Mathematica Slovaca

Jana Galanová

# Тензорное произведение полугруппы и полугруппы идемпотентов

*Mathematica Slovaca*, Vol. 32 (1982), No. 1, 55--60

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/136283

Math. Slovaca 32, 1982, No 1, 55—60

# ТЕНЗОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ПОЛУГРУППЫ И ПОЛУГРУППЫ ИДЕМПОТЕНТОВ

JANA GALANOVA

## Введение

В [4] определено тензорное произведение в классе всех полугрупп и в [5] тензорное произведение в классе всех коммутативных полугрупп, которое мы здесь будем называть с-тензорным произведением. Мы будем заниматься тензорным произведением только двух полугрупп и напомним его определение в этом случае.

**Определение 1.** *Пусть $A$, $B$, $C$ — полугруппы. Отображение $\beta$ декартова произведения $A \times B$ в $C$ называется билинейным, если*

$$\beta(a_1a_2, b) = \beta(a_1, b)\,\beta(a_2, b),$$

$$\beta(a, b_1b_2) = \beta(a, b_1)\,\beta(a, b_2), \qquad a, a_1, a_2 \in A,\ \ b, b_1, b_2 \in B.$$

**Определение 2.** *Пусть $S$, $B$ — полугруппы. Тензорным произведением полугрупп $A$, $B$ называем пару $(\omega, T)$, где $T$-полугруппа и $\omega$-билинейное отображение $A \times B$ в $T$, со свойством:*

*Для каждого билинейного отображения $\beta\colon A \times B \to C$, $C$-полугруппа, существует только один гомоморфизм $\alpha\colon T \to C$ такой, что $\beta = \alpha\omega$.*

Полугруппу $T$ обозначаем $A \otimes B$, $\omega$ называем тензорным отображением $A \times B$ в $A \otimes B$ и $\omega(a, b)$ обозначаем $a \otimes b$.

Определение с-тензорного произведения двух коммутативных полугрупп $A$, $B$ мы получим из определения 2 таким образом, что будем предпологать $A$, $B$, $C$, $T$ коммутативными полугруппами. Полугруппу $T$ обозначаем $A \otimes^c B$ и $\omega(a, b) = a \otimes^c b$.

В этой работе будем еще пользоватсья следующими обозначениями:

$|X|$ — мощность множества $X$,
$E$ — одноэлементная полугруппа $\{1\}$,
$E(X)$ — наибольший гомоморфный идемпотентный образ полугруппы $X$,
$C(X)$ — наибольший гомоморфный коммутативный образ полугруппы $X$,

$N(X)$ — наибольший гомоморфный образ полугруппы $X$ со свойством $(xy)^n = x^n y^n$ для всех $x, y \in N(X)$, $n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$.

$E(X)$, $C(X)$, $N(X)$ существуют для всякой полугруппы $X$ ([1,9]).

В [3—6] показаны основные свойства тензорного и с-тензорного произведения полугрупп. Приводим из них те, которые нас интересуют. Это Г0—Г6. Если $A$, $B$-полугруппы, то

Г0. $A \otimes B \cong N(A) \otimes N(B)$.
Г1. $A \otimes E \cong E(A)$.
Г2. $A \otimes^{c} B \cong C(A \otimes B)$, $A, B$ – коммутативные.
г3. $A \otimes B \cong B \otimes A$.

**Определение 3.** *Пусть $\delta: A \to P$, $\gamma: B \to T$ — гомоморфизмы полугрупп и $\omega$ — тензорное отображение $A \times B$ в $A \otimes B$. Пусть отображение $\beta: A \times B \to P \otimes T$ определено соотношением $\beta(a, b) = \delta(a) \otimes \gamma(b)$. Ввиду билинейности отображения $\beta$ существует только один гомоморфизм $\alpha: A \otimes B \to P \otimes T$ со свойством $\beta = \alpha\omega$. Гомоморфизм $\alpha$ называем тензорным произведением гомоморфизмов $\delta$, $\gamma$ и покладаем $\alpha = \delta \otimes \gamma$.*

Г4. Если $\delta$, $\gamma$ сюръективны, то и $\delta \otimes \gamma$ сюръективен.

