Mathematica Slovaca

Štefan Solčan

Über die Abhängigkeit der Buchsbaum Eigenschaft von der Charakteristik des Grundkörpers

Mathematica Slovaca, Vol. 31 (1981), No. 4, 437--444

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/136279

Math. Slovaca 31, 1981, No. 4, 437–444

ÜBER DIE ABHÄNGIGKEIT DER BUCHSBAUM EIGENSCHAFT VON DER CHARAKTERISTIK DES GRUNDKÖRPERS

ŠTEFAN SOLČAN

Das Ziel der Arbeit besteht darin, Beispiele zu konstruieren, die zeigen, dass die Buchsbaum Eigenschaft eines lokalen Ringes von der Charakteristik abhängt. Wir geben hierzu projektive Varietäten V über einem beliebigen Grundkörper K an, die durch quadratfreie Potenzproduktideale definiert sind. Wir untersuchen dann den lokalen Ring in der affinen Spitze über V. Indem wir ein Hauptergebnis von [6] benutzen, erhalten wir unsere obige Aussage. Erstmal zeigte nämlich Reisner im Jahre 1974, dass die Cohen—Macaulay Eigenschaft eines lokalen Ringes von der Charakteristik abhängt, obwohl bereits 1916 dieser Begriff von F. S. Macaulay [4] eingeführt worden ist.

An dieser Stelle möchte ich Herrn Prof. Dr. W. Vogel für die hilfreiche Anleitung und für die wertvollen Gespräche während der Durchführung dieser Arbeit danken.

Im folgenden stellen wir einige Begriffe fest. In dieser Arbeit wird man unter einem Ring A einen kommutativen noetherschen Ring mit Einselement verstehen. Mit $\dim(A)$ bezeichnen wir die Krull-Dimension von A und für ein Ideal $I \subset A$ mit $\dim(I)$ die Dimension des Ringes A/I, $\dim(I) = \dim(A/I)$. Einen lokalen Ring A mit dem (einzigen) maximalen Ideal M bezeichnen wir mit (A, M). $\mathrm{Spec}(A)$ bezeichne die Menge aller Primideale des Ringes A und $\mathrm{Ass}(I)$ die Menge aller Primideale, die zu einer Primärzerlegung von I gehören. Ein Ideal I ist ungemischt, wenn für jede Komponente Q einer Primärzerlegung von I gilt, dass $\dim(Q) = \dim(I)$. Ein M-primäres Ideal Q in einem d-dimensionalen lokalen Ring (A, M) nennen wir ein Parameterideal, wenn d Elemente $a_1, \ldots, a_d$ von A mit $Q = (a_1, \ldots, a_d)$ existieren.

Die Begriffe — Parametersysteme, Primsequenz, homologische Kodimension (depth) und (lokaler) Cohen—Macaulay Ring sind wohl bekannt, siehe z.B. [5].

Sei (A, M) ein lokaler Ring. Ein System von Elementen $a_1, \ldots, a_n$ von M heisst nach [11] schwache Primsequenz, wenn für jedes $i = 1, \ldots, n$ gilt

$$M \cdot ((a_1, \ldots, a_{i-1}) : (a_i)) \subseteq (a_1, \ldots, a_{i-1}).$$

(Für $i=1$ setzen wir $(a_1, \ldots, a_{i-1})=(0)\subset A$.)

Definition. (Siehe [11] oder [12].) *Einen d-dimensionalen lokalen noetherschen Ring (A, M) nennen wir einen Buchsbaum Ring, wenn jedes Parametersystem eine schwache Primsequenz ist.*

Weitere Charakterisierungen von Buchsbaum Ringen existieren (z.B. die Diferenz $l(A/Q)-e_0(Q, A)$ zwischen „dynamischer" und „statischer" Multiplizität von Parameteridealen Q in A ist eine Ringinvariante $I(A)$, die also unabhängig von Q ist), vgl. z.B. [11], Sätze 5 und 10, auch [12].

Wir werden im folgenden auch Ergebnisse für die Buchsbaum Ringe aus der lokalen Kohomologie benutzen, siehe z.B. [8]. Insbesondere benötigen wir ein Ergebnis für spezielle graduierte K-Algebren (siehe z.B. [10]).

