Eduard Toman

О вероятности связности случайного подграфа n-мерного куба

Mathematica Slovaca, Vol. 30 (1980), No. 3, 251--265

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/136243

Math. Slovaca 30, 1980, No. 3, 251—265

О ВЕРОЯТНОСТИ СВЯЗНОСТИ СЛУЧАЙНОГО ПОДГРАФА n-МЕРНОГО КУБА

ЭДУАРД ТОМАН

1. Введение

Рассмотрим граф B^n ребер n-мерного единичного куба. Его вершинами являются всевозможные n-мерные булевские векторы. Две вершины соединены ребром, если они отличаются значением ровно одной координаты. Очевидно, что граф B^n имеет 2^n вершин и $n2^{n-1}$ ребер. Обозначим символом $G_n(q)$ случайный граф, получаемый из B^n случайным взаимонезависимым удавлением ребер, вероятность удавления каждого из которых равна q, $(0<q<1)$. Ю.Д. Буртин в работе [1] доказал, что вероятность того, что случайный граф $G_n(q)$ связен, при $n\to\infty$ стремится к 1 при $q<1/2$ и стремится к 0 при $q>1/2$.

Таким образом, величина 1/2 является асимптотически пороговым значением вероятности удавления ребер по отношению к свойству связности случайного графа $G_n(q)$.

Будем говорить, что случайный граф $G_n(q)$ обладает некоторым свойством A, если при $n\to\infty$ вероятность того, что случайный граф $G_n(q)$ обладает свойством A, стремится к 1.

Настоящая работа посвящена доказательству следующего утверждения: Случайный граф $G_n(1/2)$ с вероятностью, стремящейся к 1 при $n\to\infty$, устроен следующим образом:

1) *Граф $G_n(1/2)$ имеет одну главную компоненту связности с числом вершин, асимптотически равным 2^n.*

2) *В качестве второстепенных компонент выступают изопрованные вершины, и их число ограничено сверху произвольной слабо растущей функцией $\eta(n)\to\infty$ при $n\to\infty$ и $\eta(n)=o(n/\log n)$.*

В работе А. А. Сапожненко [3] рассматривались свойства комплекса, составленного из граней единичного n-мерного куба, сооветствующих конъюнкциям сокращенной дизъюнктивной нормальной формы. Для почти всех булевых функций в работе [3] оценивались такие параметры как протяженность, число и состав компонент связности соответствующего комплекса. Им установлено, что почти все функции алгебры логики имеют одну главную компоненту, содержащую почти все грани комплекса, а остальные компоненты представляют собой изолированные вершины.

Автором в [4] исследовалось строение графа *случайной булевой функции, т.е. функции алгебры логики, которая на вершинах единичного n-мерного куба принимает значение 1 с вероятностью p и значение 0 с вероятностью $q=1-p$, независимо от значений в остальных вершинах единичного n-мерного куба.* Вопрос решен полностью для всех p: $0<p<1$.

Основные идеи вышеуказанных работ использованы и в данной работе.

Наши результаты в главном опираются на вычисление средних значений некоторых вспомогательных параметров.

2. Определения и обозначения

Понятия цепи и расстояния между вершинами куба B^n определим как в обычном графе. Нетрудно видеть, что расстояние совпадает с хэминговым расстоянием между наборами, определяемым как число разрядов, в которых эти наборы различаются. Расстояние $r_{B^n}(\alpha, \beta)$ в кубе B^n будем в дальнейшем обозначать через $r(\alpha, \beta)$.

Вершину куба B^n, находящуюся на расстоянии n от вершины α, будем называть *противоположной к* α и обозначать через $\bar{\alpha}$.

Вершину, находящуюся на расстоянии 1 от α, будем называть *соседней с* α.

В дальнейшем мы будем подмножество вершин куба B^n и подграф, порожденный этим подмножеством, обозначать одним и тем же символом.

Пусть $I=\{i_1, i_2, \ldots, i_{n-k}\}$ — подмножество множества $N=\{1, 2, \ldots, n\}$. Через $\bar{I}$ будем обозначать множество $N \backslash I$. Пусть $\alpha \in B^n$, символом $B^k(\alpha, I)$ будем обозначать множество (и подграф, порожденный им) всех вершин β, совпадающих с α в разрядах с номерами $i_1, i_2, \ldots, i_{n-k}$. Подграф $B^k(\alpha, I)$ куба B^n будем называть *k-мерным подкубом направления I, содержащим вершину* α. Подкуб $B^{n-k}(\alpha, \bar{I})$ будем называть *дополнительным к $B^k(\alpha, I)$ относительно вершины* α.

Пусть α, β — вершины куба B^n и $r(\alpha, \beta)=k$, и пусть $I=\{i_1, i_2, \ldots, i_{n-k}\}$ — множество разрядов, в которых α и β совпадают. Тогда подкуб $B^k(\alpha, I)$ или, что то же, подкуб $B^k(\beta, I)$ будем называть *k-мерным подкубом, натянутым на вершины* α, β и обозначать через $B^k(\alpha, \beta)$.

Множество вершин подкуба $B^k(\alpha, \beta)$ можно определить как множество всех вершин γ таких, что $r(\alpha, \gamma)+r(\gamma, \beta) = r(\alpha, \beta)$.

Определим *k-мерный шар радиуса r направленияI с центром* α как множество $S_r^k(\alpha, I)=\{\alpha | \beta \in B^k(\alpha, I),\ r(\alpha, \beta) \leq r\}$. Подграф куба B^n, порожденный множеством $S_r^k(\alpha, I)$, также будем называть шаром.

Будем называть *k-мерной сферой радиуса r направления I с центром* α множество $B_r^k(\alpha, I) = \{\beta | \beta \in B^k(\alpha, I),\ r(\alpha, \beta) = r\}$. Там, где это не вызовет недоразумений, индексы направления и вершин в обозначениях подкуба, шара, сферы будут опускаться.

