Mária Barnovská; Vladimir Aleksandrovich Il′in

Базис Рисса спектральной задачи с бесконечнократными собственными значениями

Mathematica Slovaca, Vol. 35 (1985), No. 2, 161--167

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/136385

Math. Slovaca 35, 1985, No. 2, 161—167

БАЗИС РИССА СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ С БЕСКОНЕЧНОКРАТНЫМИ СОБСТВЕННЫМИ ЗНАЧЕНИЯМИ

М. БАРНОВСКА, В. А. ИЛЬИН[1])

В работе [1] отмечалось, что природа спектра оператора Лапласа для ограниченной области двух и большего числа измерений является гораздо более сложной, чем это было для области одного измерения. Более того, там же было показано, что наперед заданная последовательность действительных чисел $\{\lambda_n^0\}$ являлась подпоследовательностью собственных значений некоторого самосопряженного расширения оператора Лапласа, определенного в квадрате $Q=[0\leqslant x\leqslant\pi]\times[0\leqslant y\leqslant\pi]$.

В настоящей работе мы докажем, что к оператору Лапласа, рассматриваемому в прямоуголшныке $\mathscr{D}=[0\leqslant x\leqslant\pi]\ \times\ [0\leqslant y\leqslant 2\pi]$, можно присоединить такие несамосопряженные краевые условия на границе этого прямоугольника, что отвечающая этим краевым условиям спектральная задача будет иметь следующие свойства:

1) каждое из чисел наперед заданного счетного множества действительных чисел будет являться собственным значением указанной спектральной задачи бесконечной кратности, причем каждому такому собственному значению будет отвечать бесконечно много собственных и бесконечно много присоединенных*) фунций;

2) множество всех собственных и всех присоединенных функций указанной спектральной задачи образует базис Рисса в $L_2(\mathscr{D})$ (определение базиса Рисса см., напр., в [2], стр. 99).

Прежде всего докажем следующее вспомогательное утверждение.

---

*) Присоединенной функцией оператора Лапласа в прямоугольнике $\mathscr{D}$ с заданными краевыми условиями на границе $\mathscr{D}$, отвечающей собственному значению λ и собственной функции $\mathscr{U}_0$, называется такая функлция $\mathscr{U}_1\in C^{(2)}(\mathscr{D})$, которая удовлетворяет внутри $\mathscr{D}$ уравнению $\Delta\mathscr{U}_1+\lambda\mathscr{U}_1=\mathscr{U}_0$.

[1]) Совместная работа возникла во время пребывания проф. В. А. Ильина в Братиславе по плану сотрудничества между Московским университетом им. Ломоносова и Братиславским университетом им. Коменского.

Лемма. *Пусть для любого фиксированного номера* $n=0, 1, 2, \ldots$ $\{X_n^k(x)\}$, $k=0, 1, 2, \ldots$ — *полная ортонормированная система функций на* $[0, \pi]$ *и пусть система* $Y_n(y)$, $n=0, 1, 2, \ldots$, *образует базис Рисса в* $L_2[0\leqslant y\leqslant 2\pi]$. *Тогда система функций* $\mathcal{U}_{nk}(x, y) = X_n^k(x)Y_n(y)$, $n=0, 1, 2, \ldots$, $k=0, 1, 2, \ldots$, *образует базис Рисса в* $L_2(\mathcal{D})$.

Так как утверждение леммы мы не нашли в известной нам литературе о базисах, мы приведем ее доказательство. Исходя из определения базиса Рисса, нам достаточно показать, что система $\mathcal{U}_{nk}(x, y)$, $n=0, 1, 2, \ldots$, $k=0, 1, 2, \ldots$, полна в $L_2(\mathcal{D})$ и что для любой функции $f(x, y)\in L_2(\mathcal{D})$ имеет место неравенство

$$m\,\|f\|^2\leqslant \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} f_{nk}^2\leqslant M\,\|f\|^2, \tag{1}$$

где m, M — некоторые положительные числа, не зависящие от f, а

$$f_{nk}=\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(x, y)\tilde{\mathcal{U}}_{nk}(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

причем системы $\{\tilde{\mathcal{U}}_{nk}\}$, $n=0, 1, 2, \ldots$, $k=0, 1, 2, \ldots$, образует вместе с $\{\mathcal{U}_{nk}\}$ биортогональную систему в $L_2(\mathcal{D})$. Неравенство (1) может быть выведено из неравенства для одномерного случая.

