S. Kh. Aranson

Об одном аналоге теоремы Данжуа для гладких преобразований окружности с критическими точками перегиба

Mathematica Slovaca, Vol. 35 (1985), No. 2, 111--121

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/136381

Math. Slovaca 35, 1985, No. 2, 111—121

ОБ ОДНОМ АНАЛОГЕ ТЕОРЕМЫ ДАНЖУА ДЛЯ ГЛАДКИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ОКРУЖНОСТИ С КРИТИЧЕСКИМИ ТОЧКАМИ ПЕРЕГИБА

С. Х. АРАНСОН

В 1932 г. А. Данжуа [7] доказал теорему о том, что если на окружности S^1 задан C^1-диффеомерфизм f*) без периодических точек, производная f' от которого имеет ограниченную вариацию

$$\left(\operatorname*{Var}_{S^1} f' < +\infty\right),$$

то вся окружность является минимальным множеством. Тем самым А. Данжуа установил, что гипотеза А. Пуанкаре [10] о том, что у аналитических диффеомерфизмов окружности при наличии иррационального числа вращения могут быть нигде неплотные минимальные множества, неверна. Если же

$$\operatorname*{Var}_{S^1} f' = +\infty,$$

то как показал А. Данжуа [7], на окружности можно построить C^1-диффеоморфизм без периодических точек с нигде неплотным минимальным множеством.

В дальнейшем теорема А. Данжуа подверглась многочисленным модификациям с целью упрощения ее доказательства (Е. Р. ван Кампен, К. Л. Зигель и др.). Однако все эти доказательства не смогли устранить ее главную основу, предложенную А. Данжуа, — использование в той или иной степени арифметических свойств числа вращениа ω. Метод доказателства, не использующий арифметических свойств ω, нашел А. Шварц [11], однако при этом он был вынужден повысить класс гладкости диффеоморфизмов с C^1 до C^2.

---

*) Здесь и в дальнейшем под термином „C^k-преобразование" будем понимать преобразование f, например, гомеоморфизм или диффеоморфизм, имеющие гладкость C^k. Аналогичный смысл вкладывается в понятие „аналитическое преобразование".

Представляет интерес исследование структуры минимального множества при ослаблении требований теоремы А. Данжуа, например, для гладких преобразований окружности, отличных от диффеоморфизмов. Так, Л. Блок и Дж. Фрейнк [5] установили, что если на окружности S^1 задано C^1-преобразование f, не являющееся гомеоморфизмом, такое, что

$$\operatorname*{Var}_{S^1} f' < +\infty,$$

множество критических точек f конечно и непусто и каждая критическая точка есть точка локального минимума или максимума, то f имеет хотя бы одну периодическую точку.

В настоящей статье рассматриваются $C^r(r \geqslant 1)$-гомеоморфизмы окружности без периодических точек. Для них каждая критическая точка σ (то-есть точка $\sigma \in S^1$, в которой $f'(\sigma) = 0$), является либо неизолированной, и в этом случае в достаточно малой окрестности точки σ первая производная $f' \geqslant 0$, либо изолированной, и тогда σ является критической точкой перегиба такой, что в достаточно малой окрестности этой точки производная $f' > 0$.

В изолированной критической точке σ либо все производные $f', f'', \ldots$, которые могут существовать у преобразования f, равны нулю, либо

$$f'(\sigma) = f''(\sigma) = \ldots = f^{k-1}(\sigma) = 0, \quad f^k(\sigma) \neq 0,$$

и тогда k $(k \geqslant 3)$-нечетное. В последнем случае будем говорить, что σ есть критическая точка перегиба конечного порядка (порядка k).*)

Определение. *Пусть f: $S^1 \to S^1$ — гладкий гомеоморфизм без периодических точек (число вращения ω иррационально), имеющий ровно одну критическию точку σ. Будем говорить, что f принадлежит классу T_1, если $f - C^r(r \geqslant 3)$ — гомеоморфизм, для которого σ — критическая точка перегиба конечного порядка. Мы скажем, что f принадлежит классу T_2, если $f -$ Ц^{1}ℑ—ℑгомеоморфизм на S^1, $f - C^2$ — гомеоморфизм на $S^1 \setminus \sigma$ и вторая производная f'' на $S^1 \setminus \sigma$ имеет конечное число нулей.*

Таким образом, гомеоморфизмы класса T_i $(i = 1\,; 2)$ занимают промежуточное положение между диффеоморфизмами А. Данжуа и гладкими преобразованиями Л. Блока и Дж. Фрейнка.

