = \mathbf{A}/\boldsymbol{q}[\boldsymbol{q}/\boldsymbol{q}^2] = \mathbf{A}/\boldsymbol{q}[(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}^2)/\boldsymbol{q}^2, x_1, \dots, x_r] = \\ = \mathbf{A}/\boldsymbol{q}[\mathrm{in}_{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{p})_1, \mathrm{in}_{\boldsymbol{q}}(x_1), \dots, \mathrm{in}_{\boldsymbol{q}}(x_r)],\end{aligned}$$

wo $(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}^2)/\boldsymbol{q}^2 = \mathrm{in}_{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{p})_1$ die erste graduierte Komponente des homogenen Ideals $\mathrm{in}_{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{p})$ ist. Dann ist der Ring $\mathrm{Gr}_{\boldsymbol{q}}(\mathbf{A})/\mathrm{in}_{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{p})_1 \cdot \mathrm{Gr}_{\boldsymbol{q}}(\mathbf{A})$ ein homomorphes Bild des Ringes $\mathbf{A}/\boldsymbol{q}[T_1, \dots, T_r]$ von r Unbestimmten über $\mathbf{A}/\boldsymbol{q}$. Da $\dim(\mathbf{A}/\boldsymbol{q}) = 0$, gilt $\dim(\mathrm{Gr}_{\boldsymbol{q}}(\mathbf{A})/\mathrm{in}_{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{p})_1 \cdot \mathrm{Gr}_{\boldsymbol{q}}(\mathbf{A})) \leqslant r$. Anderseits erhalten wir aus $\mathrm{in}_{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{p})_1 \cdot \mathrm{Gr}_{\boldsymbol{q}}(\mathbf{A}) \subseteq \mathrm{in}_{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{p})$, dass

$$\dim(\mathrm{Gr}_{\boldsymbol{q}}(\mathbf{A})/\mathrm{in}_{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{p})_1 \cdot \mathrm{Gr}_{\boldsymbol{q}}(\mathbf{A})) \geqslant \dim(\mathrm{Gr}_{\boldsymbol{q}}(\mathbf{A})/\mathrm{in}_{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{p})). \tag{3}$$

Weiter bekommen wir aus dem Isomorphismus

$$\mathrm{Gr}_{\boldsymbol{q}}(\mathbf{A})/\mathrm{in}_{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{p}) \cong \mathrm{Gr}_{\boldsymbol{q}/\boldsymbol{p}}(\mathbf{A}/\boldsymbol{p})$$

nach Bemerkung 2.2 und nach der Bedingung **(E)**, dass

$$\dim(\mathrm{Gr}_{\boldsymbol{q}}(\mathbf{A})/\mathrm{in}_{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{p})) = \dim(\mathbf{A}/\boldsymbol{p}) = r$$

und nach (3), dass $\dim(\mathrm{Gr}_{\boldsymbol{q}}(\mathbf{A})/\mathrm{in}_{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{p})_1 \cdot \mathrm{Gr}_{\boldsymbol{q}}(\mathbf{A})) \geqslant r$. Mit der obigen Ungleichheit gilt also

$$\dim(\mathrm{Gr}_{\boldsymbol{q}}(\mathbf{A})/\mathrm{in}_{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{p})_1 \cdot \mathrm{Gr}_{\boldsymbol{q}}(\mathbf{A})) = r.$$

Im r-dimensionalen lokalen Ring

$$(\mathrm{Gr}_{\boldsymbol{q}}(\mathbf{A})/\mathrm{in}_{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{p})_1 \cdot \mathrm{Gr}_{\boldsymbol{q}}(\mathbf{A}))_{\mathrm{in}_{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{m})}$$

