Mathematica Slovaca

Eulalia Grande

Sur un problème concernant les fonctions quasicontinues

Mathematica Slovaca, Vol. 32 (1982), No. 3, 309--312

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/136301

Math. Slovaca 32, 1982, No. 3, 309—312

SUR UN PROBLÈME CONCERNANT LES FONCTIONS QUASICONTINUES

EULALIA GRANDE

Désignons par R l'espace des nombres réels et par R^2 l'espace produit $R\times R$. Une fonction f: $R^2\to R$ est dite quasicontinue au point $x\in R^2$ (v. [1]) lorsque, quels que soient l'intervalle ouvert U contenant $f(x)$ et l'entourage ouvert V du point x, il existe un ensemble ouvert, nonvide $T\subset V$ tel que $f(T)\subset U$.

Dans l'article [2] Šalát a posé le problème suivant:

Problème 1. Caractériser les ensembles des points de discontinuité des fonctions réelles de deux variables réelles qui sont quasicontinues.

Le théorème suivant est une résolution du problème de Šalát:

Théorème. *Soit $B\subset R^2$ un ensemble. Pour qu'il existe une fonction f: $R^2\to R$ quasicontinue, continue en tout point $x\in R^2-B$ et discontinue en tout point $x\in B$, il faut et il suffit que l'ensemble B soit du type F_σ et de première catégorie.*

Démonstration. Nécessité. Comme l'ensemble des points de discontinuité de toute fonction est du type F_σ et l'ensemble des points de discontinuité de toute fonction quasicontinue est de première catégorie (v. [1]), notre condition est donc nécessaire.

Suffisance. L'ensemble B étant du type F_σ et de première catégorie, il existe une suite d'ensembles (B_n) bornés, fermés et non denses telle que $B=\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n$ et $B_i\subset B_{i+1}$ pour $i=1, 2, \ldots$. Soit $\{K_{ij}\}_{i,j=1}^{\infty}$ une famille de sphères fermées telle que les conditions suivantes soient satisfaites:

(1) Étant fixé i, on a $K_{ij_1}\cap K_{ij_2}=\emptyset$ lorsque $j_1\neq j_2$;

(2) $K_{ij}\cap B_i=\emptyset$ pour tous i, $j=1, 2, \ldots$;

(3) $K_{i_1j_1}\cap K_{i_2j_2}=\emptyset$ ou bien $K_{i_1j_1}\subset K_{i_2j_2}$ ou bien $K_{i_2j_2}\subset K_{i_1j_1}$ lorsque $i_1\neq i_2$ (i_1, i_2, j_1, $j_2=1, 2, \ldots$);

(4) Étant fixé i, il existe pour tout $n=1, 2, \ldots$, un indice $j(n)$ tel que $\{x\in R^2$: $\varrho(x, B_i)\geqq 1/n\}\cap K_{ij}=\emptyset$ pour tout $j>j(n)$ ($\varrho(x, y)$ désigne comme d'habitude la distance euclidienne des points x et y et

$$\varrho(x, B_i) = \inf_{y\in B_i}\varrho(x, y));$$

(5) Étant fixé i, il existe pour tout point $x \in B_i$ une suite (x_{ij_k}) de centres des sphères K_{ij_k} convergente vers le point x.

La suite de sphères K_{ij} existe. En effet, posons, pour $n = 1, 2, \ldots$

$$C_{1n} = \left\{ x \in R^2 ; \frac{1}{n+1} < \varrho(x, B_1) < \frac{1}{n} \right\} .$$

Tout ensemble C_{1n} est ouvert et il existe pour tout $n = 1, 2, \ldots$ un système fini de points $x_{1,i(n-1)+1}$; $x_{1,i(n-1)+2}, \ldots, x_{1\, i(n)}$ appartenant à C_{1n} et tels que $x_{1k_1} \neq x_{1k_2}$ pour $k_1 \neq k_2$ $(i(n-1) < k_1,\ k_2 \leqslant i(n))$, et qu'il existe pour tout point $x \in C_{1n}$ un point x_{1l} $(i(n-1) < l \leqslant i(n))$ tel que $\varrho(x, x_{1l}) < \frac{1}{4n}$. Désignons par K_{1j} $(i(n-1) < j < i(n))$ la sphère fermée de centre x_{1j} et de rayon $r = \frac{1}{4} \min \{ \varrho(x_{1k_1}, x_{1k_2}) : k_1 \neq k_2$ et $i(n-1) < k_1,\ k_2 < i(n)\}$.

Remarquons que la suite de sphères K_{1j} satisfait aux conditions (1)—(5).

Fixons un indice naturel $k-1$ et supposons que, quel que soit l'indice naturel l $(1 \leqslant l \leqslant k-1)$, on ait déjà définie la suite de sphères fermées K_{lj} satisfaisant aux conditions (1)—(5).

Soit

$$C_{kn} = \left\{ x \in R^2 : \frac{1}{n+1} < \varrho(x, B_k) < \frac{1}{n} \right\} .$$

Tout ensemble

$$C_{kn} - \bigcup_{i=1}^{k-1} \bigcup_{j=1}^{\infty} K_{ij}$$

est ouvert et il existe pour tout $n = 1, 2, \ldots$ un système fini de points $x_{k\, i(n-1)+1}$, $x_{k\, i(n-1)+2}, \ldots, x_{k\, i(n)}$ appartenant à l'ensemble

$$D_{kn} = C_{kn} - \bigcup_{i=1}^{k-1} \bigcup_{j=1}^{\infty} \mathrm{Fr}(K_{ij}),$$

$(\mathrm{Fr}(K_{ij})$ désigne, comme d'habitude, la frontière de la sphère K_{ij}) tels que $x_{kk_1} \neq x_{kk_2}$ pour $k_1 \neq k_2$ $(i(n-1) < k_1,\ k_2 \leqslant i(n))$ et qu'il existe pour tout point $x \in C_{kn}$ un point x_{kl} $(i(n-1) < 1 \leqslant i(n))$ tel que $\varrho(x, x_{kl}) < \frac{1}{4n}$. En faisant correspondre à chaque point x_{kj} $(i(n-1) < j < i(n))$ une sphère fermée K_{kj} de centre x_{kj}, contenue dans l'ensemble D_{kn} et disjointe de toute sphère K_{kl} $(i(n-1) < l < j \leqslant j(n))$ on obtient par induction la suite $\{K_{ij}\}_{j=1}^{\infty}$ satisfaisant à toutes les conditions (1) – (5).