В статье, наряду с классом T_i $(i = 1\,; 2)$, рассматриваются гомеоморфизмы окружности, имеющие несколько критических точек, а также дается интерпретация полученных результатов для гладких потоков на торе, имеющих

---

*) В частности, если f-аналитический гомеоморфизм, то критическая точка σ всегда конечного порядка. Если же $f - C^\infty$-гомеоморфизм, то, априори, все производные в точке σ могут быть равны нулю.

гомотопные нулю петли сепаратрис седел, и для коммутирующих гомеоморфизмов окружности.

Теорема. *Пусть на окружности S^1 задан гомеоморфизм $f \in T_i$ $(i=1; 2)$ и σ — критическая точка. Тогда σ является рекуррентной точной гомеоморфизма f такой, что в сколь угодно малой окрестности этой точки слева и справа от нее на окружности S^1 есть другие рекуррентные точки гомеоморфизма f.*

Доказательство этой теоремы будем проводить с помощью модификации конструкции Т. М. Черри [6], являющейся аналогом метода А. Данжуа, примененной Т. М. Черри для исследования топологической структуры нигде неплотного квазиминимального множества Ω *) аналитического потока на двумерном торе с двумя состояниями равновесия: седлом, лежащим в Ω таким, что сепаратрисы седла не образуют петель, и фокусом, не принадлежащим Ω.

Лемма 1. *Пусть f: $S^1 \to S^1 - C^1$-гомеоморфизм без периодических точек,*

$$\operatorname*{Var}_{S^1} f' < +\infty$$

и множество критических точек гомеоморфизма f непусто. Тогда хотя бы одна из критических точек является рекуррентной точкой гомеоморфизма f.

Доказательство. Предположим противное. Тогда минимальное множество Ω гомеоморфизма f нигде неплотно на S^1 и гомеоморфно канторовскому совершенному множеству, и при этом все критические точки лежат внутри смежных интервалов $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ к множеству Ω. Но тогда всегда можно так видоизменить преобразование f на объединении смежных интервалов $\bigcup_i \gamma_i$, сохраняя его прежним на остальном множестве $\Delta = S^1 \setminus \bigcup_i \gamma_i$, чтобы вновь полученное преобразование $\tilde{f}$ было C^1-диффеоморфизмом на S^1 и вариация

$$\operatorname*{Var}_{S^1} \tilde{f}' < +\infty.$$

Поскольку $\tilde{f}|_\Delta = f$, то минимальное множество $\tilde{\Omega}$ для $\tilde{f}$ совпадает с Ω, то-есть $\tilde{\Omega}$ нигде неплотно на S^1. С другой стороны, так как $\tilde{f} - C^1$-диффеоморфизм и

$$\operatorname*{Var}_{S^1} \tilde{f}' < +\infty,$$

*) Напомним, что множество Ω является квазиминимальным, если оно есть замыкание незамкнутой устойчивой по Пуассону траектории. В частности, минимальное множество, являющееся замыканием незамкнутой рекуррентной траектории, является квазиминимальным, но не наоборот.

