Math. Slovaca 31, 1981, No. 2, 121—131

НЕКОТОРЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

ПАВЕЛ ГАЛАЙДА

В работе [17] была дана теория построения вещественных транспарентных номограмм смешанным бесквадратурно-дифференциальным методом для системы уравнений, связывающих 8 переменных.

В настоящей работе показано, что к решению функционального уравнения (1.4) работы [17] можно применить и метод только дифференциального исчисления (а не смешанный бесквадратурный).

§1. Для этого вводя обычные дифференциалы d_{12} и d_{34}, означающие дифференциалы по совокупности переменных z_1, z_2 и z_3, z_4, мы получили бы из (1.4) работы [17]

$$d_{12}d_{34}(\Phi f_{1234} - \bar{\Phi}\bar{f}_{1234}) = 0 \tag{1.1}$$

или

$$d_{12}d_{34}\Phi f_{1234} - d_{12}d_{34}\bar{\Phi}\bar{f}_{1234} = 0 \tag{1.2}$$

Производя действия, опуская индексы 1, 2, 3, 4 при f найдем, что

$$\begin{aligned} d_{12}d_{34}\Phi f_{1234} = {} & \Phi^{\mathrm{IV}} f \left(\frac{\partial f}{\partial z_1}\frac{\partial f}{\partial z_2}\frac{\partial f}{\partial z_4}\right) + \\ & \Phi^{\mathrm{III}} f \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z_1 \partial z_2}\frac{\partial f}{\partial z_3}\frac{\partial f}{\partial z_4} + \frac{\partial^2 f}{\partial z_1 \partial z_3}\frac{\partial f}{\partial z_2}\frac{\partial f}{\partial z_4} + \frac{\partial^2 f}{\partial z_1 \partial z_4}\frac{\partial f}{\partial z_2}\frac{\partial f}{\partial z_3} + \right. \\ & \left. \frac{\partial^2 f}{\partial z_2 \partial z_3}\frac{\partial f}{\partial z_1}\frac{\partial f}{\partial z_4} + \frac{\partial^2 f}{\partial z_2 \partial z_4}\frac{\partial f}{\partial z_1}\frac{\partial f}{\partial z_3} + \frac{\partial^2 f}{\partial z_3 \partial z_4}\frac{\partial f}{\partial z_1}\frac{\partial f}{\partial z_2}\right) + \\ & + \Phi^{\mathrm{II}} f \left(\frac{\partial^3 f}{\partial z_1 \partial z_2 \partial z_3}\frac{\partial f}{\partial z_4} + \frac{\partial^3 f}{\partial z_1 \partial z_2 \partial z_4}\frac{\partial f}{\partial z_3} + \frac{\partial^3 f}{\partial z_1 \partial z_3 \partial z_4}\frac{\partial f}{\partial z_2} + \right. \\ & + \frac{\partial^3 f}{\partial z_2 \partial z_3 \partial z_4}\frac{\partial f}{\partial z_1} + \frac{\partial^2 f}{\partial z_1 \partial z_2}\frac{\partial^2 f}{\partial z_3 \partial z_4} + \frac{\partial^2 f}{\partial z_1 \partial z_3}\frac{\partial^2 f}{\partial z_2 \partial z_4} + \\ & \left. + \frac{\partial^2 f}{\partial z_2 \partial z_3}\frac{\partial^2 f}{\partial z_1 \partial z_4}\right) + \Phi^{\mathrm{I}} f \left(\frac{\partial^4 f}{\partial z_1 \partial z_2 \partial z_3 \partial z_4}\right) \end{aligned} \tag{1.3}$$

и совершенно аналогичное выражение для $d_{12}d_{34}\bar{\Phi}\bar{f}$.

Получаем все же функциональное дифференциальное уравнение четвертого порядка с двумя неизвестными функциями Φ и $\bar{\Phi}$ одной переменной.

При решении такого уравнения можно, помимо метода интегральных преобразований, применить и такой. Делаем замену независимых переменных z_1, z_2, z_3, z_4 переменными x, y, z, t с помощью формул

$$x=f,\quad y=\bar{f},\quad z=z_3,\quad t=z_4. \tag{1.4}$$

Преобразованное уравнение (1.2), сохраняя линейность, примет вид

$$\begin{gathered} A\Phi^{\mathrm{IV}}(x)+B\Phi^{\mathrm{III}}(x)+C\Phi^{\mathrm{II}}(x)+D\Phi^{\mathrm{I}}(x)- \\ -\bar{A}\bar{\Phi}^{\mathrm{IV}}(y)+\bar{B}\bar{\Phi}^{\mathrm{IV}}(y)+\bar{C}\bar{\Phi}^{\mathrm{II}}(y)+\bar{D}\bar{\Phi}^{\mathrm{I}}(y)=0, \end{gathered} \tag{1.5}$$

где A, B, C, D, $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$, $\bar{D}$ — определенные известные функции новых независимых переменных x, y, z, t.

Деля обе части на $\bar{D}$ и вслед за этим дифференцируя по x (либо на D и дифференцируя по y), затем деля обе части на

$$\left(\frac{\bar{C}}{\bar{D}}\right)$$

и вслед за этим дифференцируя по x, т.е. применяя метод, использованный И.А. Вильнером при решении подобных дифференциально-функциональных уравнений, мы получим линейное уравнение 8-го порядка относительно $\Phi(x)$ (соответственно относительно $\Phi(y)$).