**Определение 4.** *Пусть $\sigma'$ — конгруэнция на полугруппе $A$, $\sigma$ на $B$. Тензорным произведением $\sigma'$ и $\sigma$ называем конгруэнцию $\sigma' \otimes \sigma$ на $A \otimes B$, порожденную отношением $\tau_0$:*

$$(a \otimes b, x \otimes y) \in \tau_0 \Leftrightarrow (a, x) \in \sigma', \qquad (b, y) \in \sigma.$$

Г5. Если $\delta$, $\gamma$ — сюръективные гомоморфизмы полугрупп, то

$$\ker \delta \otimes \ker \gamma = \ker (\delta \otimes \gamma).$$

Г6. Пусть $\sigma'[\sigma]$ — конгруэнция на полугруппе $A[B]$, порожденная отношением $\sigma'_0[\sigma_0]$. Тогда $\sigma' \otimes \sigma$ — конгруэнция на $A \otimes B$, порожденная $\tau_0$:

$$(a \otimes b, x \otimes b) \in \tau_0, \quad \text{если} \quad (a, x) \in \sigma'_0, \; b \in B$$
$$(a \otimes b, a \otimes y) \in \tau_0, \quad \text{если} \quad (b, y) \in \sigma_0, \; a \in A.$$

## 2. Достаточное условие для различия элементов $A \otimes B$

Тензорным и с-тензорным произведением полуструктур занимались в [2, 7]. В [8] показано, что $A \otimes G \cong A$, где $G$ — группа и $A$ — полугруппа идемпотентов.

**Теорема 1.** *Пусть $H(A)$ — идемпотентный гомоморфный образ полугруппы $A$ и этот гомоморфизм $\delta$. Если $\delta(a_1 \ldots a_n) \neq \delta(x_1 \ldots x_m)$,*

$a_1, \ldots, a_n, x_1, \ldots, x_m \in A$, *то для всех элементов* $b_1, \ldots, b_n, y_1, \ldots, y_m \in B$ *есть* $(a_1 \otimes b_1) \ldots (a_n \otimes b_n) \neq (x_1 \otimes y_1) \ldots (x_m \otimes y_m)$ *в тензорном произведении* $A \otimes B$.

Доказательство. Пусть $E$ — одноэлементная полугруппа и $\gamma$ — гомоморфизм $B$ на $E$. По определению 3 существует гомоморфизм $\delta \otimes \gamma\colon A \otimes B \to H(A) \otimes E$. Применяя теорему Г1, получаем, что $H(A) \otimes E$ изоморфно $H(A)$ и этот изоморфизм $\psi$: $\psi(h \otimes 1) = h$, $h \in H(A)$.

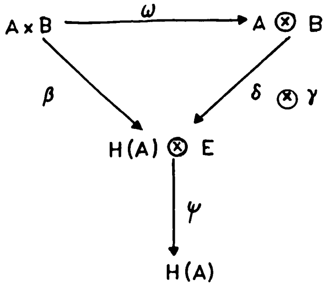

Рис. 6

Таким образом, для любых $a_1, \ldots, a_n, x_1, \ldots, x_m \in A$, $b_1, \ldots, b_n, y_1, \ldots, y_m \in B$ получаем: $\delta(a_1 \ldots a_n) = h_1 = \psi(\delta(a_1 \ldots a_n) \otimes 1) = \psi(\delta(a_1) \ldots \delta(a_n) \otimes 1) = \psi[(\delta(a_1) \otimes 1) \ldots (\delta(a_n) \otimes 1)] = \psi[[\delta(a_1) \otimes \gamma(b_1)] \ldots [\delta(a_n) \otimes \gamma(b_n)]] = \psi((\delta \otimes \gamma)[(a_1 \otimes b_1) \ldots (a_n \otimes b_n)]) = \alpha((a_1 \otimes b_1) \ldots (a_n \otimes b_n))$ и аналогично получаем $h_2 = \delta(x_1 \ldots x_m) = \alpha((x_1 \otimes y_1) \ldots (x_m \otimes y_m))$. Если $h_1 \neq h_2$, то $\alpha((x_1 \otimes y_1) \ldots (x_m \otimes y_m)) \neq \alpha((a_1 \otimes b_1) \ldots (a_n \otimes b_n))$, и ясно, что $(x_1 \otimes y_1) \ldots (x_m \otimes y_m) \neq (a_1 \otimes b_1) \ldots (a_n \otimes b_n)$.

Очевидно, интересным случаем является случай $H(A) = E(A)$.

Теорема 1 — это достаточное условие, но не необходимое. Об этом можно убедиться в [4], пример 2.3.

**Следствие 1.1.** *Если* $A$, $B$ — *полугруппы идемпотентов, то* $a \otimes b \neq x \otimes y$ *в* $A \otimes B$ *тогда и только тогда, когда* $(a, b) \neq (x, y)$ *в* $A \times B$.

Доказательство. Если $a \neq x$, то применяя теорему 1, имеем $a \otimes b \neq x \otimes y$. Если $b \neq y$, то из теоремы Г3 и теоремы 1 вытекает $a \otimes b \neq x \otimes y$.

Достаточность условия очевидна.