то, в силу теоремы А. Данжуа [7], $\tilde{\Omega}=S^1$, что невозможно. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть f: $S^1\to S^1$-гомеоморфизм с иррациональным числом вращения ω, и задано направление обхода J окружности C^1. Тогда существует последовательность целых чисел $m, n\to+\infty$ таких, что какую бы точку $A_0\in S^1$ ни взять и рассмотреть последовательность замкнутых дуг*

$$I_k^{(m)}=[A_k, A_{k+m}](k=0, 1, 2, \ldots, n),\ A_{k+m}=f^m(A_k)$$

таких, что направление на дуге $I_k^{(m)}$ от точки A_k к точке *A_{k+m} совпадает с выбранным направлением обхода J окружности C^1, выполняются условия:*

1) $I_{k+1}^{(m)}=f(I_k^{(m)})$ $(k=0, 1, 2, \ldots, n-2)$;
2) $\mathrm{int}\ I_i^{(m)}\cap\mathrm{int}\ I_j^{(m)}=\emptyset$ $(i\neq j;\ i, j=0, 1, 2, \ldots, n-1)$;
3) $\mathrm{int}\ I_n^{(m)}\cap\mathrm{int}\ I_0^{(m)}\neq\emptyset$.

Доказательство этой леммы, данное в [6, стр. 201] и которое мы опускаем, основано на арифметических свойствах i-ых подходящих дробей

$$\delta_i=\frac{P_i}{Q_i}$$

(δ_i — несократимая дробь, $Q_i>0$, $\lim\limits_{i\to+\infty} Q_i=+\infty$) при разложении иррационального числа ω в цепную дробь, причем $m=Q_{i-1}$, $n=Q_i$, где $i\to+\infty$, и, в зависимости от направления J на окружности S^1 числа i берутся либо все нечетными, либо все четными. В такой формулировке арифметическая лемма Т. М. Черри является более сильной, чем соответствующая арифметическая лемма А. Данжуа [7], которая на каждом шаге учитывает знаменатели не двух соседних $(i-1)$-ой и i-ой подходящих дробей при разложении ω в цепную дробь, а лишь знаменатель одной i-ой подходящей дроби.

Доказательство теоремы.

Сначала рассмотрим случай, когда гомеоморфизм $f\in T_1$, и предположим, что утверждения теоремы неверны. Тогда минимальное множество Ω гомеоморфизма f нигде неплотно на S^1, гомеоморфно канторовскому совершенному множеству, и для критической точки σ выполняется одна из логических возможностей: 1) либо σ принадлежит одному из смежных интервалов к множеству Ω; 2) либо σ есть граничная точка смежного интервала.

В силу леммы 1, случай 1) не реализуется, поэтому изучим случай 2), когда σ есть граничная точка какого-нибудь смежного интервала (α, β) к множеству Ω, например, $\sigma=\alpha$.

Зададим на S^1 направление обхода J, соответствующее движению по смежному интервалу (α, β) от точки α к точке β.

Представим S^1 в виде: $S^1 = R^1/\Gamma$, где $R^1 = \{x\}$-эвклидова прямая, являющаяся универсальным накрытием для S^1; Γ — дискретная группа переносов: $x' = x + p$ (p — целые числа), и изменению x от $-\infty$ до $+\infty$ соответствует направление обхода J на окружности S^1, и, кроме того, точки $x = 0$ и $x = 1$ на R^1 являются прообразами точки σ.

Обозначим через $\bar{f}$: $R^1 \to R^1$ — гомеоморфизм на R^1, накрывающий f. Для любого интервала $I \in R^1$ или S^1 через $\hat{I}$ будем обозначать длину этого интервала. В силу леммы 2, по иррациональному числу вращения ω*) и направлению обхода J окружности S^1 зададим последовательность целых чисел m, $n \to +\infty$ таких, что при каждом m, n последовательность замкнутых дуг

$$I_k^{(m)} = [A_k, A_{k+m}] \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, n; \; A_{k+m} = f^m(A_k),\; A_0 = \sigma)$$

удовлетворяет условиям 1), 2), 3), указанным в лемме 2.

Тогда дуга $G_0 = [\sigma, \beta] \subset I_0^{(m)}$ и при обходе J имеем следующий порядок точек на S^1:

$$A_0 = \sigma < \beta < A_m,$$

где $<$ есть символ предшествования.