Цилиндром $Z_r^k(\alpha, \beta)$ *с осью* $B^k(\alpha, \beta)$ *и радиусом основания* r куба B^n будем называть подграф куба B^n, порожденный множеством всех вершин, находящихся на расстоянии не большем, чем r, от подкуба $B^k(\alpha, \beta)$. Под расстоянием от точки α до множества M понимается минимальное из расстояний $r(\alpha, \gamma)$, где $\gamma \in M$.

Пусть I — направление подкуба $B^k(\alpha, \beta)$, а $\bar{I}$ — множество, дополнительное к I относительно $N = \{1, 2, \ldots, n\}$. Шары $S_r^{n-k}(\alpha, \bar{I})$ и $S_r^{n-k}(\beta, \bar{I})$ будем называть *основаниями цилиндра* $Z_r^k(\alpha, \beta)$. Нетрудно понять, что цилиндр $Z_r^k(\alpha, \beta)$ представляет собой декартово произведение куба B^k и шара S_r^{n-k}.

Пусть $B_i^{n-k}(\alpha, \bar{I})$ — сфера радиуса i, $1 \leqslant i \leqslant r$. Множество всех подкубов $B^k(\gamma, I)$, где $\gamma \in B_i^{n-k}(\alpha, \bar{I})$, будем называть *$i$-тым слоем цилиндра* $Z_r^k(\alpha, \beta)$, а сами подкубы $B^k(\gamma, I)$ — *образующими i-того слоя цилиндра.*

В дальнейшем буквой c с индексами будут обозначаться положительные константы. Буквой ε с индексами будут обозначаться константы, лежащие в интервале $(0,1)$. Если M — множество, то $|M|$ — число элементов в нем. Если q — действительное число, то $\lfloor q \rfloor$ — его целая часть, $\lceil q \rceil$ — наименшее целое m такое, что $m \geqslant q$. Символом $\log a$ будем всегда обозначать $\log_2 a$.

Запись $\varphi(x) = o(\psi(x))$ при $x \to a$ означает, что

$$\lim_{x \to a} \varphi(x)/\psi(x) = 0.$$

Говорят, что функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ *асимптотически равны* (обозначение: $\varphi(x) \sim \psi(x)$) при $x \to a$, если $\varphi(x) = \psi(x) + o(\psi(x))$ при $x \to a$. В работе асимптотическое равенство везде понимается при $x \to \infty$.

Запись $\varphi(x) = O(\psi(x))$ при $x \in X$ означает, что существует константа c, такая, что $|\varphi(x)| \leqslant c|\psi(x)|$ для $x \in X$. Если $\varphi(x) = O(\psi(x))$ и $\psi(x) = O(\varphi(x))$ при $x \in X$, то пишут $\varphi(x) \asymp \psi(x)$ при $x \in X$.

Буквой ξ с индексами везде обозначаем случайную величину, $M\xi$ обозначает ее математическое ожидание.

3. Число и состав компонент связности графа $G_n(1/2)$

Лемма 1. *Пусть* $\tilde{0} = (0, \ldots, 0)$ *и* $\tilde{1} = (1, \ldots, 1)$. *Пусть* $\psi(n)$ *вероятность того, что в* $G_n(1/2)$ *нет* $[\tilde{0}, \tilde{1}]$ — *цепей длины* n, *т.е. цепей длины* n, *связывающих вершины* $\tilde{0}$ *и* $\tilde{1}$. *Тогда справедливо:*

1) *Существует* $\delta^0 (0 < \delta^0 < 1)$, *такое, что для* $n \geqslant 1$, $\psi(n) \leqslant \delta^0$.

2) *Для каждого* $\delta(0<\delta<1)$ *существует такое* n_2, *что для каждого* $n \geqslant n_2$, $\psi(n) \leqslant \delta < 1$.

3) $\psi(n) \asymp 2^{-n}$ *при* $n \to \infty$.

Доказательство. Нижняя оценка. Пусть $S_1^n(\tilde{0})$ и $S_1(^1)$ — n-мерные шары радиуса 1 с центрами $\tilde{0}$ и $\tilde{1}$. Вероятность того, что граф $G_n(1/2)$ хотя бы в одном из шаров $S_1^n(\tilde{0})$ или $S_1^n(\tilde{1})$ не имеет ребер, равна

$$2^{-n+1} - 2^{-2n}.$$

Вероятность того, что $G_n(1/2)$ в шарах $S_1^n(\tilde{0})$ и $S_1^n(\tilde{1})$ имеет в точности по одному ребру, и причем концевые вершины (разумеются вершины, принадлежащие сферам $B_1^n(\tilde{0})$ и $B_1^n(\tilde{1})$) этих ребер противоположны, р вна

$$n 2^{-2n}.$$

Очевидно, что в обоих случаях в графе $G_n(1/2)$ отсутствуют $[\tilde{0}, \tilde{1}]$-цепи длины n. Теперь ясно, что

$$2^{-n+1} - 2^{-2n} + n2^{\ 2n} \sim 2^{\ n+} \quad \text{при} \quad n \to \infty$$

Верхняя оценка. Для доказательства верхней оценки выведем рекурентное соотношение. Будем рассматривать $(n+2)$-мерный единичный куб B^{n+2}. И все графы $G_{n+2}(1/2)$ разобъем на пять типов в зависимости от способа их определения на шарах $S_1^n(\tilde{0})$ и $S_1^n(\tilde{1})$.