Пусть $f(x, y)\in L_2(\mathcal{D})$. Тогда $f(x, y)\in L_2[0\leqslant y\leqslant 2\pi]$ для почти всех $x\in[0, \pi]$. Из того, что система $\{Y_n(y)\}$, $n=0, 1, 2, \ldots$, образует базис Рисса v $L_2[0\leqslant y\leqslant 2\pi]$, вытекает существование единственной системы $\{\tilde{Y}_n(y)\}$, $n=0, 1, 2, \ldots$, в $L_2[0\leqslant y\leqslant 2\pi]$, образующей вместе с системой $\{Y_n(y)\}$ биортрогональную систему, т.е.

$$(Y_i, \tilde{Y}_j)=\int_0^{2\pi} Y_i(y)\tilde{Y}_j(y)\,\mathrm{d}y=\delta_{ij},$$

где δ_{ij} — символ Кронекера, и то, что система $\{Y_n(y)\}$, $n=0, 1, 2, \ldots$, полна v $L_2[0\leqslant y\leqslant 2\pi]$. При этом, положив

$$\mathcal{F}_n(x)=\int_0^{2\pi} f(x, y)\tilde{Y}_n(y)\,\mathrm{d}y, \tag{3}$$

мы прийдем к следующей двусторонней оценке

$$m_1\int_0^{2\pi} f^2(x, y)\,\mathrm{d}y\leqslant \sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{F}_n^2(x)\leqslant M_1\int_0^{2\pi} f^2(x, y)\,\mathrm{d}y \tag{4}$$

для почти всех $x\in[0, \pi]$. Используя неравенство Коши—Буняковского и соотношение (3), для каждого $n=0, 1, 2, \ldots$ получим

$$\mathscr{F}_n^2(x) \leqslant \int_0^{2\pi} f^2(x, y)\, dy \int_0^{2\pi} \tilde{Y}_n^2(y)\, dy = c_n \int_0^{2\pi} f^2(x, y)\, dy,$$

где $c_n = \int_0^{2\pi} \tilde{Y}_n^2(y)\, dy$, так как $\tilde{Y}_n(y) \in L_2[0, 2\pi]$.

Отсюда следует, что

$$\int_0^{\pi} \mathscr{F}_n^2(x)\, dx \leqslant c_n \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} f^2(x, y)\, dx\, dy$$

для каждого n. Поскольку интеграл в правой части конечен, то каждая функция $\mathscr{F}_n(x)$ принадлежит $L_2[0, \pi]$. Если обозначить коэффициенты Фурье функции $\mathscr{F}_n(x)$ через f_{nk}, то при каждом n имеем

$$\int_0^{\pi} \mathscr{F}_n^2(x)\, dx = \sum_{k=0}^{\infty} f_{nk}^2, \tag{5}$$

где $f_{nk} = \int_0^{\pi} \mathscr{F}_n(x) X_n^k(x)\, dx$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, для каждого фиксированного $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Проинтегрировав неравенство (4) по x в пределах от 0 до π и использовав (5), получим доказываемое неравенство (1), если положим $m_1 = m$, $M_1 = M$, причем биортогонально сопряженная система $\{\tilde{\mathscr{U}}_{nk}\}$ с ситемой $\{\mathscr{U}_{nk}\}$ в (2) имеет вид

$$\{\tilde{\mathscr{U}}_{nk}(x, y)\} = \{X_n^k(x) \tilde{Y}_n(y)\}, \quad n = 0, 1, \ldots, k = 0, 1, \ldots \tag{6}$$

Полнога системы $\{\mathscr{U}_{nk}\}$ тривиально вытекает из полноты системы $\{Y_n(y)\}$, $n = 0, 1, \ldots$.