Отношение его 7 коэффициентов к восьмому не должно зависеть от y, что и дает необходимые условия разрешимости.

Решая уравнение, находим функцию $\Phi(x)$. Зная $\Phi(x)$, из (1.5) одной интеграцией находим $\Phi(y)$. Можно поступать и проще. В (1.5) даем y четыре значения: (y_1; y_2; y_3; y_4). Получаем систему четырех уравнений с четырьмя неизвестными $\Phi^{\mathrm{I}}(x)$, $\Phi^{\mathrm{II}}(x)$, $\Phi^{\mathrm{III}}(x)$, $\Phi^{\mathrm{IV}}(x)$. Произвольные значения (y_1; y_2; y_3; y_4) подчинены лишь ограничению: «вронскиан» функций A, B, C, D не должен тождественно равняться нулю. На $\Phi^{\mathrm{I}}(y_i)$, $\Phi^{\mathrm{II}}(y_i)$, $\Phi^{\mathrm{III}}(y_i)$, $\Phi^{\mathrm{IV}}(y_i)$, $i=1$, 2, 3, 4 смотрим как на 16 произвольных постоянных.

Решая получившуюся систему линейных алгебраических уравнений, находим $\Phi^{\mathrm{I}}(x)$, $\Phi^{\mathrm{II}}(x)$, $\Phi^{\mathrm{III}}(x)$, $\Phi^{\mathrm{IV}}(x)$.

Требование

$$\Phi^{\mathrm{II}}(x)=[\Phi^{\mathrm{I}}(x)]^{\mathrm{I}},\quad \Phi^{\mathrm{III}}(x)=[\Phi^{\mathrm{II}}(x)]^{\mathrm{I}},\quad \Phi^{\mathrm{IV}}(x)=[\Phi^{\mathrm{III}}(x)]^{\mathrm{I}} \tag{1.6}$$

дает условия разрешимости задачи. Мы не будем здесь осуществлять эти различные подходы, тем более, что они по существу не свободны от применения идей бесквадратурного решения функциональных уравнений номографии, примененного И.А. Вильнером в ряде работ; оставляя их читателю.

§2. Замечательное простое решение общей задачи

$$(2.1)\qquad F_{12345678}=0,\quad \bar F_{12345678}=0,\quad z_7=f_{123456},\quad z_8=\bar f_{123456}$$

мы получаем при помощи принципа И.А. Вильнера – принципа игнорирования критериев. Дадим это решение, заодно выводя функциональное уравнение общей задачи анаморфозы системы (2.1).

Пусть Φ – функция двух переменных. Тогда при помощи (2.1) получим

$$(2.1')\qquad \bar\Phi(z_7\,;\,z_8)=\bar\Phi(f_{123456}\,;\,\bar f_{123456}).$$

Для положительной разрешимости задачи необходимо и достаточно, чтобы

$$(2.2)\qquad \bar\Phi(f_{123456}\,;\,\bar f_{123456})\equiv A_{34}-A_{12}+A_{56}.$$

Нам удобно пока для краткости обозначить

$$(2.3)\qquad A_{78}=\bar\Phi(z_7\,;\,z_8)=\bar\Phi(f_{123456}\,;\,\bar f_{123456})\equiv\bar\Phi_{123456}.$$

Ниже нам придется рассматривать и производные от $\bar\Phi$ по первому или второму функциональному аргументу, мы их для краткости также иногда будем обозначать так.

Уравнение (2.2) примет вид

$$(2.4)\qquad \begin{gathered}\bar\Phi_{123456}\equiv A_{34}-A_{12}+A_{56}.\\ A_{78}=A_{34}-A_{12}+A_{56},\quad A_{12}-A_{34}=A_{56}-A_{78}.\end{gathered}$$

Отсюда

$$(2.5)\qquad \bar\Phi_{1^12^13^14^15^16^1}\equiv A_{3^14^1}-A_{1^12^1}+A_{5^16^1}.$$

Из (2.4) получаем

$$(2.6)\qquad \begin{aligned}\bar\Phi_{1^12^13456}&=A_{34}-A_{1^12^1}+A_{56},\\ \bar\Phi_{123^14^156}&=A_{3^14^1}-A_{12}+A_{56},\\ \bar\Phi_{12345^16^1}&=A_{34}-A_{12}+A_{5^16^1}\end{aligned}$$

$$(2.7)\qquad \begin{aligned}\bar\Phi_{123^14^15^16^1}&=A_{3^14^1}-A_{12}+A_{5^16^1},\\ \bar\Phi_{1^12^1345^16^1}&=A_{34}-A_{1^12^1}+A_{5^16^1},\\ \bar\Phi_{1^12^13^14^156}&=A_{3^14^1}-A_{1^12^1}+A_{56}.\end{aligned}$$

Из первых уравнений (2.4), (2.6) вычитанием найдем

$$(2.8)\qquad \begin{aligned}A_{12}-A_{1^12^1}&=\bar\Phi_{1^12^13456}-\bar\Phi_{123456},\\ A_{34}-A_{3^14^1}&=\bar\Phi_{123456}-\bar\Phi_{123^14^156},\\ A_{56}-A_{5^16^1}&=\bar\Phi_{123456}-\bar\Phi_{12345^16^1}.\end{aligned}$$