Обозначим через $G_k = f^k(G_0)$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Тогда по теореме о среднем получаем, что

$$\hat{G}_{k+1} = f'(g_k)\hat{G}_k, \quad \hat{G}_{-n+k+1} = f'(h_k)\hat{G}_{-n+k},$$

где точки $g_k \in G_k$, $h_k \in G_{-n+k}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$, причем $g_0 \in (\sigma, \beta]$, в противном случае, если $g_0 = \sigma$, то из-за $f'(\sigma) = 0$ получаем $\hat{G}_1 = f'(\sigma)\hat{G}_0 = 0$, что невозможно.

Поскольку $G_0 \in I_0^{(m)} \cap I_n^{(m)} \in I_n^{(m)}$, то $G_{-n} \in I_0^{(m)}$, и так как $g_0 \in G_0$, $h_0 \in G_{-n}$ и $G_0 \cap G_{-n} = \emptyset$, то $\sigma < g_0 < h_0$ и $g_0, h_0 \in I_0^{(m)}$.

В силу того, что $\operatorname{int} I_i^{(m)} \cap \operatorname{int} I_j^{(m)} = \emptyset$ $(i \neq j;\; i, j = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$, получаем, что между g_k, h_k не попадает при обходе J ни одна из точек g_i, h_i $(i \neq k;\; i, k = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$. Поэтому на S^1 имеем следующий порядок точек:

$$\sigma < g_0 < h_0 < g_m < h_m < \ldots < g_{n-1} < h_{n-1} < \ldots < g_{n-m} < h_{n-m}$$

*) ω находится из соотношения:

$$\omega = \lim_{n \to +\infty} \frac{\bar{f}^n(0)}{n} \pmod 1$$

Обозначим через $\bar{G}_k \bar{I}_k^{(m)}$, x_η, соответственно, прообразы на интервале $0 \leqslant x < 1$ прямой R^1 дуг G_k, $I_k^{(m)} \in S^1$ и любой точки $\eta \in S^1$. Тогда вышеуказанная цепочка предшествований индуцирует на R^1 неравенства

$$0 = x_\sigma < x_{g_0} < x_{h_0} < x_{g_m} < x_{h_m} < \ldots < x_{g_{n-1}} < x_{h_{n-1}} < \ldots < x_{g_{n\ m}} < x_{h_{n-m}} < 1 \qquad (1)$$

Поскольку для любой точки $\eta \in S^1 f'(\eta) = \bar{f}'(x_\eta)$, где $0 \leqslant x_\eta < 1$, то обозначив через

$$L = \sum_{k=0}^{n-1} [-\ln f'(g_k) + \ln f'(h_k)],$$

получаем, что

$$L = \sum_{k=0}^{n-1} [-\ln \bar{f}'(x_{g_k}) + \ln \bar{f}'(x_{h_k})].$$

Учитывая, что при $n \to +\infty$ $\hat{G}_n$, $\hat{G}_{-n} \to 0$ и

$$f'(g_k) = \hat{G}_{k+1}/\hat{G}_k, \quad f'(h_k) = \hat{G}_{-n+k+1}/\hat{G}_{-n+k}$$

имеем, что при $n \to +\infty$

$$L = \sum_{k=0}^{n-1} \ln \frac{\hat{G}_k \cdot \hat{G}_{-n+k+1}}{\hat{G}_{k+1} \cdot \hat{G}_{-n+k}} = \ln \frac{\hat{G}_0^2}{\hat{G}_n \cdot \hat{G}_{-n}} \to +\infty \qquad (2)$$

С другой стороны, поскольку $f \in T_1$, то $f - C^r$ ($r \geqslant 3$)-гомеоморфизм на S^1 и σ-критическая точка перегиба конечного порядка k, где k — нечетное i $3 \leqq k \leqslant r$. На интервале $0 < x < 1$ производная $\bar{f}'(x) > 0$, ибо на $S^1 \setminus \sigma$ f есть диффеоморфизм. Но тогда

$$\bar{f}'(0) = \ldots = \bar{f}^{(x-1)}(0) = \bar{f}'(1) = \ldots = \bar{f}^{(k-1)}(1) = 0,$$

$$\bar{f}^{(k)}(0) = \bar{f}^{(k)}(1) > 0, \quad \bar{f}^{(k-1)}(0+0) \geqslant 0, \quad \bar{f}^{(k-1)}(1-0) \leqslant 0,$$

и, следовательно, при $x \to 0+0$ и $x \to 1-0$ $\mathrm{d}/\mathrm{d}x \ln \bar{f}'(x)$ стремится, соответственно, к $+\infty$ и $-\infty$, и $\ln \bar{f}'(x) \to -\infty$.