erzeugen die Bilder von $\mathrm{in}_{\boldsymbol{q}}(x_1), \dots, \mathrm{in}_{\boldsymbol{q}}(x_r)$ ein Ideal, das zu dem maximalen Ideal primär ist; darum bilden sie ein Parametersystem. Nach Lemma 1.3 existieren Elemente $z_1, \dots, z_r$ aus $\mathrm{in}_{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{p})_1$ derart, dass die Elemente $y_i = z_i + \mathrm{in}_{\boldsymbol{q}}(x_i)$ einen Teil eines Parametersystems in $\mathrm{Gr}_{\boldsymbol{q}}(\mathbf{A})_{\mathrm{in}_{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{m})}$, also einen Teil eines homogenen Parametersystems in $\mathrm{Gr}_{\boldsymbol{q}}(\mathbf{A})$ bilden. Da z_i und $\mathrm{in}_{\boldsymbol{q}}(x_i)$ homogene Elemente des ersten Grades sind, die Elemente y_i sing auch aus $\mathrm{in}_{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{p})_1$ und Elemente x_i' existieren derart, dass $\mathrm{in}_{\boldsymbol{q}}(x_i') = y_i$. Damit sind die Aussagen (a) und (b) bewiesen. Die Aussagen (c) und (d) folgen aus der Konstruktion der Elemente x_i', die Aussage (e) folgt aus (a) nach Lemma 2.4.

Proposition 3.4. *Es sei* $(\mathbf{A}, \boldsymbol{m})$ *ein lokaler Ring mit unendlichem Restklassenkörper* $\mathbf{A}/\boldsymbol{m}$, *der der Bedingung* **(E)** *genügt. Es seien* $\boldsymbol{p}$ *ein Primideal in* $\mathbf{A}$ *mit* $\mathrm{ht}(\boldsymbol{p}) = s > 0$ *und* $\{x_1, \dots, x_r\}$ *ein Parametersystem für* $\mathbf{A}/\boldsymbol{p}$. *Es sei weiter* $\boldsymbol{q} = (\boldsymbol{p}, x_1, \dots, x_r)$. *Dann existieren* s *Elemente* $a_1, \dots, a_s$ *aus* $\boldsymbol{p}$ *derart, dass das Folgende gilt*

(a) $\mathrm{in}_q(a_1), \ldots, \mathrm{in}_q(a_s), \mathrm{in}_q(x_1), \ldots, \mathrm{in}_q(x_r)$ *bilden ein homogenes Parametersystem in* $\mathrm{Gr}_q(\mathbf{A})$, *das in* $\mathrm{in}_q(q)_1 = q/q^2$ *enthalten ist*

(b) $\mathrm{in}_{p \cdot \mathbf{A}_p}(a_1), \ldots, \mathrm{in}_{p \cdot \mathbf{A}_p}(a_s)$ *bilden ein homogenes Parametersystem in* $\mathrm{Gr}_{p \cdot \mathbf{A}_p}(\mathbf{A}_p)$, das in $\mathrm{in}_{p \cdot \mathbf{A}_p}(p \cdot \mathbf{A}_p)_1$ *enthalten ist*

(c) $a_i \cdot \mathbf{A}_p/(a_1, \ldots, a_{i-1}) \cdot \mathbf{A}_p$ *ist ein Oberflächenelement des ersten Grades bezüglich* $p \cdot \mathbf{A}_p/(a_1, \ldots, a_{i-1}) \cdot \mathbf{A}_p$ *in* $\mathbf{A}_p/(a_1, \ldots, a_{i-1}). \cdot \mathbf{A}_p$ *für jedes* $i = 1, \ldots, s$.

Beweis. Nach Induktion konstruieren wir Elemente, die (a) und (c) erfüllen. Die Aussage (b) folgt aus (c) nach Lemma 2.6, (c).

Nach Lemma 3.3 können wir annehmen, dass die Elemente x_i so gewählt wurden, dass $\mathrm{in}_q(x_1), \ldots, \mathrm{in}_q(x_r)$ einen Teil eines homogenen Parametersystems in $\mathrm{Gr}_q(\mathbf{A})$ bilden, d.h.

$$\dim(\mathrm{Gr}_q(\mathbf{A})/(\mathrm{in}_q(x_1), \ldots, \mathrm{in}_q(x_r))) = \dim(\mathrm{Gr}_q(\mathbf{A})) - r. \tag{4}$$

Für $i = 1$ sei $\mathscr{S}_1 = \mathrm{Assh}((\mathrm{in}_q(x_1), \ldots, \mathrm{in}_q(x_r)))$. Wir zeigen, dass für jedes Primideal $p' \in \mathscr{S}_1$ gilt: $p' \not\supseteq \mathrm{in}_q(p)_1$. Nach dem Beweis von Lemma 3.3 ist

$$\dim((\mathrm{in}_q(p)_1, \mathrm{in}_q(x_1), \ldots, \mathrm{in}_q(x_r))) = 0$$

und für jedes Ideal $p' \in \mathscr{S}_1$ ist

$$\begin{aligned}\dim(p') = \dim((\mathrm{in}_q(x_1), \ldots, \mathrm{in}_q(x_r))) &= \dim(\mathrm{Gr}_q(\mathbf{A})) - r = \\ &= \dim(\mathbf{A}) - r = s > 0\end{aligned}$$

nach (4) und Bedingung (**E**).