Sei K ein Körper. Eine K-Algebra R heisst eine spezielle graduierte K-Algebra, wenn R eine nichtnegative graduierte K-Algebra (d.h. $R_i=0$ für alle $i<0$) vom endlichen Typ ist, und es gilt $R_0=K$.

Satz. Sei R eine spezielle graduierte K-Algebra. Wenn eine Zahl $t\in \mathbf{Z}$ existiert, so dass $(H^i_M(R))_n=0$ für alle graduierte Komponenten des Grades $n\neq t$ und $i=0, 1, \ldots, \dim(R)-1$, dann ist R ein Buchsbaum Ring.

Wir wollen den folgenden Satz beweisen.

Satz. *Sei*

$$\begin{aligned}I_S = {} & (X_0, X_2, X_3)\cap(X_0, X_2, X_4)\cap(X_0, X_3, X_5)\cap(X_0, X_4, X_6)\cap\\ & \cap(X_0, X_5, X_6)\cap(X_1, X_2, X_3)\cap(X_1, X_2, X_4)\cap(X_1, X_3, X_5)\cap\\ & \cap(X_1, X_4, X_6)\cap(X_1, X_5, X_6)\cap(X_2, X_3, X_6)\cap(X_2, X_4, X_5)\cap\\ & \cap(X_2, X_5, X_6)\cap(X_3, X_4, X_5)\cap(X_3, X_4, X_6),\end{aligned}$$

$I_S\subset K[X_0, \ldots, X_6]$ und $I'_S\subset K[X_7, \ldots, X_{13}]$ ein Ideal, das man aus I_S durch die Transformation $X_i\to X_{i+7}$ der Unbestimmten erhält. Sei $I_{DS}=(I_S, X_7, \ldots, X_{13})\cap(I'_S, X_0, \ldots, X_6)$ und

$$A_{DS}=K[X_0, \ldots, X_{13}]_{(X_0, \ldots, X_{13})}/I_{DS}\cdot K[X_0, \ldots, X_{13}]_{(X_0, \ldots, X_{13})}.$$

Dann gilt:

(a) *Für jede beliebige Charakteristik von K ist A_{DS} kein Cohen—Macaulay Ring.*

(b) *Wenn* $\mathrm{Char}(K)\neq 2$, *dann ist A_{DS} ein Buchsbaum Ring.*

(c) *Wenn* $\mathrm{Char}\,(K)=2$, *dann ist A_{DS} kein Buchsbaum Ring.*

Für den Beweis benötigen wir mehrere Hilfsätze, insbesondere die Ergebnisse von [6].

Hilfsatz 1. *Sei*

$$\begin{aligned}I_R = {} & (X_1, X_2, X_3)\cap(X_1, X_2, X_4)\cap(X_1, X_3, X_5)\cap(X_1, X_4, X_6)\cap\\ & \cap(X_1, X_5, X_6)\cap(X_2, X_3, X_6)\cap(X_2, X_4, X_5)\cap(X_2, X_5, X_6)\cap\\ & \cap(X_3, X_4, X_5)\cap(X_3, X_4, X_6),\end{aligned}$$

$I_R \subset K[X_1, \ldots, X_6]$ *und*

$$A_R = K[X_1, \ldots, X_6]_{(X_1, \ldots, X_6)} / I_R \cdot K[X_1, \ldots, X_6]_{(X_1, \ldots, X_6)}.$$

Dann gilt:
(a) *Wenn* $\mathrm{Char}(K) \neq 2$, *dann ist* A_R *ein Cohen—Macaulay Ring.*
(b) *Wenn* $\mathrm{Char}(K) = 2$, *dann ist* A_R *kein Cohen—Macaulay Ring.*

Erstmal wurde dieses Ergebnis von Reisner (mit der Hilfe der topologischen Eigenschaften simplizialer Komplexe, die assoziiert zu I_R sind) in [6] bewiesen. Für rein algebraische Beweise mit der Hilfe der Syzygientheorie oder Hilbertfunktion siehe [7], S. 252 oder [9], Beispiel 3.