Теперь докажем следующую теорему.

Теорема. *Пусть Λ — наперед заданное счетное множество действительных чисел. Тогда для оператора Лапласа*

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

можно указать такие несамосопряженные краевые условия на границе прямоугольника $\mathscr{D}$, что отвечающая им спектральная задача будет иметь в качестве собственного значения бесконечной кратности каждое из чисел счетного множества Λ, причем система всех собственных и всех присоединенных функций этой задачи образует басис Рисса в $L_2(\mathscr{D})$:

Доказательство. Так как множество действительных чисел Λ счетное, то его элементы можно занумеровать и записать его в виде

$$\{\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3, \ldots\}.$$

Положим

$$\lambda_0^0 = \Lambda_1,\ \lambda_1^0 = \Lambda_1,\ \lambda_2^0 = \Lambda_2,\ \lambda_3^0 = \Lambda_1,\ \lambda_4^0 = \Lambda_2,\ \lambda_5^0 = \Lambda_3,\ \lambda_6^0 = \Lambda_1,\ \ldots,$$

т. е. строим последовательность, у которой элемент множества Λ повторяется бесконечное число раз. Так получим последовательность действительных чисел $\{\lambda_n^0\}_{n=0}^{\infty}$.

Теперь, как и в работе [1], рассмотрим для каждого номера $n = 0, 1, \ldots$ задачу на собственные значения

$$X''(x) + \mu X(x) = 0 \quad (0 < x < \pi), \tag{7}$$

$$X(0) = 0,\ X'(\pi) = h_n X(\pi), \tag{8}$$

причем h_n подбираем так, чтобы каждый раз эта задача имела в качестве одного собственного значения μ число вида $\lambda_n^0 - n^2$. так как решением уравнения (7) с условием $X(0) = 0$ является функция с точностью до постоянного множителя

$$X(x) = \begin{cases} \operatorname{sh} x\sqrt{-\mu} & \text{при } \mu < 0, \\ \sin x\sqrt{\mu} & \text{при } \mu > 0, \\ x & \text{при } \mu = 0, \end{cases}$$

то легко убедиться в том, что для этого достаточно h_n в краевом условии (8) положить равным:

$$h_n = \begin{cases} \sqrt{n^2 - \lambda_n^0}\, \operatorname{cth} \pi\sqrt{n^2 - \lambda_n^0}, & \text{если } \lambda_n^0 < n^2, \\ \sqrt{\lambda_n^0 - n^2}\, \operatorname{ctg} \pi\sqrt{\lambda_n^0 - n^2}, & \text{если } \lambda_n^0 > n^2 \text{ и } \operatorname{ctg} \pi\sqrt{\lambda_n^0 - n^2} \neq \infty, \\ \dfrac{1}{\pi}, & \text{если } \lambda_n^0 = n^2. \end{cases}$$

В случае, когда $\lambda_n^0 > n^2$ и $\operatorname{ctg} \pi\sqrt{\lambda_n^0 - n^2} = \infty$, рассматривается задача на собственные значения

$$X''(x) + \mu X(x) = 0, \quad (0 < x < \pi),$$
$$X(0) = X(\pi) = 0.$$

Интересующие нас собственные значения задачи (7)—(8) обозначим через μ_n^0, а остальные через μ_n^k, $n = 0, 1, \ldots,\ k = 1, 2, \ldots$. При этом

$$\mu_n^0 = \begin{cases} \lambda_n^0 - n^2 < 0 & \text{при } \lambda_n^0 < n^2, \\ \lambda_n^0 - n^2 > 0 & \text{при } \lambda_n^0 > n^2, \\ 0 & \text{при } \lambda_n^0 = n^2, \quad n = 0, 1, \ldots. \end{cases}$$

Соответствующие собственные функции для каждого фиксированного номера $n=0, 1, \ldots$ обозначим через

$$X_n^0(x), \quad X_n^k(x), \quad k=1, 2, \ldots. \tag{9}$$

Для каждого рассматриваемого n эта система собственных функций ортогональна и полна, так как задача (7)—(8) самосопряженная. Будем считать, что система собственных функций уже пронормирована (это всегда можно сделать), т.е. что система (9) ортонормирована и полна.