Wäre $p' \supseteq \mathrm{in}_q(p)_1$, dann müsste aus

$$p' \supseteq (\mathrm{in}_q(p)_1, \mathrm{in}_q(x_1), \ldots, \mathrm{in}_q(x_r))$$

auch $\dim(p') = 0$ folgen, im Widerspruch mit $\dim(p') = s > 0$. Für jedes $p' \in \mathscr{S}_1$ gilt also $p' \not\supseteq \mathrm{in}_q(p)_1$ und auch

$$p' \cap \mathrm{in}_q(p)_1 \neq \mathrm{in}_q(p)_1.$$

Daraus folgt nach Nakayama's Lemma, dass

$$(p' \cap \mathrm{in}_q(p)_1) + \mathrm{in}_q(m) \cdot \mathrm{in}_q(p)_1 \neq \mathrm{in}_q(p)_1$$

und weiter

$$(p' \cap \mathrm{in}_q(p)_1/\mathrm{in}_q(m) \cdot \mathrm{in}_q(p)_1 \subset \mathrm{in}_q(p)_1/\mathrm{in}_q(m) \cdot \mathrm{in}_q(p)_1.$$

Die Abbildung $\mathbf{A} \to \mathrm{Gr}_q(\mathbf{A})$, $a \mapsto \mathrm{in}_q(a)$ bildet $p/m \cdot p$ surjektiv auf $\mathrm{in}_q(p)_1/\mathrm{in}_q(m) \cdot \mathrm{in}_q(p)_1$. Da $(p' \cap \mathrm{in}_q(p)_1)/\mathrm{in}_q(m) \cdot \mathrm{in}_q(p)_1$ echte Untermodulen von $\mathrm{in}_q(p)_1/\mathrm{in}_q(m) \cdot \mathrm{in}_q(p)_1$ sind, sind ihre Urbilder $^{\mathrm{u}}p'$ echte Unterräume (endliche Anzahl) von dem Vektorraum $p/m \cdot p$ über unendlichem Körper $\mathbf{A}/m$.

Sei nun $\mathscr{S}_1'$ die Menge aller Primideale p', die mit dem Nullideal in $\mathrm{Gr}_{p \cdot \mathbf{A}_p}(\mathbf{A}_p)$ assoziiert sind und $\dim(p') > 0$. Dann $p' \not\supseteq \mathrm{in}_{p \cdot \mathbf{A}_p}(p \cdot \mathbf{A}_p)_1 = p \cdot \mathbf{A}_p/p^2 \cdot \mathbf{A}_p$ für jedes

Primideal $p' \in \mathcal{S}_1'$, da $\dim(\mathrm{in}_{p \cdot \mathbf{A}_p}(p \cdot \mathbf{A}_p)_1 \cdot \mathrm{Gr}_{p \cdot \mathbf{A}_p}(\mathbf{A}_p)) = 0$. Daraus folgt, dass $(p' \cap p \cdot \mathbf{A}_p)/p^2 \cdot \mathbf{A}_p \subset p \cdot \mathbf{A}_p/p^2 \cdot \mathbf{A}_p$ für jedes $p' \in \mathcal{S}_1'$ (als $\mathbf{A}_p/p \cdot \mathbf{A}_p$-Moduln) und

$$(p' + p^2 \cdot \mathbf{A}_p) \cap p \cdot \mathbf{A}_p \neq p \cdot \mathbf{A}_p$$