Поэтому существует столь малое $\delta > 0$, что на интервале $0 < x < \delta$ функция $\ln \bar{f}'(x)$ является возрастающей, а на интервале $1 - \delta < x < 1$ -убывающей.

Выберем л обое значение $x = l$ такое, чтобы

$$\max \{x_{g_0}, 1 - \delta\} < l < 1,$$

и обозначим через

$$M = \operatorname*{Var}_{x_{g_0} \leqslant x \leqslant l} \ln \bar{f}'(x), \quad N = \max_{x_{g_0} \leqslant x \leqslant l} |\ln \bar{f}'(x)|. \qquad (3)$$

Точка g_0 не зависит от выбора чисел $m, n \to +\infty$, ибо $f'(g_0) = \hat{G}_1/\hat{G}_0$ и

$g_0 \in (\sigma, \beta]$. Так как $0 < x_{g_0} \leqslant x \leqslant l < 1$, то при таких x, функция $\bar{f}(x)$ является C^r $(r \geqslant 3)$-гладкой и $\bar{f}'(x) > 0$, откуда $M, N < +\infty$.

Покажем, что для выражения L выполняется неравенство: $L \leqslant M + 2N$, для чего представим L в виде: $L = L_1 + L_2$, где L_1 — сумма всех тех членов $a_k = -\ln \bar{f}(x_{g_k})$, $b_k = \ln \bar{f}'(x_{h_k})$ в L, у которых $x_{g_k}, x_{h_k} \leqslant l$, а L_2 — сумма всех остальных членов.

Разобъем точки в неравенствах (1) на пары $\{x_{g_k}, x_{h_k}\}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$. Могут быть две логические возможности: 1) l не разделяет ни одну из этих пар точек; 2) l разделяет пару $x_{g_{k0}}, x_{h_{k0}}$, то-есть $x_{g_{k0}} < l < x_{h_{k0}}$.

В случае 1) $|L_1| \leqslant M$, а в случае 2) выполняется условие $|L_1| \leqslant M + |\ln \bar{f}'(x_{g_{k0}})| \leqslant M + N$, то-есть в обоих случаях $L_1 \leqslant M + N$.

Покажем, что $L_2 \leqslant N$. Действительно, в случае 1) L_2 есть сумма конечного числа членов

$$a_k + b_k = -\ln \bar{f}(x_{g_k}) + \ln \bar{f}'(x_{h_k}),$$

и так как $l < x_{g_k} < x_{h_k} < 1$, то на участке $l < x < 1$ функция $\ln \bar{f}'(x)$ убывает, поэтому $a_k + b_k < 0$, то-есть $L_2 < 0$.

В случае 2) $L_2 = \ln \bar{f}'(x_{h_{k0}}) + \tilde{L}_2$, где $\tilde{L}_2$ есть сумма конечного числа членов вида $a_k + b_k < 0$, то-есть $\tilde{L}_2 < 0$. Так как $l < x_{h_{k0}} < 1$, то $\ln \bar{f}(x_{h_{k0}}) \leqslant \ln \bar{f}'(l) \leqslant N$, откуда $L_2 \leqslant N$. Поскольку $L = L_1 + L_2$, $L_1 \leqslant M + N$, $L_2 \leqslant N$, то $L \leqslant M + 2N$, что, в силу (2), невозможно.

Рассмотрим теперь случай, когда гомеоморфизм $f \in T_2$, тогда $f - C^1$ — гомеоморфизм на S^1, на $S^1 \setminus \sigma f - C^2$ — гомеоморфизм и f'' имеет на $S^1 \setminus \sigma$ конечное число нулей.