Hilfsatz 2. *Sei* (A, M) *ein lokaler Ring mit* $\dim(A) \geqq 2$, *und* $(0) = I_1 \cap I_2$ *mit* $\mathrm{depth}(A/I_1) \geqq 1$, $\mathrm{depth}(A/I_2) \geqq 1$ *und* $(I_1, I_2) = M$. *Dann ist* $\mathrm{depth}(A) = 1$, *d.h. A ist kein Cohen—Macaulay Ring.*

Beweis:

Aus der folgenden exakten Sequenz

$$0 \to A \cong A/I_1 \cap I_2 \to A/I_1 \oplus A/I_2 \to A/(I_1, I_2) \cong K \to 0$$

bekommt man die lange homologische Sequenz

$$\ldots \to H_M^{i-1}(K) \to H_M^i(A) \to H_M^i(A/I_1) \oplus H_M^i(A/I_2) \to H_M^i(K) \to \ldots$$

mit $H_M^0(K) = K$, $H_M^0(A/I_1) = H_M^0(A/I_2) = 0$.

Daher ist auch $H_M^0(A) = 0$ und $H_M^1(A) \neq 0$, also

$$\mathrm{depth}(A) = 1 < \dim(A), \quad \text{q.e.d.}$$

Für ein Ideal I sei $\mathrm{Assh}(I) = \{P \in \mathrm{Ass}(I);\ \dim(P) = \dim(I)\}$ und für ein Primideal P das symbol $h(P)$ gezeichnet die Höhe von P.

Hilfsatz 3. *Sei* $a_1, \ldots, a_s$ *Teil eines Parametersystems in dem* d*-dimensionalen Buchsbaum Ring* (A, M). *Dann gilt* $h(P) = s$ *für alle* $P \in \mathrm{Assh}((a_1, \ldots, a_s))$.

Beweis. Wir benutzen Induktion nach s.

Für $s = 0$ ist $(a_1, \ldots, a_s) = : (0)$. Da für alle $P \in \mathrm{Assh}((0))$

$$\dim(P) = \dim((0)) = \dim(A/(0)) = \dim(A) = d$$

gilt, existieren Primideale $P_0, P_1, \ldots, P_d$, so dass

$$P = P_0 \subset P_1 \subset \ldots \subset P_d = M$$

gilt und damit $H(P) = 0$.

Sei nun der Hilfsatz für $s - 1$ bewiesen.

Sei $P \in \mathrm{Assh}((a_1, \ldots, a_s))$, dann existiert ein isoliertes Primideal $P' \in \mathrm{Ass}((a_1, \ldots, a_{s-1}))$, so dass $P' \subseteq P$. (Vgl. Satz 4.6 in [1].) Da A ein Buchsbaum Ring ist (siehe z.B. [11] oder [8]), die Menge aller isolierten Primideale aus

$\mathrm{Ass}((a_1, \ldots, a_{s-1}))$ ist gleich $\mathrm{Assh}((a_1, \ldots, a_{s-1}))$, also $P' \in \mathrm{Assh}((a_1, \ldots, a_{s-1}))$ und nach Induktion gilt $h(P') = s-1$. Infolge $a_s \notin P'$ ist $P' \subset P$, also $h(P) \geqq h(P')+1 = s-1+1 = s$. Für jeden Teil eines Parametersystems ist aber

$$\dim(A/(a_1, \ldots, a_s)) = d - s$$

(vgl. [13], Appendix 5, Lemma 4). Da stets

$$h(P) + \dim(A/P) \leqq \dim(A) = d$$

ist, folgt aus $h(P) \geqq s$ und $\dim(A/P) = d-s$, dass $h(P) = s$ ist, q.e.d.

Hilfsatz 4. *Wenn (A, M) ein Buchsbaum Ring ist, dann ist A_P ein Cohen—Macaulay Ring für alle $P \in \mathrm{Spec}(A)$, $P \neq M$.*

Beweis: Sei $P \in \mathrm{Spec}(A)$ ein beliebiges Primideal, $P \neq M$. Wir nehmen Elemente $a_1, \ldots, a_s$ aus P, die ein Teilparametersystem bilden und wobei s maximal ist. Dann ist P aus $\mathrm{Assh}((a_1, \ldots, a_s))$. Nach Hilfsatz 3 ist $h(P) = s$, also auch $\dim(A_P) = s$ und $(a_1, \ldots, a_s) \cdot A_P = (a_1 \cdot A_P, \ldots, a_s \cdot A_P)$ ist ein Parameterideal in A_P. Da A ein Buchsbaum Ring ist, bilden die Elemente $a_1, \ldots, a_s$ eine schwache Primsequenz, daher ist $(a_1, \ldots, a_{i-1})$ ungemischt bis auf eine M-primäre Komponente für jedes $i = 1, \ldots, s$. Nach der Lokalisierung in P ergibt sich $(a_1 \cdot A_P, \ldots, a_{i-1} \cdot A_P) : (a_i \cdot A_P) = (a_1 \cdot A_P, \ldots, a_{i-1} \cdot A_P)$ und damit existiert ein Parametersystem $a_1, \ldots, a_s$ in A_P, das eine Primsequenz in A_P bildet, also ist A_P ein Cohen—Macaulay Ring, q.e.d.