К первому типу отнесем все те графы, у которых хотя бы в одном из шаров нет ребер. Вероятность P_1 того, что граф $G_{n+2}(1/2)$ принадлежит к первому типу, равна

$$P_1 - 2^{-n-1} - 2^{-2(n+2)}.$$

Ко второму типу отнесем все те графы $G_{n+2}(1/2)$, которые в каждом из шаров $S_1^{n+2}(\tilde{0})$ и $S_1^{n+2}(\tilde{1})$ имеют ровно по одному ребру, причем концевые вершины являются противоположными. Вероятность P_2 того, что граф $G_{n+2}(1/2)$ принадлежит ко второму типу, равна

$$P_2 = (n+2)2^{-2(n+2)}.$$

К третьему типу отнесем те графы $G_{n+2}(1/2)$, у которых в каждом из шаров $S_1^{n+2}(\tilde{0})$ и $S_1^{n+2}(\tilde{1})$ существует по крайней мере одно ребро, но нет ни одной пары противоположных вершин, которые принадлежат концам ребер. Вероятность P_3 того, что граф $G_{n+2}(1/2)$ принадлежит к этому типу, равна

$$P_3 = (3/4)^{n+2} - 2^{-n-1} + 2^{-2(n+2)}.$$

К четвертому типу отнесен все те графы, у которых в одном из шаров $S_1^{n+2}(\tilde{0})$ и $S_1^{n+2}(\tilde{1})$ существует одно ребро, а в другом по крайней мере два ребра, причем имеется в точности одна пара противоположных концевых вершин. Вероятность P_4 того, что граф $G_{n+2}(1/2)$ принадлежит к этому типу, равна

$$P_4 = (n+2)2^{-n-2}(1-2^{-n-1}).$$

Наконец, к пятому типу отнесем все те графы, у которых в каждом из шаров $S_1^{n+2}(\tilde{0})$ и $S_1^{n+2}(\tilde{1})$ существует не менее двух ребер, причем существует по крайней мере одна пара противоположных концевых вершин.

Введем обозначения

$$\varepsilon_n = 2^{-n+1} - 2^{-2n} + n2^{-2n},$$
$$\varepsilon_n' = (3/4)^n - 2^{-n+1} + 2^{-2(n+2)} + n2^{-n}(1-2^{-n+1}).$$

Тогда для вероятности P_5 того, граф $G_{n+2}(1/2)$ принадлежит к пятому типу, справедливо равенство

$$P_5 = 1 - \varepsilon_{n+2} - \varepsilon_{n+2}',$$

так как ясно, что каждый граф $G_{n+2}(1/2)$ принадлежит только к одному из пяти рассматриваемых типов.

Из доказательства нижней оценки вытекает, что вероятность отсутствия $[0,1]$-цепей длины $n+2$ при условии, что $G_{n+2}(1/2)$ принадлежит к первому или второму типу, равна

$$2^{-n-1} - 2^{-2(n+2)} + (n+2)2^{-2(n+2)}.$$

Если $G_{n+2}(1/2)$ принадлежит к третьему типу, то очевидно, существует пара вершин α, β таких что α соседняя с $\tilde{0}$ а β соседняя с $\tilde{1}$ и $r(\alpha,\beta)=n$. Теперь рассмотрим подкуб $B^n(\alpha,\beta)$ куба B^{n+2}, натянутый на вершины α, β. Если $G_{n+2}(1/2)$ такой что не имеет $[\tilde{0},\tilde{1}]$-цепей длины $n+2$, то в $G_{n+2}(1/2)$ не должно быть цепей $[\alpha,\beta]$ длины n. Вероятность того, что граф $G_n(1/2)$ такой на подкубе $B^n(\alpha,\beta)$, не превосходит $\psi(n)$ и следовательно, вероятность того, что $G_{n+2}(1/2)$ принадлежит к третьему типу и не имеет $[\tilde{0},\tilde{1}]$-цепей длины $n+2$, не превосходит

$$((3/4)^{n+2} - 2^{-n-1} + 2^{-2(n+2)})\,\psi(n).$$

Если $G_{n+2}(1/2)$ четвертого типа, то вновь в шарах $S_1^{n+2}(\tilde{0})$ и $S_1^{n+2}(\tilde{1})$ содержится пара вершин α, β таких, что $r(\alpha,\beta)=n$ и $(\tilde{0},\alpha)$ и $(\tilde{1},\beta)$ являются ребрами $G_{n+2}(1/2)$. По аналогии с предыдущим случаем имеем: вероятность того, что $G_{n+2}(1/2)$ принадлежит к четвертому типу и не содержит $[0,\tilde{1}]$-цепей длины $n+2$, не больше чем

$$(n+2)\,2^{-n-2}(1-2^{-n-1})\,\psi(n).$$

Пусть теперь граф $G_{n+2}(1/2)$ принадлежит к пятому типу и пусть α и $\tilde{\alpha}$ пара противоположных вершин таких, что в графе $G_{n+2}(1/2)$ присутствуют ребра

$(\alpha, \tilde{0})$ и $(\bar{\alpha}, \tilde{1})$. Пусть $\beta \in B_1^{n+2}(\tilde{1})$, $\beta \neq \bar{\alpha}$, а $\gamma \neq \alpha$ и $\gamma \in B_1^{n+2}(\tilde{0})$. Очевидно, что $r(\alpha, \beta) = r(\gamma, \bar{\alpha}) = n$ и подкубы $B^n(\alpha, \beta)$ и $B^n(\gamma, \bar{\alpha})$ не имеют общих вершин. В каждом из подкубов $B^n(\alpha, \beta)$ и $B^n(\gamma, \bar{\alpha})$ вероятность того, что граф $G_{n+2}(1/2)$ не имеет $[0, 1]$-цепей длины $n+2$, не более чем $\psi(n)$. Поэтому вероятность того, что граф принадлежит к пятому типу и не имеет $[0, 1]$-цепей длины $n+2$ не более, чем

$$(1 - \varepsilon_{n+2} - \varepsilon'_{n+2})\, \psi^2(n).$$

Учитывая все это, получаем

$$\psi(n+2) \leqslant \varepsilon_{n+2} + \psi(n)(\varepsilon'_{n+2} + (1 - \varepsilon_{n+2} - \varepsilon'_{n+2})\, \psi(n)). \tag{1}$$

По индукции докажем утверждения нашей леммы. Очевидно, что $\psi(n) \leqslant 1$, для $n \geqslant 1$.