Рассмотрим систему функций

$$Y_0(y)=y, \quad Y_{2n-1}(y)=-\frac{y}{2n}\cos ny, \quad Y_{2n}(y)=\sin ny, \tag{10}$$

$$\mathrm{n}=1, 2, \ldots,$$

которая является системой собственных и присоединенных функций несамосопряженной краевой задачи

$$Y''(y)+sY(y)=0(0<y<2\pi), \quad Y(0)=0, \quad Y'(0)=Y'(2\pi), \tag{11}$$

отвечающих собственным значениям $s=n^2$, $n=0, 1, \ldots$. Здесь каждому собственному значению n^2, $n=1, 2, \ldots$, соответствует собственная функция $Y_{2n}(y)$ и присоединенная функция $Y_{2n-1}(y)$. Известно (см. замечание в работе [3]), что система (10) является базисом Рисса в $L_2[0\leqslant y\leqslant 2\pi]$.

Легко проверить, что система функций

$$\begin{gathered}
\mathcal{U}_{00}(x, y)=X_0^0(x)Y_0(y), \quad \mathcal{U}_{0k}(x, y)=X_0^k(x)Y_0(y), \\
\mathcal{U}_{2n-1,0}(x, y)=X_n^0(x)Y_{2n-1}(y), \quad \mathcal{U}_{2n-1,k}(x, y)=X_n^k(x)Y_{2n-1}(y), \\
\mathcal{U}_{2n,0}(x, y)=X_n^0(x)Y_{2n}(y), \quad \mathcal{U}_{2n,k}(x, y)=X_n^k(x)Y_{2n}(y), \\
n=1, 2, \ldots, \quad k=1, 2, \ldots,
\end{gathered} \tag{12}$$

является системой всех собственных и всех присоединенных функций оператора Лапласа в прямоугольнике $\mathcal{D}$, а множество $\lambda_n^k=\mu_n^k+n^2$ ($n=0, 1, \ldots$, $k=0, 1, \ldots$) служит множеством его собственных значений, которое содержит последовательность действительных чисел $\{\lambda_n^0\}$, полученную из элементов счетного множества Λ, причем собственное значение λ_n^0, $n=0, 1, \ldots$, имеет бесконечную кратность. Каждому собственному значению λ_n^0, $n=0, 1, \ldots$, соответствует бесконечно много собственных функций $\mathcal{U}_{2n,0}$ (x, y) и бесконечно много присоединенных функций $\mathcal{U}_{2n-1,0}(x, y)$, а каждому значению $\lambda_n^k=\mu_n^k+n^2$, $n=0, 1, \ldots$, $k=1, 2, \ldots$ — собственная функция $\mathcal{U}_{2n,k}(x, y)$ и присоединенная функция $\mathcal{U}_{2n-1,k}$ (x, y).

Так как система функций (12) имеет вид, введенный в лемме, и составлена из систем функций (9), (10), удовлетворяющих условиям леммы, то эта система образует базис Рисса в $L_2(\mathscr{D})$. Теорема доказана.

Замечание 1. Для каждого $n=0, 1, \ldots$ задача (7)—(8) имеет единственное отрицательное собственное значение μ, так как второе краевое условие (8) при $\nu=\sqrt{-\mu}$ приводит нас к уравнению $\nu \operatorname{cth} \pi\nu = h_n$, имеющему единственное решение.