Korollar. *Sei (A, M) ein lokaler Ring. Wenn ein $P_0 \in \mathrm{Spec}(A)$, $P_0 \neq M$ existiert, so dass A_{P_0} kein Cohen—Macaulay Ring ist, dann ist A kein Buchsbaum Ring.*

Hilfsatz 5. *Sei $R = K[X_0, \ldots, X_n]_{(X_0, \ldots, X_n)}$, wo K ein beliebiger Körper ist und $A = R/I \cdot R$, wo $I \subset K[X_0, \ldots, X_n]$ ein ungemischtes quadratfreies Potenzproduktideal ist. Wenn A_P ein Cohen—Macaulay Ring für alle $P \in \mathrm{Spec}(A)$, $P \neq (X_0, \ldots, X_n)$ ist, dann ist A ein Buchsbaum Ring.*

Beweis: Nach Lemma 10 in [6] oder auch [3] Satz 0.1, bzw. Satz 3.8 gilt für jede Charakteristik $(H^i_M(A))_t = 0$, wenn $t > 0$ oder $t < 0$ und $i = 0, 1, \ldots, \dim(A) - 1$. Hieraus folgt dann (z.B. nach [10]), dass A ein Buchsbaum Ring ist, q.e.d.

Im folgenden das Symbol $\hat{X}_i$ in $(X_0, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, X_n)$ oder in $K[X_0, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, X_n]$ meint, dass X_i ausgelassen ist. Sei I ein quadratfreies Potenzproduktideal. Dann hat I eine Primärzerlegung von Primidealen $I = \bigcap_{j=1}^{s} P_j$, $\{P_1, \ldots, P_s\} = \mathrm{Ass}(I)$, siehe dazu z.B. [7]. Wir bezeichnen mit $I^{(i)}$ den Durchschnitt von allen Primidealen $P \in \mathrm{Ass}(I)$ mit $P \not\ni X_i$.

Hilfsatz 6. *Sei K ein Körper und*

$$A = K[X_0, \ldots, X_n]_{(X_0, \ldots, X_n)} / I \cdot K[X_0, \ldots, X_n)_{(X_0, \ldots, X_n)},$$

wo $I \subset K[X_0, \ldots, X_n]$ *ein quadratfreies Potenzproduktideal ist. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

(a) A_P *ist ein Cohen—Macaulay Ring für alle* $P \in \mathrm{Spec}(A)$, $P \neq (X_0, \ldots, X_n)$.

(b) $A_{(X_0, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, X_n)}$ *ist ein Cohen—Macaulay Ring für alle* $i = 0, 1, \ldots, n$.

Beweis. Sei $S = K[X_0, \ldots, X_n]/I$, dann $A \cong S_{(X_0, \ldots, X_n)}$. Nach Lemma 3 in [6] gilt: $S/(X_i - 1) \cdot S \cong K[X_0, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, X_n]/I^{(i)}$ für jedes $i = 0, 1, \ldots, n$. Hieraus folgt

$$\begin{aligned} A/(X_i - 1) \cdot A &\cong (S/(X_i - 1) \cdot S)_{(X_0, \ldots, X_n)} \cong \\ &\cong (K[X_0, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, X_n]/I^{(i)})_{(X_0, \ldots, X_n)} \cong \\ &\cong (K[X_0, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, X_n]/I^{(i)})_{(X_0, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, X_n)} \cong \\ &\cong (K[X_0, \ldots, X_n]/I)_{(X_0, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, X_n)} \cong \\ &\cong S_{(X_0, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, X_n)} \cong A_{(X_0, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, X_n)}. \end{aligned}$$

Nach Lemma 5 in [6] ist A_P ein Cohen—Macaulay Ring für alle $P \in \mathrm{Spec}(A)$, $P \neq (X_0, \ldots, X_n)$, genau dann, wenn $A/(X_i - 1) \cdot A$ ein Cohen—Macaulay Ring ist (für jedes $i = 0, 1, \ldots, n$). Durch $A/(X_i - 1) \cdot A \cong A_{(X_0, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, X_n)}$ ist der Hilfsatz bewiesen.