1° Для $n = 1$, $\psi(1) = 1/2$ и для $n = 2$, $\psi(2) = 9/16$.

Далее покажем, что существует такое $\delta^0 (0 < \delta^0 < 1)$, что $\psi(n) \leqslant \delta^0$ для всякого $n \geqslant 1$. Выберем такое n_0, что для $n \geqslant n_0$ одновременно выполнены следующие условия:

1) $0 < \dfrac{\varepsilon_n}{1 - \varepsilon_n - \varepsilon'_n} < 1$,

2) Функция $\dfrac{\varepsilon_n}{1 - \varepsilon_n - \varepsilon'_n}$ монотонно убывает по n.

Рассмотрим неравенство (1).

Его решением при $n \geqslant n_0 - 2$ является интервал

$$\left[\frac{\varepsilon_{n+2}}{1 - \varepsilon_{n+2} - \varepsilon'_{n+2}},\ 1\right].$$

Пусть $\psi(n_0 - 2) = \delta^{\text{II}}$ и $\psi(n_0 - 1) = \delta^{\text{III}}$. Положим

$$\delta^{\text{IV}} = \max\left\{\delta^{\text{II}}, \delta^{\text{III}}, \frac{\varepsilon_{n_0}}{1 - \varepsilon_{n_0} - \varepsilon'_{n_0}}\right\}.$$

Предположим, что $\psi(n) \leqslant \delta^{\text{IV}}$ для некоторого произвольного $n \geqslant n_0 - 2$, и покажем, что $\psi(n+2) \leqslant \delta^{\text{IV}}$.

В самом деле из соотношения

$$\psi(n+2) \leqslant \varepsilon_{n+2} + \psi(n)(\varepsilon'_{n+2} + (1 - \varepsilon'_{n+2} - \varepsilon_{n+2})\psi(n))$$
$$\leqslant \varepsilon_{n+2} + \delta^{\text{IV}}(\varepsilon'_{n+2} + (1 - \varepsilon_{n+2} - \varepsilon'_{n+2})\delta^{\text{IV}})$$

вытекает, что $\psi(n+2) \leqslant \delta^{\text{IV}}$, так как δ^{IV} является решением неравенства (2). Пусть $\delta^{\text{V}} = \max\{\psi(1), \ldots, \psi(n_0 - 3)\}$ и $\delta^0 = \max\{\delta^{\text{IV}}, \delta^{\text{V}}\}$, тогда для всякого $n \geqslant 1$ имеет место $\psi(n) \leqslant \delta^0 < 1$.

Теперь покажем, что для всякого $\delta (0 < \delta < 1)$ существует такое n_2, что для каждого $n \geqslant n_2$ $\psi(n) \leqslant \delta < 1$.

Зафиксируем некоторое произвольное $\varepsilon(\delta^0<\varepsilon<1)$. Выберем такое n_1, что для каждого $n\geqslant n_1$ выполняются условия:

1) $\varepsilon'_{n+2}+\delta^0\leqslant\varepsilon$,

2) $\varepsilon_{n+2}\leqslant\frac{\delta(1-\varepsilon)}{2}$.

Это можно сделать в силу того, что ε_n и ε'_n, начиная с некоторого n, монотонно убывают и $\varepsilon_n\to 0$, $\varepsilon'_n\to 0$ при $n\to\infty$. На основании условий 1 и 2 и с учетом того, что $\psi(n)\leqslant\delta^0$, неравенство (1) при $n\geqslant n_1$ можно привести к виду:

$$\psi(n+2)\leqslant\frac{\delta(1-\varepsilon)}{2}+\varepsilon\psi(n).$$

Покажем, что существует c_3 такое, что для каждого $n\geqslant n_1$ имеет место неравенство

$$\psi(n)\leqslant\frac{\delta}{2}+c_3\varepsilon^{n/2}.$$

Выберем константы c_1 и c_2 так, чтобы выполнялись соотношения

$$\psi(n_1)=\frac{\delta}{2}+c_1\varepsilon^{n_1/2},$$

$$\psi(n_1+1)=\frac{\delta}{2}+c_2\varepsilon^{(n_1+1)/2}.$$

Пусть $c_3=\max\{c_1, c_2\}$. Предположим, что для некоторого $n\geqslant n_1$

$$\varphi(n)\leqslant\frac{\delta}{2}+c_3\varepsilon^{n/2}$$

тогда

$$\psi(n+2)\leqslant\frac{\delta(1-\varepsilon)}{2}+\varepsilon\left(\frac{\delta}{2}+c_3\varepsilon^{n/2}\right)=\frac{\delta}{2}+c_3\varepsilon^{(n+2)/2}.$$

Таким образом, для всех $n\geqslant n_1$

$$\psi(n)\leqslant\frac{\delta}{2}+c_3\varepsilon^{n/2}.$$

Пусть n_2 — наименьшее целое такое, что

$$c_3\varepsilon^{n_2/2}<\frac{\delta}{2}.$$

Тогда для всех $n\geqslant n_2$ $\psi(n)<\delta$.

2° Наконец покажем, что для каждого $n\geqslant 1$ имеет место неравенство $\psi(n)\leqslant c_6 2^{-n}$.