**Теорема 2.** *Пусть* $H(A)$ — *идемпотентный гомоморфный образ коммутативной полугруппы а и этот гомоморфизм* $\delta$. *Если* $\delta(a_1 \ldots a_n) \neq \delta(x_1 \ldots x_m)$, $a_1, \ldots, a_n, x_1, \ldots, x_m \in A$, *то для всех элементов* $b_1, \ldots, b_n, y_1, \ldots, y_m$ *коммутативной полугруппы в есть* $(a_1 \otimes^c b_1) \ldots (a_n \otimes^c b_n) \neq (x_1 \otimes^c y_1) \ldots (x_m \otimes^c y_m)$ *в с-тензорном произведении* $A \otimes^c B$.

Доказательство. Употребляем те же обозначения, что и в доказательстве теоремы 1. Ввиду теоремы Г2 и Г1, с-тензорное произведение

$H(A)\otimes^{C}E \cong C(N(A)\otimes E) \cong C(H(A)) \cong H(A)$, т.е. доказательство теоремы 2 аналогично доказательству теоремы 1.

### 3. Уравнение $A\otimes X\cong A$, $A$ — конечная полугруппа идемпотентов

В этой части приводим все решения уравнения $A\otimes X\cong A$, где $A$ — конечная полугруппа идемпотентов.

**Теорема 3.** *Если $A$ — конечная полугруппа идемпотентов и $H(S)$ гомоморфный идемпотентный образ полугруппы $S$, $|H(S)|>1$, то $A\otimes S$ не изоморфно $A$.*

Доказательство. Пусть $H(S)$ гомоморфный образ $S$ и $\delta$ этот гомоморфизм. В силу теоремы 1 из $(a, \delta(s))\neq(x, \delta(t))$ вытекает $a\otimes s\neq x\otimes t$ в $A\otimes S$, $a, x\in A$, $s, t\in S$. Таким образом, $|A\otimes S| \geqq |A\times H(S)| > |A|$, и поэтому не имеет места $A\otimes S\cong A$.

**Следствие 3.1.** *Пусть $A$, $S$ — полугруппы идемпотентов, $A$ — конечная, то $A\otimes S\cong A$ тогда и толко тогда, когда $C$ — одноэлементная полугруппа.*

Доказательство. $E(S)\cong S$ и если $A\otimes S\cong A$, то в силу теоремы 3 должно $|E(S)| = 1 = |S|$. Достаточность условия — это Г1.

**Теорема 4.** *Если $A$ — полугруппа идемпотентов и $E(T)$ — наибольший идемпотентный гомоморфный образ полугруппы $T$, то $A\otimes T \cong A\otimes E(T)$*

Доказательство. Обозначим $\iota$ тождественное отображение $A$ на $A$ и $\delta$ естественный гомоморфизм $T$ на $E(T)$. В силу теоремы Г4, $\alpha=\iota\otimes\delta$ — сюръективный гомоморфизм $A\otimes T$ на $A\otimes E(T)$, а в силу теоремы Г5 есть $\ker\alpha = \ker\iota\otimes\ker\delta$. Ввиду определения $E(T)$ получаем, что $\ker\delta$ — конгруэнция, порожденная отношением $\sigma_0=\{(t, t^2): t\in T\}$. Применяя теорему Г6, получаем, что $\ker\alpha$ — конгруэнция на $A\otimes T$, порожденная отношением $\tau_0 = \{(a\otimes t, a\otimes t^2) : a\in A, t\in T\}$.

В силу идемпотентности полугруппы $A$ получаем $a\otimes t = a^2\otimes t$, а из определения тензорного произведения $a^2\otimes t = (a\otimes t)^2 = a\otimes t^2$. Ясно, что $\ker\alpha$ — конгруэнция, порожденая отношением тождества; итак, $\alpha$ — инъективное отображение.

Следующее следствие непосредственно вытекает из теоремы 4.

**Следствие 4.1.** *Если $A$ — полугруппа идемпотентов и $E(P) \cong E(T)$, где — $P$, $T$ — полугруппы, то $A\otimes P\cong A\otimes T$.*

**Следствие 4.2.** *Пусть $A$ — конечная полугруппа идемпотентов. Полугруппа $X$ есть решением уравнения $A\otimes X\cong A$ тогда и только тогда, когда $|E(X)|=1$.*

Доказательство тривиально вытекает из теоремы 4 и следствия 3.1.

Заметим, что в качестве $X$ можно взять группу.

Г0 говорит, что $A \otimes B \cong N(A) \otimes N(B)$ для произвольных полугрупп $A, B$ и из теоремы 4 вытекает, что $A \otimes B \cong A \otimes E(B)$, где $A$ — полугруппа идемпотентов. Неясно, является ли теорема 4 улучшением Г0 для полугруппы идемпотентов $A$.