Korollar. *Sei* A_R *der Ring, der im* Hilfsatz 1 *definiert worden ist. Dann ist* A_R *ein Buchsbaum Ring (für jede Charakteristik).*

Beweis. Wir werden die Ideale $I_R^{(i)}$ für $i = 1, 2, \ldots, 6$ untersuchen.

$$\begin{aligned} I_R^{(1)} = (X_2, X_3, X_6) \cap (X_2, X_4, X_5) \cap (X_2, X_5, X_6) \cap \\ \cap (X_3, X_4, X_5) \cap (X_3, X_4, X_6) \end{aligned}$$

Mit der Methode des Hilfsatzes 2 kann man in zwei Schritten sehen, dass $I_R^{(1)}$ perfekt ist, also

$$(K[X_2, \ldots, X_6]/I_R^{(1)})_{(X_2, \ldots, X_6)} \cong (A_R)_{(\hat{X}_1, X_2, \ldots, X_6)}$$

ist ein Cohen—Macaulay Ring. Da man $I_R^{(i)}$ aus $I_R^{(1)}$ für $i = 2, 3, 4, 5, 6$ mit der Hilfe der Permutation der Unbestimmten, z.B. $I_R^{(2)}$ aus $I_R^{(1)}$ mit

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix},$$

erhält, ist klar, dass

$$K[\hat{X}_1, X_2, \ldots, X_6]/I^{(1)} \cong K[X_1, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, X_6]/I^{(i)}$$

für alle $i = 2, 3, 4, 5, 6$. Aus

$$(A_R)_{(\hat{X}_1, X_2, \ldots, X_6)} \cong (A_r)_{(X_1, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, X_6)}$$

für $i = 2, 3, 4, 5, 6$ und Hilfsatz 5 folgt, dass A_R ein Buchsbaum Ring ist, q.e.d.

Hilfsatz 7. *Sei* $I_S \subset K[X_0, X_1, \ldots, X_6]$ *das in dem Satz definierte Ideal und*

$$A_S = K[X_0, \ldots, X_6]_{(X_0, \ldots, X_6)}/I_S \cdot K[X_0, \ldots, X_6]_{(X_0, \ldots, X_6)}.$$

Dann gilt
(a) *für* Char$(K) \neq 2$ *ist* A_S *ein Buchsbaum Ring*
(b) *für* Char$(K) = 2$ *ist* A_S *kein Buchsbaum Ring.*

Beweis: Wir werden die Lokalisierungen in $(X_0, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, X_n)$ untersuchen. Sei A_R der Ring, der im Hilfsatz 1 definiert worden ist. Dann kann man leicht sehen, dass die Isomorphismen

$$(A_S)_{(\hat{x}_0, x_1, \ldots, x_6)} \cong (A_S)_{(x_0, \hat{x}_1, x_2, \ldots, x_6)} \cong A_R$$

gelten. Die Ideale $I_S^{(i)}$ für $i = 3, 4, 5, 6$ kann man aus dem Ideal $I_S^{(2)}$ durch Permutation der Unbestimmten, z.B. $I_S^{(3)}$ aus $I_S^{(2)}$ durch

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 5 & 4 & 6 \end{pmatrix},$$

bekommen. Also ist auch

$$(A_S)_{(x_0, x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_6)} \cong (A_S)_{(x_0, x_1, \ldots, \hat{x}_j, \ldots, x_6)}$$

für alle $i, j = 2, 3, 4, 5, 6$. Daher genügt es, für ein i die Untersuchungen durchzuführen, z.B. für $i = 2$.