Решаем относительно c неравенство

$$\varepsilon_{n+2}+c\,2^{-n}(\varepsilon'_{n+2}+c\,2^{-n})\leqslant c\,2^{-n-2}. \tag{3}$$

Его решения удовлетворяют неравенствам

$$f_1(n)\leqslant c\leqslant f_2(n), \tag{4}$$

где $f_1(n)\to 2$ и $f_2(n)\sim 2^{-n+2}$ при $n\to\infty$. Выберем n_3 так, чтобы для $n\geqslant n_3$, $f_1(n)<3$, и в силу (4) можно выбрать n_4 так, чтобы для $n\geqslant n_4$ имело место $\delta\,2^{-n}\leqslant f_2(n)$, где δ константа $(0<\delta<1)$, n_5 выбираем так, чтобы $2^{-n}\psi(n)\leqslant \delta\,2^{-n}$ для каждого $n\geqslant n_5$. Пусть $n_6=\max\{n_4, n_5, n_3\}$ и $c_4=\max\{3, 2^{-n_6}\psi(n_6), 2^{-n_6-1}\psi(n_6+1)\}$. Предположим, что для некоторого произвольного $n\geqslant n_6$ имеет место $\psi(n)\leqslant c_4\,2^{-n}$, и покажем, что $\psi(n+2)\leqslant c_4\,2^{-n-2}$. В самом деле, из соотношения

$$\psi(n+2)\leqslant\varepsilon_{n+2}+\psi(n)(\varepsilon_{n+2}+(1-\varepsilon_{n+2}-\varepsilon'_{n+2})\,\psi(n))\leqslant\varepsilon_{n+2}+ \\ +c_4\,2^{-n}(\varepsilon_{n+2}+c_4\,2^{-n})\leqslant c_2\,2^{-n-2}$$

вытекает, что $\psi(n+2)\leqslant c_3\,2^{-n}$, так как c_4 является решением неравенства (3). Пусть $c_5=\max\{2^{-n}\psi(n)\}$ и $c_6=\max\{c_4,.c_5\}$, тогда $\psi(n)\leqslant c_6 2^{-n}$ для каждого $n\geqslant 1$.

Лемма доказана.

Определение. *Пусть* α, β *— вершины куба* B^n, $r(\alpha,\beta)=k$, $B^k(\alpha,\beta)$ *— подкуб, натянутый на вершины* α, β, *а* $B^{n-k}(\alpha)$ *и* $B^{n-k}(\beta)$ *подкубы, дополнительные к* $B^k(\alpha,\beta)$ *относительно вершин* α *и* β *соответственно. Цепь* $[\alpha, \gamma_1, \ldots, \gamma_{k+2i-1}, \beta]$ *такую, что* $r(\alpha,\gamma_i)=r(\gamma_{i+k}, \beta)=i$, $r(\gamma_i, \gamma_{k+i})=k$, *будем называть стандартной цепью длины* $k+2i$, *связывающей* α *с* β.

Грубо говоря, идя по стандартной цепи, мы выходим из α, совершаем i шагов по одному из оснований цилиндра $Z^k(\alpha,\beta)$, затем делаем k шагов по образующей $B^k(\gamma_i, \gamma_{k+i})$ i-того слоя цилиндра и, наконец, проходим i шагов по другому основанию, попадая в вершину β (см. рис. 1, где кратные ребра, соединяющие произвольные вершины, означают k-мерный подкуб, натянутый на эти вершины).

Стандартной цепью длины k между вершинами α, β такими, что $r((\alpha,\beta)=$ $=k$, является по определению всякая цепь $[\alpha,\beta]$ длины k. На рис. 1 цепь $[\alpha, \gamma_1, \ldots, \gamma_{k+1}, \beta]$ является стандартной цепью длины $k+2$ а цепь $[\alpha, \delta_1, \ldots, \delta_{k+3}, \beta]$ стандартной цепью длины $k+4$.

Определение. *Пусть* α, $\beta\in B^n$ *и* $r(\alpha,\beta)=k$, $Z_2^k(\alpha,\beta)$ *— цилиндр радиуса 2 с осью* $B^k(\alpha,\beta)$. *Пусть* I *— направление оси, а* $\bar I$ *— дополнительное к* I *направление.*

Рассмотрим вершины $\gamma_1\in B_2^{n-k}(\alpha,\cdot\bar I)$ *и* $\gamma_2\in B_2^{n-k}(\beta,\bar I)$ *такие, что* $r(\gamma_1,\gamma_2)=$ k. *Пару* (γ_1,γ_2) *будем называть достижимой парой вершин второго слоя* *цилиндра $Z_2^k(\alpha, \beta)$ для графа $G_n(1/2)$, если существуют вершины $\delta_1 \in B_1^{n-k}(\alpha, \bar{I})$, $\delta_2 \in B_1^{n-k}(\beta, \bar{I})$, что в графе $G_n(1/2)$ существуют ребра (δ_1, γ_1) и (δ_2, γ_2). Будем говорить, что пара (δ_1, δ_2) порождает достижимую пару вершин (γ_1, γ_2). Пусть $\delta_1 \in B_i^{n-k}(\alpha, \bar{I})$, $\delta_2 \in B_i^{n-k}(\beta, \bar{I})$, $r(\alpha, \beta) = k$.*

Пару вершин (δ_1, δ_2) будем называть (σ, τ)-парой 1-ого слоя цилиндра, причем $(\sigma, \tau \in \{0, 1\})$, и $\sigma = \tau = 1$ если в $G_n(1/2)$ существуют ребра (α, δ_1) и (β, δ_2) соответственно, а $\sigma = \tau = 0$ в противном случае.