Предполагая противное и сохраняя вышеуказанные обозначения и ту же схему доказательства, получаем, что при $n \to +\infty L \to +\infty$, где L имеет вид (2).

С другой стороны, так как σ — единственная критическая точка и прообразы σ на R^1 есть $x = 0$ и $x = 1$, то при $0 < x < 1$ $\bar{f}'(x) > 0$, и $\bar{f}''(x)$ имеет конечное число нулей. Но тогда существует ближайший слева от $x = 1$ локальный максимум функции $\ln \bar{f}'(x)$, достигаемый при значении x, которое мы обозначим через l_0.

Выберем любое l такое, чтобы

$$\max \{x_{g_0}, l_0\} < l < 1,$$

и снова введем в рассмотрение числа M, N, определяемые формулой (3).

Так как $0 < x_{g_0} \leqslant x \leqslant l < 1$, то при таких x функция $\bar{f}(x)$ является C^2 — гладкой и $\bar{f}'(x) > 0$, откуда $M, N < +\infty$. Повторяя далее такое же доказательство, как и в случае $f \in T_1$, получаем, что $L \leqslant M + 2N$, что противоречит условию (2). Теорема доказана.

Следствие. *Пусть $f - C^2$ — гомеоморфизм окружности S^1 с нигде неплотным минимальным множеством Ω, отличным от периодической точки, и такой, что f'' имеет на S^1 конечное число нулей*). Тогда f имеет хотя бы одну критическию точку $\sigma \in \Omega$. При этом, если σ является граничной точкой какого-нибудь смежного интервала к множеству Ω, то у гомеоморфизма f есть еще одна критическая точка $\tilde{\sigma} \in \Omega$.*

Доказательство. Предположим противное, тогда все критические точки C^2-гомеоморфизма $f\colon S^1 \to S^1$ лежат в смежных интервалах к множеству Ω, что, в силу леммы 1, невозможно. Поэтому у f существует хотя бы одна критичекая точка $\sigma \in \Omega$.

Покажем, что если σ явсляется граничной точкой какого-нибудь смежного интервала, то у f есть еще одна критическая точка $\tilde{\sigma} \in \Omega$. Если это не так, то все критические точки гомеоморфизма f, отличные от σ, если они существуют, должны лежать в смежных интервалах к множеству Ω. Но тогда всегда можно так видоизменить C^2–гомеоморфизм f в этих смежных интервалах, не меняя его вне них, чтобы вновь полученный гомеоморфизм $\tilde{f}\colon S^1 \to S^1$ был бы C^2–гомеоморфизмом и вторая производная $\tilde{f}''$ имела бы на S^1 конечное число нулей.

По построению, σ-единственная критическая точка гомеоморфизма $\tilde{f}$. Но тогда $\tilde{f} \in T_2$ и, в силу теоремы, σ не может быть граничной точкой никакого смежного интервала минимального множества $\tilde{\Omega}$ гомеоморфизма $\tilde{f}$.

С другой стороны, по построению, $\tilde{\Omega} = \Omega$, то-есть σ является граничной точкой смежного интервала к $\tilde{\Omega}$, что невозможно. Следствие доказано.

Замечание 1. Гомеоморфизмы f класса T_2 возникают при рассмотрении на двумерном торе T^2 аналитического потока H^t с одним седлом O_1 и одним фокусом O_2 такого, что: 1) две сепаратрисы L_1, L_2 седла O_1 незамкнуты, а другие две сепаратрисы образуют петлю K, ограничивающую диск D, в котором находится фокус O_2; 2) седловая величина χ, равная дивергенции векторного поля, индуцированного потоком и вычисленная в седле O_1, отлична от нуля; 3) поток H^t не имеет замкнутых траекторий, негомотопных нулю.

Покажем, что для такого потока ω-сепаратриса L_1 и αсепаратриса L_2 седла O_1, соответственно, устойчивы по Пауссону P^- и P^+ и для любой дуги $\lambda \in L_i$ $(i = 1, 2)$ в сколь угодно малой ее окрестности по обе стройны от λ существуют точки, через которые проходят устойчивые по Пуассону траетории потока H^t.