Dann ist $I_S^{(2)} = J_1 \cap J_2$,

$$J_1 = (X_1, X_5, X_6) \cap (X_1, X_3, X_5) \cap (X_0, X_5, X_6) \cap (X_0, X_3, X_5)$$
$$J_2 = (X_1, X_4, X_6) \cap (X_3, X_4, X_5) \cap (X_3, X_4, X_6) \cap (X_0, X_4, X_6)$$

und

$$(J_1, J_2) = (X_4, X_5, X_0X_1, X_3X_6).$$

Mit der Methode des Hilfsatzes 2 kann man leicht berechnen, dass A_S/J_1 und A_S/J_2 Cohen—Macaulay Ringe mit depth 3 sind und $A_S/(J_1, J_2)$ ist ein Cohen—Macaulay Ring mit depth 2. Dann ist auch $A_S/J_1 \cap J_2 = A_S/I_S^{(2)}$ ein Cohen—Macaulay Ring mit $\dim(A_S/I_S^{(2)}) = \text{depth}(A_S/I_S^{(2)}) = 3$. Da für Char$(K) \neq 2$ A_R ein Cohen—Macaulay Ring ist, gilt bei Char$(K) \neq 2$, dass $(A_S)_{(x_0, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_6)}$ ein Cohen—Macaulay Ring für alle $i = 0, 1, \ldots, 6$ ist. Aus den Hilfsätzen 6 und 5 folgt, dass A_S ein Buchsbaum Ring ist.

Da für Char$(K) = 2$

$$A_R \cong (A_S)_{(\hat{x}_0, x_1, \ldots, x_6)} \cong (A_S)_{(x_0, \hat{x}_1, x_2, \ldots, x_6)}$$

kein Cohen—Macaulay Ring ist, ergibt die Folgerung des Hilfsatzes 4, dass A_S kein Buchsbaum Ring ist, q.e.d.

Hilfsatz 8. *Sei* A_S *der im* Hilfsatz 7 *definierte Ring. Dann ist für* Char$(K) \neq 2$ A_S *ein Cohen—Macaulay Ring.*

Das Ergebnis des Hilfsatzes 8 wurde mit der Hilfe der Syzygientheorie (siehe [7]) oder Hilbertfunktion (siehe [9]) auch von M. Helweg in [2] bewiesen. Über die Anwendungen dieser Methode in A_R bzw. I_R siehe auch [14].

Wir können jetzt unseren Satz beweisen.

Beweis des Satzes.

(a) Mit der Hilfe der Methoden des Hilfsatzes 2 kann man berechnen, dass für jede Charakteristik depth $(A_S) \geqq 1$ ist. Sei $(I_S, X_7, \ldots, X_{13}) = I_1$ und $(I'_S, X_0, \ldots, X_6) = I_2$, dann gilt für $A_{DS}/I_1 \cong A_S \cong A_{DS}/I_2$, dass depth $(A_{DS}/I_1) \geqq 1$ und depth $(A_{DS}/I_2) \geqq 1$. Infolge von $(I_1, I_2) = (X_0, X_1, \ldots, X_{13})$ ist dann nach Hilfsatz 2 A_{DS} kein Cohen—Macaulay Ring.

Für den Beweis von (b) und (c) wollen wir zunächst bemerken, dass folgende Isomorphismen gelten:

$$(A_{DS})_{(X_0, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, X_{13})} \cong (A_S)_{(X_0, \ldots, \hat{X}_j, \ldots, X_6)} \cong A_R$$

für $i = 0, 1, 7, 8$ und $j \equiv i (\mathrm{mod}\ 7)$. Für $i = 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 11, 12, 13$ gilt

$$(A_{DS})_{(X_0, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, X_{13})} \cong (A_S)_{(X_0, \ldots, \hat{X}_j, \ldots, X_6)},$$

wo $j \equiv i (\mathrm{mod}\ 7)$. Diese Isomorphismen folgen leicht aus dem Beweis von Hilfsatz 6.

Für Char$(K) \neq 2$ gilt: $(A_{DS})_{(X_0, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, X_{13})}$ ist ein Cohen—Macaulay Ring für alle $i = 0, 1, 2, \ldots, 13$, also nach den Hilfsätze 5 und 6 ist dann A_{DS} ein Buchsbaum Ring.

Wenn Char$(K) = 2$ ist, dann ist für $i = 0, 1, 7, 8$ $(A_{DS})_{(X_0, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, X_{13})}$ kein Cohen—Macaulay Ring, also nach dem Korollar des Hilfsatzes 4 ist A_{DS} kein Buchsbaum Ring. Damit ist der Satz bewiesen.