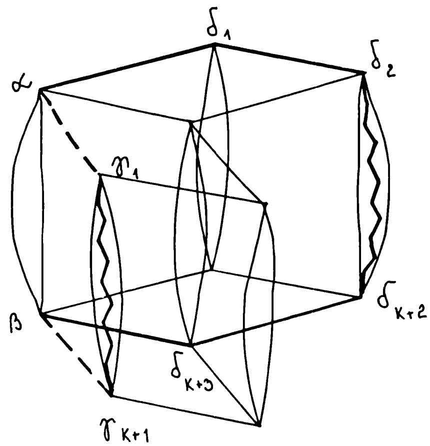

Рис. 1

Лемма 2. Пусть $\alpha, \beta \in B^n$, $r(\alpha, \beta) = k$, $Z_2^k(\alpha, \beta)$ — цилиндр с осью $B^k(\alpha, \beta)$. Пусть $V_{\sigma\tau}$ — множество достижимых (σ, τ)-пар $(\sigma, \tau \in \{0, 1\})$ первого слоя цилиндра $Z_2^k(\alpha, \beta)$, и пусть $\nu = \nu(n-k, V_{11}, V_{10}, V_{01})$ — число достижимых пар второго слоя. Пусть еще $|V_{11}| = i$, $|V_{10}| = s$, $|V_{01}| = t$. Тогда

$$\nu = i\left(n - k - \frac{i+1}{2}\right) + st.$$

Доказательство. Пусть $B_1^{n-k}(\alpha, \bar{I})$ — сфера, имеющая направление $\bar{I}$, дополнительное к направлению оси цилиндра $Z_2^k(\alpha, \beta)$. Обозначим через $A_{\sigma\tau}$ множество тех вершин сферы $B_1^{n-k}(\alpha, \bar{I})$, которые входят хотя бы в одну (σ, τ)-пару первого слоя цилиндра $(\sigma, \tau \in \{0, 1\})$. Пусть D_1 — множество вершин α сферы $B_2^{n-k}(\alpha, \bar{I})$, для которых существует вершина $\beta \in A_{11}$, соседняя с α в графе $G_n(1/2)$, а D_2 — множество тех вершин α сферы $B_2^{n-k}(\alpha, \bar{I})$, для которых существуют вершины $\gamma \in A_{10}$ и $\delta \in A_{01}$, соседние с α в графе $G_n(1/2)$. Ясно, что $\nu = |D_1 \cup D_2|$. Утверждение вытекает теперь из следующих очевидных фактов:

1) $D_1 \cap D_2 = \emptyset$;

2) $|D_2| = |A_{10}|\,|A_{01}| = st$;

3) $|D_1| = i\left(n - k - \dfrac{i+1}{2}\right)$.

Определение. *Пусть $r(\alpha, \beta) = k$, и пусть в графе $G_n(1/2)$ нет стандартных цепей $[\alpha, \beta]$ длин k, $k+2$, $k+4$. Тогда пару (α, β) будем называть плохой парой вершин графа $G_n(1/2)$.*

Вероятность того, что пара (α, β) такая, что $r(\alpha, \beta) = k$, является плохой парой графа $G_n(1/2)$, обозначим через $\psi(n, k)$.

Из соображений симметрии ясно, что $\psi(n, k)$ зависит лишь от n и k и не зависит от того, какова именно пара (α, β).

Пусть $\xi(n, k)$ — случайная величина, принимающая значение 1 с вероятностью $\psi(n, k)$ и значение 0 с вероятностью $1 - \psi(n, k)$.

Пусть M_{ξ_n} математическое ожидание числа плохих пар вершин графа $G_n(1/2)$, тогда

$$M_{\xi_n} = 2^{n-1} \sum_{k=2}^{n} C_n^k \, \psi(n, k).$$

Лемма 3. $M_{\xi_n} \leqslant c_7\, 2^n$.

Доказательство. Сначала покажем, что $\psi(n, k) \leqslant c_9\, 2^{-n}$ для всех k. Пусть $Z_2^k(\alpha, \beta)$ — цилиндр с осью $B^k(\alpha, \beta)$ и $G_n(1/2)$ такой, что число $(1,1)$-пар в первом слое цилиндра равно i, число $(1,0)$-пар равно s, число $(0,1)$-пар равно t, а среди

$$\nu = i\left(n - k - \frac{i+1}{2}\right) + st$$

достижимых пар второго слоя цилиндра ровно j пар является $(1,1)$-парами. Оценим сверху вероятность того, что граф имеет указанный вид. Отметим следующее.

а) Поскольку в графе $G_n(1/2)$ не должно быть стандартных цепей длин k, $k+2$, $k+4$, то в подкубе $B^k(\alpha, \beta)$, а также в подкубах $B^k(\gamma_1, \gamma_2)$, где (γ_1, γ_2) является $(1,1)$-парой первого слоя или достижимой $(1,1)$-парой второго слоя, граф $G_n(1/2)$ должен быть устроен так, чтобы у него не было цепей $[\alpha, \beta]$ и, соответственно, цепей $[\gamma_1, \gamma_2]$ длины k. Поэтому вероятность появления этого графа на каждом из подкубов равна $\psi(k)$.

б) Вероятность того, что на сферах $B_1^{n-k}(\alpha, \bar{I})$ и $B_1^{n-k}(\beta, \bar{I})$ оснований цилиндра можно граф устроить так, чтобы число $(1,1)$-пар было равно i, число $(1,0)$-пар — s, число $(0,1)$-пар — t, равна

$$C_{n-k}^i C_{n-k-i}^s C_{n-k-i-s}^t \, 2^{-2(n-k)},$$

(C_n^r — обозначает число сочетаний из n элементов по r).