(als $\mathbf{A}_p$-Moduln). Wenn wir die Restriktion von $(p' + p^2 \cdot \mathbf{A}_p) \cap p \cdot \mathbf{A}_p$ in $\mathbf{A}_p$ auf $\mathbf{A}$ durch ${}^r p'$ bezeichnen, dann ${}^r p' \subset p$ und ${}^r p' \cap p \neq p$. Daraus folgt nach Nakayama's Lemma, dass

$$({}^r p' \cap p) + m \cdot p \neq p$$

und

$${}^r p' \cap p/m \cdot p \subset p/m \cdot p.$$

Die Unterräume ${}^u p'$ (für $p' \in \mathcal{S}_1$) und ${}^r p' \cap p/m \cdot p$ (für $p' \in \mathcal{S}_1'$) bilden eine endliche Menge von echten Unterräumen des Vektorraums $p/m \cdot p$ über unendlichen Körper $\mathbf{A}/m$. Darum ist das Komplement der Vereinigung dieser Unterräume nicht leer. Wenn wir nun $a_1 + m \cdot p$ aus diesem Komplement wählen, dann ist $\mathrm{in}_q(a_1) \notin p'$ für jedes $p' \in \mathcal{S}_1$ und $\mathrm{in}_{p \cdot \mathbf{A}_p}(a_1) \notin p'$ für jedes $p' \in \mathcal{S}_1'$. Die Elemente $\mathrm{in}_q(x_1), \ldots, \mathrm{in}_q(x_r), \mathrm{in}_q(a_1)$ bilden einen Teil eines homogenen Parametersystems und das Element $a_1 \cdot \mathbf{A}_p$ ist ein Oberflächenelement ersten Grades bezüglich $p \cdot \mathbf{A}_p$ in $\mathbf{A}_p$ nach Lemma 2.6, (c).

Es sei nun die Aussage für alle $i < s$ bewiesen. Es sei $\mathcal{S}_s = \mathrm{Assh}((\mathrm{in}_q(x_1), \ldots, \mathrm{in}_q(x_r), \mathrm{in}_q(a_1), \ldots, \mathrm{in}_q(a_{s-1})))$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt für jedes $p' \in \mathcal{S}_s$:

$$\dim(p') = \dim(\mathrm{Gr}_q(\mathbf{A})) - r - s + 1 = 1.$$

Da p' das Ideal $(\mathrm{in}_q(x_1), \ldots, \mathrm{in}_q(x_r))$ enthält, kann $\mathrm{in}_q(p)_1$ in p' nicht enthalten sein (sonst wäre $\dim(p') = 0$, was einen Widerspruch ist, ähnlich wie bei $i = 1$). Die Elemente $a_1 \cdot \mathbf{A}_p, \ldots, a_{s-1} \cdot \mathbf{A}_p$ bilden den Teil eines Parametersystems in $\mathbf{A}_p$, also für $a = (a_1, \cdot \mathbf{A}_p, \ldots, a_{s-1} \cdot \mathbf{A}_p) \subseteq \mathbf{A}_p$ is $\dim(a) = 1$. Da

$$\mathrm{Gr}_{p \cdot \mathbf{A}_p/a}(\mathbf{A}_p/a) \cong \mathrm{Gr}_{p \cdot \mathbf{A}_p}(\mathbf{A}_p)/\mathrm{in}_{p \cdot \mathbf{A}_p}(a),$$

ist auch $\dim(\mathrm{in}_{p \cdot \mathbf{A}_p}(a)) = 1$.

Setze nun $\mathcal{S}_s' = \{p' \in \mathrm{Ass}(\mathrm{in}_{p \cdot \mathbf{A}_p}(a)); \dim(p') > 0\}$. Dann ist $\dim(p') = 1$ für jedes $p' \in \mathcal{S}_s'$. Daraus folgt, dass $p' \not\supseteq p \cdot \mathbf{A}_p/p^2 \cdot \mathbf{A}_p$ wie bei $i = 1$. Nach der Konstruktion aus dem ersten Induktionsschritt (der Fall $i = 1$) existiert ein Element a_s derart, dass

$\dim((\mathrm{in}_q(x_1), \ldots, \mathrm{in}_q(x_r), \mathrm{in}_q(a_1), \ldots, \mathrm{in}_q(a_s))) = 0$. Da $\dim(\mathrm{Gr}_q(\mathbf{A})) = \dim(\mathbf{A}) = r + s$, bilden die obige Elemente ein homogenes Parametersystem in $\mathrm{Gr}_q(\mathbf{A})$. Das Element a_s hat auch die Eigenschaft (c) nach Lemma 2.6, (c). Damit ist die Proposition 3.4 bewiesen.