Отсюда в силу (2.5)

$$(2.9)\qquad \begin{aligned} A_{34}-A_{12}+A_{56} &= \bar{\Phi}_{123456}-\bar{\Phi}_{123^14^156}+\bar{\Phi}_{123456}-\\ &-\bar{\Phi}_{1^12^13456}+\bar{\Phi}_{123456}-\bar{\Phi}_{12345^16^1}+A_{3^14^1}-A_{1^12^1}+A_{5^16^1}=\\ &=3\bar{\Phi}_{123456}-\bar{\Phi}_{123^14^156}-\bar{\Phi}_{1^12^13456}-\bar{\Phi}_{12345^16^1}+\bar{\Phi}_{1^12^13^14^15^16^1}\end{aligned}$$

или, принимая во внимание (2.4), получим функциональное уравнение

$$(2.10)\qquad \bar{\Phi}_{1^12^13^14^15^16^1}-\bar{\Phi}_{123^14^156}-\bar{\Phi}_{1^12^13456}-\bar{\Phi}_{12345^16^1}=-2\bar{\Phi}_{123456}$$

Хотя отсюда, переменив местами штрихованные и нештрихованные аргументы, легко сразу получить взаимное функциональное уравнение

$$(2.11)\qquad \bar{\Phi}_{123456}-\bar{\Phi}_{1^12^1345^16^1}-\bar{\Phi}_{123^14^15^16^1}-\bar{\Phi}_{1^12^13^14^156}=-2\bar{\Phi}_{1^12^13^14^15^16^1}$$

но мы его получим независимо при помощи уравнений (2.5), (2.7) опять-таки вычитанием. Мы находим

$$(2.12)\qquad \begin{aligned} A_{12}-A_{1^12^1} &= \bar{\Phi}_{1^12^13^14^15^16^1}-\bar{\Phi}_{123^14^15^16^1},\\ A_{34}-A_{3^14^1} &= \bar{\Phi}_{1^12^1345^16^1}-\bar{\Phi}_{1^12^13^14^15^16^1},\\ A_{56}-A_{5^16^1} &= \bar{\Phi}_{1^12^13^14^156}-\bar{\Phi}_{1^12^13^14^15^16^1},\\ A_{12} &= \bar{\Phi}_{1^12^13^14^15^16^1}-\bar{\Phi}_{123^14^15^16^1}+A_{1^12^1},\\ A_{34} &= \bar{\Phi}_{1^12^1345^16^1}-\bar{\Phi}_{1^12^13^14^15^16^1}+A_{3^14^1}\\ A_{56} &= \bar{\Phi}_{1^12^13^14^156}-\bar{\Phi}_{1^12^13^14^15^16^1}+A_{5^16^1},\end{aligned}$$

откуда в силу (2.5)

$$(2.13)\qquad \begin{aligned} A_{34}-A_{12}+A_{56} &= \bar{\Phi}_{1^12^1345^16^1}-\bar{\Phi}_{1^12^13^14^15^16^1}+\bar{\Phi}_{123^14^15^16^1}-\\ &-\bar{\Phi}_{1^12^13^14^15^16^1}+\bar{\Phi}_{1^12^13^14^156}-\bar{\Phi}_{1^12^13^14^15^16^1}+A_{3^14^1}-A_{1^12^1}+A_{5^16^1}=\\ &=\bar{\Phi}_{1^12^1345^16^1}+\bar{\Phi}_{123^14^15^16^1}+\bar{\Phi}_{1^12^13^14^156}-2\bar{\Phi}_{1^12^13^14^15^16^1}\end{aligned}$$

Или, принимая во внимание (2.4), получим

$$\bar{\Phi}_{123456}-\bar{\Phi}_{1^12^1345^16^1}-\bar{\Phi}_{123^14^15^16^1}-\bar{\Phi}_{1^12^13^14^156}=-2\bar{\Phi}_{1^12^13^14^15^16^1}$$

т.е. функциональное уравнение (2.11).

Пусть теперь, в частности,

$$(2.14)\qquad \bar{\Phi}_{123456}=\bar{\Phi}(f_{123456};\bar{f}_{123456})=\Phi f_{123456}-\bar{\Phi}\bar{f}_{123456},$$

где Φ и $\bar{\Phi}$ – функции одной переменной. Функциональные уравнения (2.10), (2.11) примут соответственно вид

$$(2.10')\qquad \begin{aligned} &\Phi f_{1^12^13^14^15^16^1}-\bar{\Phi}\bar{f}_{1^12^13^14^15^16^1}-\Phi f_{123^14^156}+\bar{\Phi}\bar{f}_{123^14^156}-\\ &-\Phi f_{1^12^13456}+\bar{\Phi}\bar{f}_{1^12^13456}-\Phi f_{12345^16^1}+\bar{\Phi}\bar{f}_{12345^16^1}=\\ &=-2\Phi f_{123456}+2\bar{\Phi}\bar{f}_{123456},\end{aligned}$$

$$(2.11')\qquad \begin{aligned} &\Phi f_{123456}-\bar{\Phi}\bar{f}_{123456}-\Phi f_{1^12^1345^16^1}+\bar{\Phi}\bar{f}_{1^12^1345^16^1}-\\ &-\Phi f_{123^14^15^16^1}+\bar{\Phi}\bar{f}_{123^14^15^16^1}-\Phi f_{1^12^13^14^156}+\bar{\Phi}\bar{f}_{1^12^13^14^156}=\\ &=-2\Phi f_{1^12^13^14^15^16^1}+2\bar{\Phi}\bar{f}_{1^12^13^14^15^16^1}.\end{aligned}$$