в) Вероятность того, что на v достижимых парах второго слоя можно граф определить так, чтобы он имел точно j достижимых $(1,1)$-пар, равна

$$C_v^j\, 3^v.$$

Теперь ясно, что

$$\psi(n,k)=\sum_{i=0}^{n-k}\sum_{s=0}^{n-k-i}\sum_{t=0}^{n-k-i-s}\sum_{j=0}^{v} C_{n-k}^i C_{n-k-i}^s C_{n-k-i-s}^t C_v^j (1/2)^{2(n-k)}\times$$

$$\times(1/4)^j(3/4)^{v-j}\psi(k)^{1+i+j},\quad v=i\left(n-k-\frac{i+1}{2}\right)+st$$

$$\psi(n,k)=\sum_{i=0}^{n-k}\sum_{s=0}^{n-k-i}\sum_{t=0}^{n-k-i-s} C_{n-k}^i C_{n-k-i}^s C_{n-k-i-s}^t (1/2)^{2(n-k)}(3/4+\psi(k)/4)^v\times$$

$$\times\psi^{1+i}(k)=\psi(k)(1/2)^{2(n-k)}\sum_{i=0}^{n-k}C_{n-k}^i\psi^i(k)\left(\frac{3+\psi(k)}{4}\right)^{i[n-k-(i+1/2)]}\times$$

$$\times\sum_{s=0}^{n-k-i}C_{n-k-i}^s\sum_{t=0}^{n-k-i-s}C_{n-k-i-s}^t((3+\psi(k))/4)^{st}=\psi(k)(1/2)^{2(n-k)}\times$$

$$\times\sum_{j=0}^{n-k}C_{n-k}^i\,\psi^i(k)((3+\psi(k))/4)^{i[n-k-(i+1/2)]}\sum_{s=0}^{n-k-i}C_{n-k-i}^s(1+((3+\psi(k))/4)^s)^{n-k-i-s}.$$

Теперь оценим сумму по s. Введем обозначение

$$a=1\Big/\left(\frac{3+c_0}{4}\right)\quad\text{и}\quad z_0=2\log_a(n-k-i),$$

где c_0 — константа меньше 1 и больше 0.

Внутренная сумма по s не превосходит

$$2^{n-k-i}+\sum_{1\leqslant s\leqslant z_0}C_{n-k-i}^s\left(1+\frac{3}{4}+\frac{c_0}{4}\right)^{n-k-i-s}+\sum_{z_0<s}^{n-k-i}C_{n-k-i}^s\times$$

$$\times(1+(1/n-k-i)^2)^{n-k-i-s}\leqslant c_8\,2^{n-k-i}.$$

Поэтому

$$\psi(n,k)\leqslant c_8\psi(k)(1/2)^{2(n-k)}\sum_{i=0}^{n-k}C_{n-k}^i\psi^i(k)\left(\frac{3+\psi(k)}{4}\right)^{i[n-k-(i+1/2)]}2^{n-k-i}\leqslant$$

$$\leqslant c_8\psi(k)\sum_{i=0}^{n-k}C_{n-k}^i\psi^i(k)\left(\frac{3+\psi(k)}{4}\right)^{i[n-k-(i+1/2)]}2^{-n+k-i}\leqslant c_9(1/2)^n,$$

$$M_{\xi_n}\leqslant c_9\,2^{n-1}\sum_{k=2}^{n}C_n^k(1/2)^n\leqslant c_7\,2^n.$$

Лемма доказана.

Замечание. *Легко можно показать, что* $M_{\xi_n}\geqslant 1$.

Лемма 4. Пусть

$$\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$$

— последовательность случайных величин таких, что $\xi_n \geqslant 0$ с вероятностью 1. Пусть $\eta(n) \to \infty$ при $n \to \infty$, тогда с вероятностью, стремящейся к 1, при $n \to \infty$

$$\xi_n < \eta(n) M_{\xi_n}.$$

Доказательство. Неравенство доказывают следующие соотношения:

$$M_{\xi_n} \geqslant M(\xi_n, \xi_n \geqslant \eta(n) M_{\xi_n}) \geqslant \eta(n) M_{\xi_n} M(1, \xi_n \geqslant \eta(n) M_{\xi_n}) =$$
$$= \eta(n) M_{\xi_n} P(\xi_n \geqslant \eta(n) M_{\xi_n}),$$

отсюда

$$P(\xi_n \geqslant \eta(n) M_{\xi_n}) \leqslant \frac{1}{\eta(n)}.$$

Лемма доказана.

Следствие 1. *Пусть случайная величина ξ_n принимает целочисленные неотрицательные значения, а $M_{\xi_n} \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда с вероятностью, стремящейся к 1 при $n \to \infty$, ξ_n принимает значение 0.*

Следствие 2. *Пусть $\eta(n) \to \infty$ при $n \to \infty$, число плохих пар вершин $q(n)$ графа $G_n(1/2)$, удовлетворяет неравенству:*

$$q(n) \leqslant \eta(n)\, 2^n$$

где n — размер куба B^n.

Утверждение вытекает из лемм 3 и 4.

Мы можем теперь сделать некоторые выводы о числе компонент связности и их мощности в графе $G_n(1/2)$.

Примечание. *В дальнейшем символом $\eta(n)$ будут обозначаться такие функции, что $\eta(n) \to \infty$ и $\eta(n) = o(n/\log n)$ при $n \to \infty$.*

Лемма 5. *Пусть $K_1, K_2, \ldots, K_t$ — компоненты связности графа $G_n(1/2)$. Обозначим через $\varkappa_i$ число вершин компоненты K_i, $i = 1, 2, \ldots, t$. Будем считать, что $\varkappa_1 \geqslant \varkappa_2 \geqslant \ldots \geqslant \varkappa_t$. Тогда для достаточно больших n и любого графа $G_n(1/2)$ справедливы неравенства:*

1) $\varkappa_1 \geqslant 2^n - c_{10}\eta(n)$;
2) $t \leqslant c_{10}\eta(n)$;
3) $\varkappa_i \leqslant c_{10}\eta(n)$, $\quad i = 2, 3, \ldots, t$.