Proposition 3.5. *Es seien* $(\mathbf{A}, \boldsymbol{m})$, $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$ *und* $x_1, \ldots, x_r$ *wie in Proposition 3.4 und* $a_1, \ldots, a_s \in \boldsymbol{p}$ *die Elemente aus der Aussage* (a) *dieser Proposition. Dann existieren* $r+s$ *Elemente* $b_1, \ldots, b_{r+s}$ *aus* $\boldsymbol{q}' = (a_1, \ldots, a_s, x_1, \ldots, x_r)$ *derart, dass die Bilder* $\bar{b}_i$ *der Elemente* b_i *in* $\mathbf{A}/(b_1, \ldots, b_{i-1})$ *Oberflächenelemente des ersten Grades bezüglich* $\boldsymbol{q}/(b_1, \ldots, b_{i-1})$ *für alle* $i = 1, \ldots, r+s$ *sind.*

Beweis. Wir beweisen diese Proposition nach Induktion. Es sei die Proposition für $i-1$ bewiesen. Wir zeigen, dass sie dann für $i \leq r+s$ gilt.

Nach Lemma 2.6 und dem Isomorphismus

$$\mathrm{Gr}_{\boldsymbol{q}(b_1, \ldots, b_{i-1})}(\mathbf{A}/(b_1, \ldots, b_{i-1})) \cong \mathrm{Gr}_{\boldsymbol{q}}(\mathbf{A})/\mathrm{in}_{\boldsymbol{q}}(b_1, \ldots, b_{i-1})$$

reicht es, ein solches Element b_i zu finden, dass $\mathrm{in}_{\boldsymbol{q}}(b_i) \notin \boldsymbol{p}'$ für alle $\boldsymbol{p}' \in \mathrm{Ass}(\mathrm{in}_{\boldsymbol{q}}(b_1, \ldots, b_{i-1}))$ mit $\dim(\boldsymbol{p}') > 0$, wobei $\mathrm{in}_{\boldsymbol{q}}(b_i) \in \mathrm{in}_{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{q}')_1$ ist.

Nach Induktionsvoraussetzung und nach den obigen Bemerkungen ist $\dim(\mathrm{in}_{\boldsymbol{q}}(b_1, \ldots, b_{i-1})) = \dim(\mathbf{A}) - i + 1 > 0$. Da $\{\mathrm{in}_{\boldsymbol{q}}(a_1), \ldots, \mathrm{in}_{\boldsymbol{q}}(a_s), \mathrm{in}_{\boldsymbol{q}}(x_1, \ldots, \mathrm{in}_{\boldsymbol{q}}(x_r)\} \subseteq \mathrm{in}_{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{q}')_1$, gilt $\dim(\mathrm{in}_{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{q}')_1 \cdot \mathrm{Gr}_{\boldsymbol{q}}(\mathbf{A})) = 0$. Für jedes Primideal $\boldsymbol{p}' \in \mathrm{Ass}(\mathrm{in}_{\boldsymbol{q}}(b_1, \ldots, b_{i-1}))$ mit $\dim(\boldsymbol{p}') > 0$ gilt dann $\boldsymbol{p}' \not\supseteq \mathrm{in}_{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{q}')_1$. Nach der Konstruktion aus dem Beweis der Proposition 3.4 existiert dann ein Element $b_i \in \boldsymbol{q}'$ derart, dass $\mathrm{in}_{\boldsymbol{q}}(b_i) \in \mathrm{in}_{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{q}')_1$ und $\mathrm{in}_{\boldsymbol{q}}(b_i) \notin \boldsymbol{p}'$ für alle Primideale $\boldsymbol{p}' \in \mathrm{Ass}(\mathrm{in}_{\boldsymbol{q}}(b_1, \ldots, b_{i-1}))$ mit $\dim(\boldsymbol{p}') > 0$. Nach Lemma 2.6 ist dann $\bar{b}_i$ ein Oberflächenelement des ersten Grades bezüglich $\boldsymbol{q}/(b_1, \ldots, b_{i-1})$ in $\mathbf{A}/(b_1, \ldots, b_{i-1})$. Damit ist die Proposition bewiesen.