---

*) В частности, аналитический гомеоморфизм $f\colon S^1 \to S^1$ всегда имеет на S^1 конечное число нулей для второй производной f''. Пример C^∞ — гомеоморфизма окружности с нигде неплотным минимальным множеством построен в [9], причем число вращения иррационально.

Действительно, не ограничивая общности, можем считать, что $\chi<0$ (если $\chi>0$, то сделаем замену t на $-t$ и вновь полученный поток снова обозначим через H'). В силу [3], в области $T^2\setminus(K\cup D)=\Delta$ существует незамкнутая устойчивая по Пуассону траектория L потока H'. Согласно [2, стр. 220], реконстрируя L в Δ, можно построить простую замкнутую негомотопную нулю кривую S^1, являющуюся для траекторий потока H' циклом без контакта, такую, что траектории, лежащие в D не нересекают S^1, а все другие траетории пересекают S^1 либо при $t\to-\infty$, либо при $t\to+\infty$.

Но тогда, в силу [8], поток H' индуцирует на S^1 C^1-гомеоморфизм f класса T_2 такой, что критическая точка σ гомеоморфизма f есть первая точка пересечения при $t\to-\infty$ ω-сепаратрисы L_1 с окружностью S^1, и на $S^1\setminus\sigma$ f является аналитическим преобразованием.

Поэтому, в силу теоремы, σ есть рекуррентная точка гомеоморфизма f, и в сколь угодной близости от σ слева и справа от σ есть другие рекуррентные точки гомеоморфизма f, откуда и следует вышеуказанное утверждение о свойствах сепаратрис седла O_1*).

Если же у потока H' в седле O_1 седловая величина $\chi=0$, то, в силу [8], f есть C^1-диффеоморфизм на S^1 и

$$\operatorname*{Var}_{S^1} f' < +\infty.$$

Поэтому, в этом случае, согласно А. Данжуа [7], все S^1 есть минимальное множество, откуда следует, что через каждую точку $x\in\Delta$ проходит незамкнутая устойчивая по Пуассону хотя бы в одну сторону траектория потока H', то-есть вся область Δ заполнена неблуждающими точками потока H'.

Аналогичная ситуация возникает и в том случае, когда вместо одной петли потока H' рассмотреть такой же поток, но с несколькими петлями из сепаратрис седел, причем во всех седлах седловые величины равны нулю. В этом случае на T^2 снова имеется область, сплошь заполненная неблуждающими точками.

Замечание 2. Все вышеуказанные предложения естественным образом переносятся на случай n попарно коммутирующих гладких гомеоморфизмов на S^1 и надстройками над ними, являющимся слоениями на n-мерном торе T^n с тривиальной групной голономии.

Пример. Рассмотрим аналитический гомеоморфизм f: $S^1\to S^1$, для которого накрывающий гомеоморфизм $\bar{f}$ на эвклидовой прямой $R^1=\{x\}$, являю-

---

*) Поток H' не является надстройкой [1, стр. 10] над гомеоморфизмом f окружности S^1, поэтому, в силу конструкции f, рекуррентным точкам на S^1 в потоке H' соответствуют незамкнутые нерекуррентные траектории, устойчивые по Пуассону хотя бы в одну сторону.

щейся универсальным накрытием для S^1, имеет вид:

$$\bar{f}(x)=x+\alpha-1/2\pi\sin 2\pi x,\quad \alpha\in(-\infty,\ +\infty),$$

так, что точкам $x=0,\ \pm1,\ \pm2,\dots$ на R^1 соответствует на S^1 одна и та же точка σ.

Тогда имеем, что

$$\bar{f}(x)=2\sin^2\pi x,\quad \bar{f}''(x)=2\pi\sin 2\pi x,$$

то-есть σ есть единственная критическая точка гомеоморфизма f и вторая производная f'' имеет на S^1-бодин нуль, соответствующий значению $x=1/2$.

Для того, чтобы показать, что $f\in T_1$, нужно установить, что существует значение $\alpha=\alpha^*$, при котором число вращения $\omega=\omega(\alpha^*)$ гомеоморфизма f иррационально.