Рассмотрим тот частный случай, когда переменные z_5 и z_6 не входят. Тогда уравнения (2.10), (2.11) примут соответственно вид:

$$\bar{\Phi}_{1^1 2^1 3^1 4^1} - \bar{\Phi}_{123^1 4^1} - \bar{\Phi}_{1^1 2^1 34} = -\bar{\Phi}_{1234}, \tag{2.10''}$$

$$\bar{\Phi}_{1234} - \bar{\Phi}_{1^1 2^1 34} - \bar{\Phi}_{123^1 4^1} = -\bar{\Phi}_{1^1 2^1 3^1 4^1}. \tag{2.11''}$$

В силу четырех последних формул (2.12), получим

$$A_{56} = A_{5^1 6^1}. \tag{2.15}$$

Т.к. постоянные $A_{1^1 2^1}$, $A_{3^1 4^1}$, $A_{5^1 6^1}$ связаны одним соотношением (2.5), то можно принять, что

$$A_{56} = A_{5^1 6^1} = 0. \tag{2.16}$$

Последнее из соотношений (2.4) примет вид

$$A_{12} - A_{34} = 0 - A_{78}. \tag{2.17}$$

С присоединением другого соотношения такого же вида, получим номограмму, где одно из полей в одной из двух плоскостей превратится в фиксированную точку.

Функциональное уравнение (2.10″) или (2.11″) является уравнением соответствующей анаморфозы.

Уравнения (2.10′), (2.11′) определяют анаморфозу, усматриваемую из трех последних уравнений (2.12),

$$\begin{aligned}
A_{78} &= \Phi(z_7) - \bar{\Phi}(z_8)\\
A_{56} &= \Phi f_{1^1 2^1 3^1 4^1 56} - \bar{\Phi}\bar{f}_{1^1 2^1 3^1 4^1 56} - \Phi f_{1^1 2^1 3^1 4^1 5^1 6^1} + \bar{\Phi}\bar{f}_{1^1 2^1 3^1 4^1 5^1 6^1} + A_{5^1 6^1}\\
A_{34} &= \Phi f_{1^1 2^1 3^1 4^1 5^1 6^1} - \bar{\Phi}\bar{f}_{1^1 2^1 345^1 6^1} - \Phi f_{1^1 2^1 3^1 4^1 5^1 6^1} + \bar{\Phi}\bar{f}_{1^1 2^1 3^1 4^1 5^1 6^1} + A_{3^1 4^1}\\
A_{12} &= \Phi f_{1^1 2^1 3^1 4^1 5^1 6^1} - \bar{\Phi}\bar{f}_{1^1 2^1 3^1 4^1 5^1 6^1} - \Phi f_{123^1 4^1 5^1 6^1} + \bar{\Phi}\bar{f}_{123^1 4^1 5^1 6^1} + A_{1^1 2^1}.
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Номограмма (2.18) от общего случая (2.12) отличается лишь полем (z_7, z_8). Поэтому мы не будем выделять этот случай из общего.

Рассмотрим однако тот подслучай (2.10′), (2.11′), когда отсутствуют переменные z_5 и z_6.

Тогда (2.10′) перепишется так:

$$\begin{aligned}
&\Phi f_{1^1 2^1 3^1 4^1} - \bar{\Phi}\bar{f}_{1^1 2^1 3^1 4^1} - \Phi f_{123^1 4^1} + \bar{\Phi}\bar{f}_{123^1 4^1} - \Phi f_{1^1 2^1 34} + \bar{\Phi}\bar{f}_{1^1 2^1 34} -\\
&\quad - \Phi f_{1234} + \bar{\Phi}\bar{f}_{1234} = -2\Phi f_{1234} + 2\bar{\Phi}\bar{f}_{1234}
\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}
&\Phi f_{1^1 2^1 3^1 4^1} - \bar{\Phi}\bar{f}_{1^1 2^1 3^1 4^1} - \Phi f_{123^1 4^1} + \bar{\Phi}\bar{f}_{123^1 4^1} -\\
&\quad - \Phi f_{1^1 2^1 34} + \bar{\Phi}\bar{f}_{1^1 2^1 34} + \Phi f_{1234} - \bar{\Phi}\bar{f}_{1234} = 0
\end{aligned}$$

т.е. мы получим уравнения (1.5) работы [17].

Аналогично (2.11′) перепишется так:

$$\Phi f_{1234} - \bar{\Phi}\bar{f}_{1234} - \Phi f_{1^1 2^1 34} + \bar{\Phi}\bar{f}_{1^1 2^1 34} - \Phi f_{123^1 4^1} +$$
$$+ \bar{\Phi}\bar{f}_{123^1 4^1} - \Phi f_{1^1 2^1 3^1 4^1} + \bar{\Phi}\bar{f}_{1^1 2^1 3^1 4^1} = -2\Phi f_{1^1 2^1 3^1 4^1} + 2\bar{\Phi}\bar{f}_{1^1 2^1 3^1 4^1}$$

или

$$\Phi f_{1234} - \bar{\Phi}\bar{f}_{1234} - \Phi f_{1^1 2^1 34} + \bar{\Phi}\bar{f}_{1^1 2^1 34} -$$
$$- \Phi f_{1234} + \bar{\Phi}\bar{f}_{123^1 4^1} + \Phi f_{1^1 2^1 3^1 4^1} - \bar{\Phi}\bar{f}_{1^1 2^1 3^1 4^1} = 0$$

т.е. опять получается уравнение (1.5) работы [17]. Но эта задача нами уже решена. Таким образом, остается рассмотреть общий случай, характеризующийся функциональным уравнением (2.10) или (2.11).