Замечание 2. Для каждого $n=0, 1, \ldots$ собственные значения $\mu_n^k>0$, $k=1, 2, \ldots$, задачи (7)—(8) удовлетворяют условию

$$k^2<\mu_n^k<(k+1)^2,$$

так как второе краевое условие (8) при $\nu=\sqrt{\mu_n^k}$ приводит нас к уравнению $\nu \operatorname{ctg} \pi\nu = h_n$, которое в каждом интервале $(k\pi, (k+1)\pi)$ имеет конечное число решений.

Замечание 3. Если выбросить из множества всех чисел λ_n^k, $n=0, 1, \ldots$, $k=0, 1, \ldots$, построенную последовательность чисел $\{\lambda_n^0\}$, то оставшиеся числа λ_n^k $(n=0, 1, \ldots, k=1, 2, \ldots)$ в силу замечания 2 будут иметь тот же закон асимптотического распределения, что и собственные значения первой краевой задачи для прямоугольника, т.е. для числа собственных значений $N(\lambda)$, не превосходящих λ, справедливо равенство $N(\lambda)=O(\lambda)$.

Замечание 4. Система $\{\tilde{\mathscr{U}}_{nk}\}$, $n=0, 1, \ldots$, $k=0, 1, \ldots$, которая биортогонально сопряженная с системой (12) в $L_2(\mathscr{D})$, имеет вид (6), где $\{\tilde{Y}_n(y)\}$ — система собственных и присоединенных функций краевой задачи

$$\tilde{Y}''(y)+\bar{s}\tilde{Y}(y)=0 \quad (0<y<2\pi), \quad \tilde{Y}'(2\pi)=0, \quad \tilde{Y}(0)=\tilde{Y}(2\pi),$$

сопряженной с задачей (11). Системой собственных и присоединенных функций этой задачи будет система функций

$$\tilde{Y}_0(y)=\frac{1}{2\pi^2}, \quad \tilde{Y}_{2n-1}(y)=-\frac{2n}{\pi^2}\cos ny, \quad \tilde{Y}_{2n}(y)=\frac{1}{\pi^2}(2\pi-y)\sin ny,$$

$$n=1, 2, \ldots .$$

При этом каждому $\bar{s}=s=n^2$ при $n=1, 2, \ldots$ соответствует собственная функция $\tilde{Y}_{2n-1}(y)$ и присоединенная функция $\tilde{Y}_{2n}(y)$.

Замечание 5. Укажем граничные условия, которым удовлетворяют построенные собственные и присоединенные функции (12). Очевидно,

$$\mathscr{U}_{nk}(0, y)=\mathscr{U}_{nk}(x, 0)=0, \quad \frac{\partial \mathscr{U}_{nk}(x, 0)}{\partial y}=\frac{\partial \mathscr{U}_{nk}(x, 2\pi)}{\partial y},$$

а в силу (7)—(8)

$$\frac{\partial \mathscr{U}(\pi, y)}{\partial x}=H\mathscr{U}(\pi, y) \text{ при } x=\pi,$$

где H — самосопряженный оператор, ставящий в соответствие функции $f(y)$, определяемой биортогональным рядом

$$f(y) = a_0 y + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \sin ny + b_n y \cos ny),$$

функцию $Hf(y)$, определяемую биортогональным рядом

$$Hf(y) = h_0 a_0 y + \sum_{n=1}^{\infty} h_n (a_n \sin ny + b_n y \cos ny).$$

ЛИТЕРАТУРА

[1] ИЛЬИН, В. А., ФИЛИППОВ, А. Ф.: О характере спектра самосопряженного расширения оператора Лапласа в ограниченной области. ДАН СССР, 1970, т. 191, 267—269.

[2] НАЙМАРК, М. А.: Линейные дифференциальные операторы. М., «Наука», 1969.

[3] ИОНКИН, Н. И.: Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием. Диффер. урав., 1977, т. XIII, 294—304.

Поступило 28. 12. 1982

Katedra matematickej analýzy
Matematicko-fyzikálnej fakulty UK
Mlynská dolina
842 15 Bratislava

117 234 Москва
В-234 Ленинские горы МГУ
факультет ВМК
Кафедра общей математики