Имеем, что $\omega(\alpha)=\bar{\omega}(\alpha)((\mathrm{mod}\ 1)$, где

$$\bar{\omega}(\alpha)=\lim_{n\to+\infty}\frac{\bar{f}(0)}{n}=\alpha-\frac{1}{2\pi}I(\alpha),$$

и где

$$I(\alpha)=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n-1}\varepsilon_\nu(\alpha),\quad \varepsilon_\nu(\alpha)=\sin\left(2\pi\nu\alpha-\sum_{\mu=1}^{\nu-1}\varepsilon_\mu\right),\ \sum_1^0\equiv0.$$

Положим $\alpha=m$, где m — целое число. Тогда $\varepsilon_\nu(m)=0$ $(\nu=1,\ 2,\dots)$, $I(m)=0$, то-есть $\bar{\omega}(m)=m$. Полагая $m=0$ и $m=1$ и учитывая, что $\bar{\omega}(\alpha)$ непрерывно зависит от α [4], получаем, что поскольку $\bar{\omega}(0)=0$, $\bar{\omega}(1)=1$, то существует $\alpha=\alpha^*\in(0,1)$ такое, что $\bar{\omega}(\alpha^*)$, и, следовательно, и $\omega(\alpha)$ — иррациональное число.

Поэтому, в силу теоремы, имеем, что σ — рекуррентная точка гомеоморфизма f, и в сколь угодной близости от σ слева и справа от нее существуют рекуррентные точки гомеоморфизма f.

Пусть f: $S^1\to S^1$ — геоморфизм, имеющий нигде непротное минимальное множество Ω, отличное от периодической точки. Обозначим через $G=(\alpha,\ \beta)$ какой-нибудь смежный интервал к множеству Ω и объединение

$$A=\bigcup_{n=-\infty}^{+\infty}f^n(G)$$

назовем ячейкой минимального множества Ω.

Гипотеза. *Если гомеоморфизм f — аналитический, то его минимальное множество имеет не более конечного числа ячеек.*

ЛИТЕРАТУРА

[1] АНОСОВ, Д. В.: Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны, Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, 90, 1967.

[2] АРАНСОН, С. Х.: Об отсутствии незамкнутых устойчивых по Пуассону полутраекторий и траекторий, двоякоасимптотических к двойному предельному циклу, у динамических систем первой степени негрубости на ориентируемых двумерных многообразиях, Матем. сб. 76 (118), №2, 1968, 214–230.

[3] МАЙЕР, А. Г.: О траекториях на ориентируемых поверхностях, Матем. сб. 12 (54), 1943, 71–84.

[4] МАЙЕР, А. Г.: Грубые преобразования окружности в окружность, Ученые записки ГГУ, 12, 1939, 215–229.

[5] BLOCK, L., FRANKE, J.: Existence of periodic points for maps of S^1. Invent. math. v. 22, №1, 1973, 69—73.

[6] CHERRY, T. M.: Analytic quasiperiodic curves of discontinuous type on a torus. proc. Lond. Math. Soc. Ser. 2, 44, 1937, 175—215.

[7] DENJOY, A.: Sur les courbes par les equations differentielles a la surface du tore. J. Math. Pures Appl. 11 (9), 1932, 333—375.

[8] DULAC, H.: Sur les cycles limites. Bull. de la Soc. Math. de France, 51, 1923.

[9] HALL, G. R.: A C^∞-Denjoi counterexample. Ergod. Th. and Dynam. Sys., I, 1981, 261—272.

[10] POINCARE, H.: Metoire sur les courbes definie par equation differentielle, III. J. Math. Pures Appl., 1 (4), 1885, 167—244.

[11] SCHWARTZ, A. J.: A generatization of a Poincare-Bendixon theorem to closed two-dimensional manifolds. Amer. J. Math. 85, 1963, 453—458.

Поступило 13. 10. 1982

СССР, 603005, г. Горкий, ул. Ульянова, дом 10
Научно-исследовательский институт
прикладной математики и кибернетики
при Горьковском государственном университете