Прежде чем приступить к изложению метода решения функционального уравнения (2.11) или (2.10), убидимся, что (2.10) или (2.11) есть условие необходимое и достаточное для возможности анаморфозы.

Действительно, из (2.11) при помощи (2.12), (2.5) найдем, что

$$\begin{aligned} (2.19)\qquad \bar{\Phi}_{123456} &= \bar{\Phi}_{1^1 2^1 3^1 4^1 5^1 6^1} + \bar{\Phi}_{123^1 4^1 5^1 6^1} + \bar{\Phi}_{1^1 2^1 3^1 4^1 56} - 2\bar{\Phi}_{1^1 2^1 3^1 4^1 5^1 6^1} \equiv \\ &\equiv \bar{\Phi}_{1^1 2^1 345^1 6^1} - \bar{\Phi}_{1^1 2^1 3^1 4^1 5^1 6^1} + \\ &+ \bar{\Phi}_{123^1 4^1 5^1 6^1} - \bar{\Phi}_{1^1 2^1 3^1 4^1 5^1 6^1} + \bar{\Phi}_{1^1 2^1 3^1 4^1 56} - \bar{\Phi}_{1^1 2^1 3^1 4^1 5^1 6^1} + \bar{\Phi}_{1^1 2^1 3^1 4^1 5^1 6^1} = \\ &= A_{34} - A_{3^1 4^1} - A_{12} + A_{1^1 2^1} + A_{56} - A_{5^1 6^1} + \bar{\Phi}_{1^1 2^1 3^1 4^1 5^1 6^1} = A_{34} - A_{12} + A_{56}. \end{aligned}$$

Точно также из (2.10) при помощи (2.8), (2.4) найдем, что

$$(2.20)\qquad \bar{\Phi}_{1^1 2^1 3^1 4^1 5^1 6^1} = A_{3^1 4^1} - A_{1^1 2^1} + A_{5^1 6^1}.$$

Поскольку z_i^1 $(i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$ – произвольные переменные, оба результата равносильны. Итак, остается решить уравнение (2.10) или (2.11) и безразлично какое. Мы будем решать функциональное уравнение (2.11). Достаточно в решении поменять местами z_i на z_i^1 и z_i^1 на z_i, чтобы получить и решение (2.10) и наоборот.

§3. Найдем теперь схему решения функционального уравнения (2.11) с неизвестной функцией двух переменных $\bar{\Phi}(x; y)$, которую мы предположим дифференцируемой. Мы применим тот же метод решения, что и в работе [17]. А именно:

Дифференцируем (2.11) по z_1, потом по z_2. Тем самым выразим

$$\Phi^{10}(f_{123456}; \bar{f}_{123456}), \quad \Phi^{01}(f_{123456}; \bar{f}_{123456})$$

через

$$\Phi^{10}(f_{123^1 4^1 5^1 6^1}; \bar{f}_{123^1 4^1 5^1 6^1}), \quad \Phi^{01}(f_{123^1 4^1 5^1 6^1}; \bar{f}_{123^1 4^1 5^1 6^1}),$$

где через $\Phi^{10}(x; y)$ обозначено

$$\frac{\partial \Phi(x; y)}{\partial x},$$

а через $\Phi^{01}(x; y)$ обозначено

$$\frac{\partial \Phi(x; y)}{\partial y}.$$

Записав одно под другим для удобства обозрения, уравнение (2.11) и оба результата его дифференцирования по z_1 и z_2 и, наконец результат решения получившейся системы двух уравнений, линейных относительно

$$\Phi^{10}(f_{123^14^15^16^1}\,;\bar f_{123^14^15^16^1}) \quad \text{и} \quad \Phi^{01}(\bar f_{123^14^15^16^1}\,; f_{123^14^15^16^1}),$$

получаем соответственно равенство (2.11) и равенства

$$(3.1)\qquad \begin{gathered} \bar\Phi^{10}(f_{123456}\,;\bar f_{123456}) f^{100000}_{123456} + \bar\Phi^{01}(f_{123456}\,;\bar f_{123456}) \bar f^{100000}_{123456} - \\ - \bar\Phi^{10}(f_{123^14^15^16^1}\,;\bar f_{123^14^15^16^1}) f^{100000}_{123^14^15^16^1} - \bar\Phi^{01}(f_{123^14^15^16^1}\,;\bar f_{123^14^15^16^1}) \bar f^{100000}_{123^14^15^16^1} = 0 \\ \bar\Phi^{10}(f_{123456}\,;\bar f_{123456}) f^{010000}_{123456} + \bar\Phi^{01}(f_{123456}\,;\bar f_{123456}) \bar f^{010000}_{123456} - \\ - \bar\Phi^{10}(f_{123^14^15^16^1}\,;\bar f_{123^14^15^16^1}) f^{010000}_{123^14^15^16^1} - \bar\Phi^{01}(f_{123^14^15^16^1}\,; f_{123^14^15^16^1}) f^{010000}_{123^14^15^16^1} = 0 \end{gathered}$$