Beweis des Satzes 3.2. Wir setzen $\boldsymbol{q} = (\boldsymbol{p}, x_1, \ldots, x_r)$. Aus der Proposition 3.4 folgt, dass $s = \dim(\mathbf{A}) - \dim(\mathbf{A}/\boldsymbol{p}) = \mathrm{ht}(\boldsymbol{p})$ Elemente $a_1, \ldots, a_s$ aus $\boldsymbol{p}$ derart existieren, dass das Folgende gilt: die Elemente $\mathrm{in}_{\boldsymbol{q}}(a_1), \ldots, \mathrm{in}_{\boldsymbol{q}}(a_s), \mathrm{in}_{\boldsymbol{q}}(x_1), \ldots, \mathrm{in}_{\boldsymbol{q}}(x_r)$ bilden ein homogenes Parametersystem in $\mathrm{Gr}_{\boldsymbol{q}}(\mathbf{A})$ und die Bilder der Elemente $a_i \cdot \mathbf{A}_{\boldsymbol{p}}$ in $\mathbf{A}_{\boldsymbol{p}}/(a_1, \ldots, a_{i-1}) \cdot \mathbf{A}_{\boldsymbol{p}}$ sind Oberflächenelemente ersten Grades bezüglich $\boldsymbol{p} \cdot \mathbf{A}_{\boldsymbol{p}}/(a_1, \ldots, a_{i-1}) \cdot \mathbf{A}_{\boldsymbol{p}}$. Dann bekommt man aus der Proposition 3.5 und Lemma 2.7 für das Parameterideal $\boldsymbol{q}' = (a_1, \ldots, a_s, x_1, \ldots, x_r)$, dass

$$e_0(\boldsymbol{q}', \mathbf{A}) = e_0(\boldsymbol{q}, \mathbf{A}) \tag{5}$$

und auch

$$e_0((a_1, \ldots, a_s) \cdot \mathbf{A}_{\boldsymbol{p}}, \mathbf{A}_{\boldsymbol{p}}) = e_0(\boldsymbol{p} \cdot \mathbf{A}_{\boldsymbol{p}}, \mathbf{A}_{\boldsymbol{p}}). \tag{6}$$

Weiter folgt aus Lemma 1.6, dass

$$e_0(\boldsymbol{q}', \mathbf{A}) = \sum_{i=0}^{t} e_0(\boldsymbol{q}' + \boldsymbol{p}_i/\boldsymbol{p}_i, \mathbf{A}/\boldsymbol{p}_i) \cdot e_0((a_1, \ldots, a_s) \cdot \mathbf{A}_{\boldsymbol{p}_i}, \mathbf{A}_{\boldsymbol{p}_i}) \tag{7}$$

wo $\{\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_t\} = \{\boldsymbol{p}_j \in \mathrm{Assh}((a_1, \ldots, a_s)); \mathrm{ht}(\boldsymbol{p}) = s\}$. Aus der Gültigkeit der Bedingung (E) in $\mathbf{A}$ folgt nach Lemma 1.4, dass $\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_t$ alle isolierten assoziierten Primideale des Ideals $(a_1, \ldots, a_s)$ sind. Da $\mathrm{ht}(\boldsymbol{p}) = \mathrm{ht}((a_1, \ldots, a_s)) = \mathrm{s}$ und $\dim(\boldsymbol{p}) = \dim(\mathbf{A}) - s$, ist $\boldsymbol{p} \in \{\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_t\}$. Ohne Begrenzung der Allegemeinheit können wir annehmen, dass $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_0$. Da $\boldsymbol{q}'/\boldsymbol{p} = \boldsymbol{q}/\boldsymbol{p}$, gilt nach (5), (6) und (7), dass

$$e_0(q, \mathbf{A}) = e_0(q', \mathbf{A}) = \sum_{i=0}^{t} e_0(q'/p_i, \mathbf{A}/p_i) \cdot e_0((a_1, \ldots, a_s) \cdot \mathbf{A}_{p_i}, \mathbf{A}_{p_i}) =$$