Soit (a_i) une suite de nombres positifs telle que

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i < \infty. \tag{6}$$

Définissons pour tout $i=1, 2, \dots$ une fonction $f_i\colon R^2 \to [0, a_i]$ telle que:

(7) $f_i(x)=0$ pour tout $x \in R^2 - \bigcup_{j=1}^{\infty} K_{ij}$ et la fonction partielle $f_i|_{K_{ij}}$ $(j=1, 2, \dots)$ est une fonction continue telle que $f_i(x_{ij})=a_i$ et $f_i(x)=0$ pour tout $x \in \mathrm{Fr}(K_{ij})$. On voit sans peine que la fonction f_i est continue en tout point $x \in R^2 - B_i$.

Posons

$$f(x)=\sum_{i=1}^{\infty} f_i(x) \quad \text{pour} \quad x \in R^2.$$

Comme la fonction f est la somme d'une suite uniformément convergente de fonctions f_i continues en tout point

$$x \in R^2 - \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = R^2 - B,$$

elle est donc continue en tout point $x \in R^2 - B$.

Fixons un point $x_0 \in B$. Soit k le plus petit indice tel que $x_0 \in B_k$. Posons

$$s_{k-1}=\sum_{i=1}^{k-1} f_i \quad \text{et} \quad r_{k-1}=\sum_{i=k}^{\infty} f_i.$$

Comme $x_0 \notin B_i$ pour $i=1, 2, \dots, k-1$, la fonction s_{k-1} est donc continue au point x_0. D'après (5) et (8) il existe pour tout $i \geqslant k$ une suite (x_{ij_n}) de centres des sphères K_{ij_n} convergente vers le point x_0 et telle que $f_i(x_{ij_n})=a_i>0$. Puisque $r_{k-1}(x_0)=0$, la fonction r_{k-1} n'est pas donc continue au point x_0 et par conséquent la fonction f est descontinue au point x_0.

Reste à prouver que la fonction f est quasicontinue au point x_0. Fixons le nombre $\varepsilon>0$. Il existe un indice $n_0>k$ tel que

$$\sum_{j=n_0+1}^{\infty} a_j<\frac{\varepsilon}{4}. \tag{8}$$

Soit U un entourage ouvert du point x_0. La fonction s_{k-1} étant continue au point x_0, il existe une sphère ouverte $V \subset U$ de centre au point x_0 et telle que

$$|s_{k-1}(x)-s_{k-1}(x_0)|<\frac{\varepsilon}{4} \quad \text{pour tout} \quad x \in V. \tag{9}$$

D'après (4), (1), (2) et (3) il existe une sphère ouverte non vide $V_1 \subset V$ telle que

$$V_1 \cap \bigcup_{i=1}^{n_0} \bigcup_{j=1}^{\infty} K_{ij}=\emptyset. \tag{10}$$

Par conséquent, on a d'après (7)

(11) $f_i(x)=0$ pour tout $x \in V$ et $i=k, k+1, \dots, n_0$. Il en résulte, pour tout $x \in V$,

$$|f(x)-f(x_0)|=$$

$$=\left|s_{k-1}(x)+\sum_{i=k}^{n_0} f_i(x)+\sum_{i=n_0+1}^{\infty} f(x)-s_{k-1}(x_0)-r_{k-1}(x_0)\right|=$$

$$=\left|s_{k-1}(x)-s_{k-1}(x_0)+\sum_{i=n+1}^{\infty} f_i(x)\right|<$$

$$<|s_{k-1}(x)-s_{k-1}(x_0)|+\sum_{i=n+1}^{\infty} a_i \leqslant \frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}=\frac{\varepsilon}{2},$$

se qui termine la démonstration.

Problème 2. Soit $A\subset R^2$ un ensemble du type F_σ tel que toutes ses sections $A_x=\{y\in R: (x, y)\in A\}$ et $A^y=\{x\in R: (x, y)\in A\}$ soient de premiere catégorie. Existe — t — une fonction f: $R^2\rightarrow R$ quasicontinue par rapport à chacune de deux variables x et y, continue en tout point de l'ensemble R^2-A et discontinue en tout point de l'ensemble A?

TRAVAUX CITES

[1] KEMPISTY, S.: Sur les fonctions quasicontinues, Fund. Math. 29, 1932, 184 197

[2] ŠALÁT, T : On discontinuity points of functions of some classe (sous presse)

Reçu le 10 10. 1980

Wyzsza szkola pedagogiczna
ul Chodkiewicza 30
85 064 Bydgoszcz
Polska

О ФУНКЦИАХ КВАЗИНЕПРЕРЫВНЫХ

Эулалия Гранде

Резюме

В настоящей работе доказано что $A\subset R^2$ является множеством точек разрыва некоторои квазинепрерывной функции тогда и только тогда, если A будет множеством типа F_σ и первои категории.