Bemerkung: Man setze

$$I_{DR} = (I_R, X_7, \ldots, X_{12}) \cap (I'_R, X_1, \ldots, X_6), \quad I_{DR} \subset K[X_1, \ldots, X_{12}],$$

mit $I'_R \subset K[X_7, \ldots, X_{12}]$, das man aus I_R durch $X_i \to X_{i+6}$ erhält. Dann ist der Ring

$$A_{DR} = K[X_1, \ldots, X_{12}]_{(X_1, \ldots, X_{12})} / I_{DR} \cdot K[X_1, \ldots, X_{12}]_{(X_1, \ldots, X_{12})}$$

nach dem Hilfsatz 2 kein Cohen—Macaulay Ring für jede Charakteristik von K. Auch hier gelten die Isomorphismen

$$(A_{DR})_{(X_1, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, X_{12})} \cong (A_R)_{(X_1, \ldots, \hat{X}_j, \ldots, X_6)}$$

für alle $i = 1, \ldots, 12$ und $j = 1, \ldots, 6$ mit $j \equiv i (\mathrm{mod}\ 6)$. Daher ist dann A_{DR} nach dem Korollar von Hilfsatz 6 ein Buchsbaum Ring für jede Charakteristik.

LITERATUR

[1] ATIYAH, M. F.—MACDONALD, I. G.: Introduction to Commutative Algebra. Addison-Wesley, London 1969. First ed.

[2] HELWEG, M.: Idealtheoretische Betrachtungen zur Perfektheit bei Charakteristik 0 und 2. Diplomarbeit, Pädagogische Hochschule „Karl Liebknecht“ Potsdam, Sektion Math./Phys., 1977.

[3] HOCHSTER, M.—ROBERTS, J. L.: The Purity of the Frobenius and Local Cohomology. Advances in Mathematics 21, 1976, 117—172.
[4] MACAULAY, F. F.: The Algebraic Theory of Modular Systems. Cambridge Univ. Press 1916.
[5] MATSUMURA, H.: Commutative Algebra. Benjamin, New York 1970.
[6] REISNER, G. A.: Cohen—Macaulay Quotients of Polynomial Rings. Advances in Mathematics 21, 1976, 30—49.
[7] RENSCHUCH, B.: Elementare und praktische Idealtheorie. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin, 1976.
[8] RENSCHUCH, B., STÜCKRAD, J. und VOGEL, W.: Weitere Bemerkungen zu einem Problem der Schnittheorie und über ein Mass von A. Seidenberg für die Imperfektheit. Journal of Algebra 37, 1975, 447—471.
[9] RENSCHUCH, B. und VOGEL, W.: Zum Nachweis arithmetischer Cohen—Macaulay Varietäten. Monatshefte für Mathematik 85, 1978, 201—210.
[10] SCHENZEL, P.: Applications of Dualizing Complexes to Buchsbaum Rings. Preprint.
[11] STÜCKRAD, J. und VOGEL, W.: Eine Verallgemeinerung der Cohen—Macaulay Ringe und Anwendungen auf ein Problem der Multiplizitätstheorie. J. Math. Kyoto Univ. 13, 1973, 513—528.
[12] STÜCKRAD, J. und VOGEL, W.: Toward a Theory of Buchsbaum Singularities. Amer. J. Math. 100, 1978, 4, 727—746.
[13] ZARISSKI, O.—SAMUEL, P.: Commutative Algebra I and II. D. V. Nostrad Comp. Princeton 1960 and 1962.
[14] RENSCHUCH, B.: Zur Abhängigkeit der Perfektheit von der Charakteristik. Math. Nachr. 83, 1978, 301—303.

Eingegangen am 27. 3. 1979

Katedra geometrie MFF UK
Matematický pavilón
Mlynská dolina
816 31 Bratislava

О ЗАВИСИМОСТИ БУХСБАУМОГО СВОЙСТВА ОТ ХАРАКТЕРИСТИКИ ОСНОВНОГО ПОЛЯ

Штефан Солчан

Резюме

Пусть V-проективное многообразие над любым полем K, определенное идеалом, базис которого состоит из неквадратичных мономов (см. [3], [6]). Пусть A-локальное кольцо вершины афинного конуса над V. Г.А. Раизнер в [6] показал, что свойство Коена–Маколея кольца A (см.[4]) зависит от характеристики поля K. В работе показывается, что и свойство Бухсбаума кольца A (см.[11]) зависит от характеристики поля K. Вводится практический метод для определения свойства Бухсбаума кольца A а также несколько примеров.