и

$$(3.2)\qquad \begin{gathered} \bar\Phi^{10}(f_{123456}\,;\bar f_{123456}) = \bar\Phi^{10}(f_{123^14^15^16^1}\,;\bar f_{123^14^15^16^1}) \big(f^{100000}_{123^14^15^16^1} \bar f^{010000}_{123456} - \\ - f^{010000}_{123^14^15^16^1} \bar f^{100000}_{123456}\big) : \big(f^{100000}_{123456} \bar f^{010000}_{123456} - f^{010000}_{123456} \bar f^{100000}_{123456}\big) + \\ + \bar\Phi^{01}(f_{123^14^15^16^1}\,;\bar f_{123^14^15^16^1}) \big(\bar f^{100000}_{123^14^15^16^1} \bar f^{010000}_{123456} - \bar f^{010000}_{123^14^15^16^1} \bar f^{100000}_{123456}\big) : \\ : \big(f^{100000}_{123456} \bar f^{010000}_{123456} - f^{010000}_{123456} \bar f^{100000}_{123456}\big)\,; \\ \bar\Phi^{01}(f_{123456}\,;\bar f_{123456}) = \bar\Phi^{10}(f_{123^14^15^16^1}\,; f_{123^14^15^16^1}) \big(f^{100000}_{123456} f^{010000}_{123^14^15^16^1} - \\ - f^{010000}_{123456} f^{100000}_{123^14^15^16^1}\big) : \big(f^{100000}_{123456} \bar f^{010000}_{123456} - f^{010000}_{123456} \bar f^{100000}_{123456}\big) + \\ + \bar\Phi^{01}(f_{123^14^15^16^1}\,;\bar f_{123^14^15^16^1}) \big(f^{100000}_{123456} \bar f^{010000}_{123^14^15^16^1} - f^{010000}_{123456} \bar f^{100000}_{123^14^15^16^1}\big) : \\ : \big(f^{100000}_{123456} \bar f^{010000}_{123456} - f^{010000}_{123456} \bar f^{100000}_{123456}\big). \end{gathered}$$

Затем мы опять начиная сначала, дифференцируем (2.11) по z_3 затем по z_4. Решая получившуюся систему двух линейных уравнений относительно тех же неизвестных, мы получим:

$$(3.3)\qquad \begin{gathered} \bar\Phi^{10}(f_{123456}\,;\bar f_{123456}) = \bar\Phi^{10}(f_{1^12^1345^16^1}\,;\bar f_{1^12^1345^16^1}) \big(f^{001000}_{1^12^1345^16^1} f^{000100}_{123456} - \\ - f^{000100}_{1^12^1345^16^1} f^{001000}_{123456}\big) : \big(f^{001000}_{123456} \bar f^{000100}_{123456} - f^{000100}_{123456} \bar f^{001000}_{123456}\big) + \\ + \bar\Phi^{01}(f_{1^12^1345^16^1}\,;\bar f_{1^12^1345^16^1}) \big(\bar f^{001000}_{1^12^1345^16^1} \bar f^{000100}_{123456} - f^{000100}_{1^12^1345^16^1} \bar f^{001000}_{123456}\big) : \\ : \big(f^{001000}_{123456} \bar f^{000100}_{123456} - f^{000100}_{123456} \bar f^{001000}_{123456}\big)\,; \\ \bar\Phi^{01}(f_{123456}\,;\bar f_{123456}) = \bar\Phi^{10}(f_{1^12^1345^16^1}\,; f_{1^12^1345^16^1}) \big(f^{001000}_{123456} f^{000100}_{1^12^1345^16^1} - \\ - f^{000100}_{123456} f^{001000}_{1^12^1345^16^1}\big) : \big(f^{001000}_{123456} \bar f^{000100}_{123456} - f^{000100}_{123456} \bar f^{001000}_{123456}\big) + \\ + \bar\Phi^{01}(f_{1^12^1345^16^1}\,;\bar f_{1^12^1345^16^1}) \big(f^{001000}_{123456} f^{000100}_{1^12^1345^16^1} - f^{000100}_{123456} \bar f^{001000}_{1^12^1345^16^1}\big) : \\ : \big(f^{001000}_{123456} \bar f^{000100}_{123456} - f^{000100}_{123456} f^{001000}_{123456}\big). \end{gathered}$$

Наконец, то же проделываем относительно последней пары неизвестных z_5 и z_6. Получаем решения

$$(3.4)\qquad \bar{\Phi}^{10}(f_{123456};\bar{f}_{123456})=\bar{\Phi}^{10}(f_{1^12^13^14^156};\bar{f}_{1^12^13^14^156})(f^{000010}_{1^12^13^14^156}\bar{f}^{000001}_{123456}-$$
$$-f^{000001}_{1^12^13^14^156}\bar{f}^{000010}_{123456}):(f^{000010}_{123456}\bar{f}^{000001}_{123456}-f^{000001}_{123456}\bar{f}^{000010}_{123456})+$$
$$+\bar{\Phi}^{01}(f_{1^12^13^14^156};\bar{f}_{1^12^13^14^156})(f^{000010}_{1^12^13^14^156}\bar{f}^{000001}_{123456}-f^{000001}_{1^12^13^14^156}\bar{f}^{000010}_{123456}):$$
$$:(f^{000010}_{123456}\bar{f}^{000001}_{123456}-f^{000001}_{123456}\bar{f}^{000010}_{123456});$$
$$\bar{\Phi}^{01}(f_{123456};\bar{f}_{123456})=\bar{\Phi}^{10}(f_{1^12^13^14^156};\bar{f}_{1^12^13^14^156})(f^{000010}_{123456}f^{000001}_{1^12^13^14^156}-$$
$$-f^{000001}_{123456}f^{000010}_{1^12^13^14^156}):(f^{000010}_{123456}\bar{f}^{000001}_{123456}-f^{000001}_{123456}\bar{f}^{000010}_{123456})+$$
$$+\bar{\Phi}^{01}(f_{1^12^13^14^156};\bar{f}_{1^12^13^14^156})(f^{000010}_{123456}\bar{f}^{000001}_{1^12^13^14^156}-f^{000001}_{123456}\bar{f}^{000010}_{1^12^13^14^156}):$$
$$:(f^{000010}_{123456}\bar{f}^{000001}_{123456}-f^{000001}_{123456}\bar{f}^{000010}_{123456}).$$