Очевидно, что любые элементы $x, y \in E(B)$ исполняют тождество $(xy)^n = x^n y^n$, $n \in \{1, 2, \ldots\}$ и из определения $N(B)$ вытекает существование гомоморфизма $\varphi\colon N(B) \to E(B)$. Для $A$ имеем $E(A) \cong A \cong N(A)$ и в силу Г0 $A \otimes B \cong A \otimes N(B)$. Потому что $\varphi$ не должен быть изоморфизмом (например для $B$ — свободной полугруппы на $\{a, b\}$), теорема 4 является малым улучшением Г0 тогда, когда $A$ — полугруппа идемпотентов.

**Определение 5.** *Пусть $P$ — полугруппа с едницей 1. Элемент $p \in P$ делит 1, $p/1$, если существуют элементы $x, y \in P$ со свойством $xy = 1$.*

**Лемма 1.** *Пусть $P$ — полугруппа с единицей 1 и пусть $a \in A$ — идемпотент полугруппы $A$. Если $p \in P$ делит 1, то $a \otimes p = a \otimes 1$.*

Доказательство. Если $p/1$, то существуют $x, y \in P$ так, что $xpy = 1$. Сначала покажем $a \otimes x = a \otimes 1$. Действительно, $a \otimes x = (a \otimes x)(a \otimes 1) = (a \otimes x)(a \otimes x)(a \otimes py) = (a^2 \otimes x)(a \otimes py) = (a \otimes x)(a \otimes py) = a \otimes xpy = a \otimes 1$.

Аналогично $a \otimes y = a \otimes 1$, итак, $a \otimes 1 = (a \otimes x)\,(a \otimes p)\,(a \otimes y) = (a \otimes 1)\,(a \otimes p)\,(a \otimes 1) = a \otimes 1p1 = a \otimes p$.

**Теорема 5.** *Пусть $P$ — полугруппа с единицей 1 и всякый элемент $p \in P$ делит 1. Если $A$ — полугруппа идемпотентов, то $A \otimes P \cong A$.*

Доказательство. Произвольный элемент $A \otimes P$ имеет вид $(a_1 \otimes p_1) \ldots (a_n \otimes p_n)$, $a_1, \ldots, a_n \in A$ и $p_1, \ldots, p_n \in P$. Ввиду леммы 1 имеем $(a_1 \otimes p_1) \ldots (a_n \otimes p_n) = (a_1 \otimes 1) \ldots (a_n \otimes 1) = (a_1 \ldots a_n) \otimes 1$.

Пусть $\alpha\colon A \otimes P \to A$ — гомоморфизм, где $\alpha(a \otimes 1) = a$. В силу теоремы 1 из $a \neq b$, $a, b \in A$ следует, что $a \otimes 1 \neq b \otimes 1$, т. е. $\alpha$ — изоморфизм.

Заметим, что в качестве $P$ можно взять группу и бициклическую полугруппу.

**Следствие 5.1.** *Если $P$ — полугруппа с единицей 1 и взякый элемент $p \in P$ делит 1, то $E(P)$ — одноэлементная полугруппа.*

Доказательство. $E \otimes P \cong E$ (теорема 5) и в силу следствия 4.2 имеем $|E(P)| = 1$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] CLIFFORD, A. H., PRESTON, G. B.: The algebraic theory of semigroup Mat. Surveys of the American Math. Soc. 7, A.M.S Providence R.I., Vol. I 1961, Vol. II 1967.
[2] DELANY, J. E.: Tensor product of semilattices. Portugaliae Mathematica 31, 1972, 193—202
[3] FULP, R.: Tensor and torsion products of semigroups. Pacif. J. of Math. 32, 1970, 685—696.
[4] GRILLET, P. A.: The tensor product of semigroups. Trans. Amer. Math. Soc. 138, 1969, 267—280.
[5] GRILLET, P. A.: The tensor product of commutative semigroups. Trans. Amer. Math. Soc. 138, 1969, 281—293.
[6] HEAD, T. J.: Homomorphisms of commutative semigroups as tensor maps. J. Nat. Sci. and Math. 7, 1967, 39—49.
[7] KIMURA, N.: Tensor product of semilattices. Notices Amer. Math. Soc 17, 1970, 554.
[8] SATKO, L.: Tenzorové súčiny pologrúp a grupoidov. Kandidátska dizertačná práca. Bratislava, apríl 1977.
[9] TAMURA, T.: Maximal or greatest homomorphic images of given type. Canad J. Math 20 (2), 1968, 264—271.

Поступило 21. 12. 1979

*Katedra matematiky*
*Elektrotechnickej fakulty SVŠT*
*Gottwaldovo nam. 19*
*812 19 Bratislava*