$$= e_0(q'/p, \mathbf{A}/p) \cdot e_0((a_1, \ldots, a_s) \cdot \mathbf{A}_p, \mathbf{A}_p) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{t} e_0(q'/p_i, \mathbf{A}/p_i) \cdot e_0((a_1, \ldots, a_s) \cdot \mathbf{A}_{p_i}, \mathbf{A}_{p_i}) =$$

$$= e_0(q/p, \mathbf{A}/p) \cdot e_0(p \cdot \mathbf{A}_p, \mathbf{A}_p) + \sum_{i=1}^{t} e_0(q'/p_i, \mathbf{A}/p_i) \cdot e_0((a_1, \ldots, a_s) \cdot \mathbf{A}_{p_i}, \mathbf{A}_{p_i}).$$

Da die Multiplizität eine positive Zahl ist, folgt aus der Voraussetzung des Satzes 3.2

$$e_0(q, \mathbf{A}) = e_0(q/p, \mathbf{A}/p) \cdot e_0(p \cdot \mathbf{A}_p, \mathbf{A}_p),$$

dass das Primideal p das einzige isolierte Primideal ist, das zu $(a_1, \ldots, a_s)$ assoziiert ist, also das Radikal von $(a_1, \ldots, a_s)$ ist genau p; d.h. p ist mengentheoretisch ein vollständiger Durchschnitt.

Damit ist auch der Satz 3.2 bewiesen.

LITERATUR

[1] ACHILLES, R.—VOGEL, W.: Über vollständige Durchschnitte in lokalen Ringen. Math. Nachr. 89, 1979, 285—298.

[2] ATIYAH, M. F.—MACDONALD, I. E.: Introduction to Commutative Algebra. Addison-Wesley Comp., Massachussets, 1969.

[3] DADE, E. C.: Multiplicity and Monoidal Transformations. Thesis, Princeton University, 1960 (unpublished).

[4] NAGATA, M.: Local Rings. Interscience, New York 1962.

[5] VALLA, G.: Certain graded algebras are always Cohen-Macaulay. J. of Algebra 42, 1976, 537—548.

[6] ZARISKI, O.—SAMUEL, P.: Commutative Algebra, Vol. I, II. D. V. Nostrand Comp. Princeton 1958 and 1960.

Eingegangen am 17. 1. 1983

Katedra geometrie
Matematicko-fyzikálnej fakulty UK
Mlynská dolina
842 15 Bratislava

К ТЕОРЕТИКО-МНОЖЕСТВЕННОМУ ПРЕДСТАВЛЕНИЮ НЕКОТОРЫХ ПРОСТЫХ ИДЕАЛОВ

Štefan Solčan

Резюме

В работе дано новое доказательство следующей теоремы (см. тоже [1]):

Пусть $(\mathbf{A}, \boldsymbol{m})$ — локальное кольцо, для которого $\mathbf{A}/\boldsymbol{m}$ бесконечно и имеет место

$$\dim(\mathbf{A}/\boldsymbol{a}) + \mathrm{ht}(\boldsymbol{a}) = \dim(\mathbf{A})$$

для всякого $\boldsymbol{a} \subseteq \mathbf{A}$. Пусть $\mathbf{p}$-простой идеал в $\mathbf{A}$ с высотой $\mathrm{ht}(\boldsymbol{p}) = s > 0$. Если существуют $x_1, \ldots, x_r \in \boldsymbol{m}$, для которых идеал $(x_1, \ldots, x_r) \cdot \mathbf{A}/\boldsymbol{p}$ параметрический и

$$e_0((\boldsymbol{p}, x_1, \ldots, x_r), \mathbf{A}) = e_0((\boldsymbol{p}, x_1, \ldots, x_r)/\boldsymbol{p}, \mathbf{A}/\boldsymbol{p}) \cdot e_0(\boldsymbol{p} \cdot \mathbf{A}_{\boldsymbol{p}}, \mathbf{A}_{\boldsymbol{p}}),$$

то $\boldsymbol{p}$ — теоретико-множественное полное пересечение, т. е. существуют $a_1, \ldots, a_s \in \boldsymbol{p}$ такие, что

$$\mathrm{rad}((a_1, \ldots, a_s)) = \boldsymbol{p}.$$