Если бы мы сумели выразить стоящие справа неизвестные функции

$$\bar{\Phi}^{10}_{123^14^15^16^1},\quad \bar{\Phi}^{01}_{123^14^15^16^1},\quad \bar{\Phi}^{10}_{1^12^1345^16^1},\quad \bar{\Phi}^{10}_{1^12^13^14^156},\quad \bar{\Phi}^{01}_{1^12^13^14^156}$$

через

$$\bar{\Phi}^{10}_{1^12^13^14^15^16^1},\quad \bar{\Phi}^{01}_{1^12^13^14^15\,6^1},$$

подобно тому, как это было сделано в работе [17], задача была бы решена, т.к.

$$\bar{\Phi}^{10}_{1^12^13^14^15^16^1},\quad \bar{\Phi}^{01}_{1^12^13^14^15^16^1},$$

как и в работе [17], играли бы роль произвольных постоянных.

Если бы мы подобным же преобразованиям подвергли функциональное уравнение (2.10), то получили бы такие же формулы (3.2)–(3.4), но над нижними индексами, где нет теперь штрихов, таковые бы появились, а над теми, где штрихи есть, штрихи бы исчезли. Мы будем предполагать это сделанным.

Тепер перепишем (2.10) и (2.11) соответственно так:

$$(3.5)\qquad 2\bar{\Phi}(f_{123456};\bar{f}_{123456})-\bar{\Phi}(f_{123^14^156};\bar{f}_{123^14^156})-\Phi(f_{1^12^13456};\bar{f}_{1^12^13456})-$$
$$-\Phi(f_{12345^16^1};\bar{f}_{12345^16^1})=-\bar{\Phi}(f_{1^12^13^14^15^16^1};\bar{f}_{1^12^13^14^15^16^1})$$

$$(3.6)\quad 2\Phi(f_{1^12^13^14^15^16^1};\bar{f}_{1^12^13^14^15^16^1})-\Phi(f_{1^12^1345^16^1};\bar{f}_{1^12^1345^16^1})-\Phi(f_{123^14^15^16^1};\bar{f}_{123^14^15^16^1}-$$
$$-\Phi(f_{1^12^13^14^156};\bar{f}_{1^12^13^14^156})=-\bar{\Phi}(f_{123456};\bar{f}_{123456}).$$

В дальнейшем поступаем аналогично как и в работе [17].

§4. Было бы интересно найти критерии анаморфозируемости системы, допускающей более сложную транспарантную номограмму. В плоскости π имеем три бинарных поля

$$(4.1)\qquad x_{12}=\varphi_{12},\quad y_{12}=\psi_{12};\quad x_{34}=\varphi_{34},\quad y_{34}=\psi_{34};$$
$$x_{56}=\varphi_{56},\quad y_{56}=\psi_{56}.$$

В плоскости π' имеем 2 поля и неградуированную линию

$$x'_{78} = \varphi_{78}, \quad y'_{78} = \psi_{78}; \quad x'_{9,10} = \varphi_{9,10}, \quad y'_{9,10} = \psi_{9,10}; \tag{4.2}$$
$$x' = \varphi(t); \quad y' = \psi(t),$$

где t – параметр линии.

Пользование номограммой сводится к наложению π' на π так, чтобы совпали точки $(z_1; z_2)$, $(z_7; z_8)$, чтобы линия $x' = \varphi(t)$, $y' = \psi(t)$ прошла через данную точку $(z_3; z_4)$ и чтобы точки $(z_5; z_6)$ и $(z_9; z_{10})$ определяли одна другую.

Пусть движение плоскости π', выполняющее это совмещение, определяется евклидовым движением

$$x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha + a, \quad y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha + b. \tag{4.3}$$

Тогда будем иметь

$$\begin{aligned} x'_{78} &= x_{12}\cos\alpha - y_{12}\sin\alpha + a, \quad y'_{78} = x_{12}\sin\alpha + y_{12}\cos\alpha + b,\\ x' &= x_{34}\cos\alpha - y_{34}\sin\alpha + a, \quad y' = x_{34}\sin\alpha + y_{34}\cos\alpha + b,\\ x'_{9\,10} &= x_{56}\cos\alpha - y_{56}\sin\alpha + a, \quad y'_{9\,10} = x_{56}\sin\alpha + y_{56}\cos\alpha + b. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Отсюда, исключая α, a, b имеем:

$$\begin{aligned} (x' - x'_{78})^2 + (y' - y'_{78})^2 &= (x_{34} - x_{12})^2 + (y_{34} - y_{12})^2,\\ (x' - x'_{9\,10})^2 + (y' - y'_{9\,10})^2 &= (x_{34} - x_{56})^2 + (y_{34} - y_{56})^2,\\ (x'_{78} - x'_{9\,10})^2 + (y'_{78} - y'_{9\,10})^2 &= (x_{12} - x_{56})^2 + (y_{12} - y_{56})^2. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Из первых двух уравнений надо исключить параметр t. В результате получим каноническую форму системы, допускающей номограмму данного вида. Можно рассмотреть частные случаи, когда $y' = kx' + b$ (прямая), окружность, парабола, эллипс и т.д. Тогда исключение x' производится более или менее легко. Остается затем, пользуясь методом бесквадратурной анаморфозы или смешанным, дать критерий приводимости системы

$$F_{12345678910} = 0, \quad \bar{F}_{12345678910} = 0 \tag{4.6}$$

к канонической форме.

Можно упростить эту задачу, заменяя поля шкалами и уменьшая число аргументов.

Можно ставить и решать множество таких задачи как задач в области теории функциональных уравнений. При этом можно исследовать детали после того как найдены функции канонического представления, подобно тому как это намечено нами в конце работы [17]. Например, можно исследовать особые случаи вырождения полей в многопараметрические шкалы, что выясняется путем вычисления якобиана абсциссы и ординаты точки поля, и решать ряд других задач. Подход с точки зрения функциональных уравнений позволяет глубокое проникновение в проблемы номографии.

В заключение заметим, что в настоящей работе приведен иной подход решения функционального уравнения (1.4) работы [17]. К решению этого функционального уравнения использован метод только дифференциального исчисления. Кроме метода интегральных преобразований приведено исследование и сопоставление различных способов решения функционального уравнения (2.11) или (2.10). Разобраны также частные случаи номограмм этих уравнений и найдены необходимые и достаточные условия для возможности анаморфозы.

ЛИТЕРАТУРА

[1] ВИЛЬ , И : Бе квадратурная ном графия и номографирование в комплексных пр х к гях, Груды чет ртого Всесо зного Математического съезда изд. «Н ук Лени град (1964), 186–194.

[2] ВИ ЬНЕР, . А.: Б сквадратурная номография. Алгебраическая номография и проблема а морфо ф ци в д у мерной плоскости при $n = 6$ переменных. Часть I, II, Mat. Čas. SAV, 1 1967) № 3 169 205, №4, 266 281.

[3] ВИЛЬНЕР, И А.: Алге раическое реш ение проблемы анаморфозы функций в инвариантно форме, ДАН, т 90, №1, (1953), 5–8.

[4] ВИЛЬНЕР, И А.: Топология и геометрия пространст а мнимой анаморфозы, УМН, (1958), т. 8, в 4 (82) 173 178

[5] ВИЛЬНЕР, И. А.: Бесквадратурное номограф ирование обобщенной функции К.Я. Залта, Ученые з писки Л вт. Гос. у иверситета, Рига, (1956), т. 28, в. 4, 131–139.

[6] ВИЛЬНЕР, И. А.: О линейной зависимости функций и методе условных производных в бесквадратурной номографии, Сборник статей ВЗПИ 7 (1954), 105–128.

[7] ВИЛЬНЕР, И. А Бесквадратурное представление в виде определителя Массо в многомерном простран тве недифференцируемых функций многих переменных в инвариантной форме, Сб рник статей ВЗПИ, 9, (1955), 84–115.

[8] ВИЛЬНЕР, И. А : Проблема общей анаморфозы в пространстве и на плоскости, ее алгебра изац я и ст рео копическая номография, Сборник статей ВЗПИ, 21 (1958), 98–118.

[9] ВИЛЬНЕР И. А.. Проблема анаморфозы, ДАН СССР, (1951), т. 77, №2, 177–180.

[10] ХОВАНСКИЙ, Г. С.: Основы номографии, Москва (1976), 1–351.

[11] ACZEL, J.: Vorlesungen uber Functionalgleichungen und ihre Anwendungen, Berlin (1961).

[12] ГАЛАЙДА, П.. Единственность анаморфозы функций в невырожденном случае, Mat. Čas. SAV, 23 (1973) № 2, 106–114.

[13] ГАЛАЙДА, П.: О зависимости функций, принцип инвариантности и решение задач в виде номографируемых суперпозиций, Nomografický zborník, VŠT – Košice, (1970), 53–84.

[14] ГАЛАЙДА, П.: Алгебраизация и дифференциализация критериев представимости зависимостей в виде номографируемых суперпозиций, Nomografický zborník, VŠT – Košice, (1970), 85–115.

[15] ГАЛАЙДА, П.: Решение функциональных уравнений номографии необходимые и достаточные условия при алгебраизации критериев, Nomografický zborník, VŠT – Košice, (1970), 116–137

[16] ГАЛАЙДА, П.: $\mathcal{N}$-функциональные уравнения и проблема общей анаморфозы многих переменных, L'analyse numérique et la theorie de l'approximation, Tome 5, №2, (1976), pp. 145–158.

[17] ГАЛАЙДА, П.: О применении бесквадратурного метода к решению некоторых функциональных уравнений, Math. Slovaca, 31, 1981, 23—38.

Поступило 1. 11. 1977

Katedra matematickej informatiky EF
Vysokej školy technickej
Zbrojnícka 3
040 01 Košice