Доказательство. Очевидно, всякая пара (α, β) вершин графа $G_n(1/2)$ такая, что $\alpha \in K_1$, $\beta \notin K_1$, является плохой парой вершин графаПоэтому $\eta(n)2^n \geqslant q(n) \geqslant \varkappa_1(2^n - \varkappa_1)$ и следовательно, $\varkappa_1^2 - \varkappa_1 2^n + \eta(n)2^n \geqslant 0$. Пусть $\varkappa_1'$ и $\varkappa_1''$ являются корнями квадратного уравнения: $\varkappa_1^2 - \varkappa_1 2^n + \eta(n)2^n = 0$. Предположим, что $\varkappa_1' \geqslant \varkappa_1''$. Квадратное неравенство эквивалентно неравенству:

$(\varkappa-\varkappa_1')(\varkappa-\varkappa_1'')\geqslant 0$ и справедливо тогда и только тогда, когда $\varkappa\geqslant\varkappa_1''$ или $\varkappa\leqslant\varkappa_1'$. Пользуясь неравенством

$$(1-\alpha)^{1/2}\leqslant\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)$$

и учитывая, что $G_n(1/2)$ имеет 2^n вершин, получаем, что либо $\varkappa_1\geqslant\geqslant 2^n-c_{10}\eta(n)$, либо $\varkappa_1\leqslant c_{10}\eta(n)$. Покажем, что второе неравенство не может иметь места. В самом деле, если $\varkappa_1\leqslant c_{10}\eta(n)$, то $t\geqslant 2^n\varkappa_1^{-1}\geqslant c_{10}2^n/\eta(n)$. С другой стороны, $\eta(n)2^n\geqslant q(n)\geqslant C_t^2\geqslant c_{10}2^{2n}/(\eta(n))^2$. Последнее противоречит соглашению о том, что $\eta(n)=o(n/\log n)$. Неравенство 1, а вместе с тем и неравенства 2, и 3, доказаны.

В дальнейшем компоненту графа $G_n(1/2)$, содержащую наибольшее число вершин, будем называть *главной компонентой* и обозначать через K_1, а компоненты, содержащие меньше вершин, чем главная, будем называть *второстепенными*.

Пусть $K\subseteq B^n$, $m(K)$ — число ребер в подграфе, порожденном множеством вершин K. *Сечением, порожденным множеством K,* будем называть множество ребер графа $G_n(1/2)$, соединяющих вершины из K с вершинами из $B^n\backslash K$. Поскольку каждой вершине графа $G_n(1/2)$ инцидентно ровно n ребер, число ребер в сечении, порожденном множеством K, равно $n|K|-2m(K)$.

Лемма 6. *Число ребер произвольного k-вершинного подграфа графа B^n, $1\leqslant k\leqslant 2^n$, не превосходит* $(1/2)k\log k$.

Доказательство см. [1].

Лемма 7. *Пусть M_{ξ_n} — математическое ожидание числа компонент связности графа $G_n(1/2)$, мощности которых удовлетворяют условию $2\leqslant k\leqslant n/2\log.n$. Тогда,*

$$\lim_{n\to\infty}M_{\xi_n}=0.$$

Доказательство. Пусть $\psi'(n,k)$ — вероятность того, что граф $G_n(1/2)$ содержит заданный подграф K с k вершинами в качестве связной компоненты. Из предыдущей леммы ясно, что

$$\psi'(n,k)\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^{nk-k\cdot\log k}.$$

Пусть $q(n,k)$ — число связных подграфов K куба B^n, имеющих ровно k вершин. Заметим, что каждому такому подграфу можно взаимно однозначно сопоставить дерево с корнем такое, что корню приписано одно из чисел $1,2,\ldots,n$. Число неизоморфных корневых деревьев с k вершинами не превосходит 4^{k-1} (см. [2]). Поэтому $q(n,k)\leqslant(4n)^{k-1}2^n$. Очевидно, что

$$M_{\xi_n} \leqslant \sum_{2\leqslant k\leqslant n/(2\log n)} q(n,k)(1/2)^{nk-k\cdot\log k} \leqslant$$

$$\leqslant q(n,k)(1/2)^{nk-(n/2\log n)\log(n/2\log n)} \leqslant (4n)^{n/(2\log n)}/2^{[(n^2/2\log n)+n]} \to 0, \quad n\to\infty.$$

Из выше доказанных лемм вытекает

Теорема. *Граф $G_n(1/2)$ с вероятностью, стремящейся к 1 при $n\to\infty$, устроен следующим образом:*

а) *Имеется одна главная компонента с числом вершин, асимптотически равным 2^n.*

б) *Число компонент связности графа $G_n(1/2)$ ограничено сверху произвольной слабо растущей функцией $\eta(n)$, удовлетворяющей условию $\eta(n)\to\infty$ при $n\to\infty$ и $\eta(n)=o(n/\log n)$, и все компоненты связности графа $G_n(1/2)$, отличные от главной, представляют изолированные вершины.*

Лемма 8. *Пусть k — константа, не зависящая от n. Пусть $\psi_1(n,k)$ — вероятность того, что $G_n(1/2)$ имеет не менее k изолированных вершин. Тогда*

$$\psi_1(n,k) \geqslant \frac{1+o(1)}{k!\,2^k}.$$

Доказательство. Число способов, которыми можно выбрать подмножество вершин куба B^n, состоящее из k изолированных вершин, не меньше чем

$$\frac{1}{k!}\prod_{i=0}^{k-1}(2^n-(n+1)i).$$

Вероятность того, что $G_n(1/2)$ имеет k заданных изолированных вершин в графе $G_n(1/2)$ не меньше, чем 2^{-kn-k}. Ясно, что

$$\psi_1(n,k) \geqslant \frac{1}{k!}\prod_{i=0}^{k-1}(2^n-(n+1)i)\,2^{-k(n+1)} \geqslant 2^{-k(n+1)}(2^n-(k-1)(n+1))^k\,\frac{1}{k!}.$$

Утверждение доказано.

Лемма 8 показывает, что утверждение относительно изолированных вершин графа $G_n(1/2)$ нельзя усилить, заменив растущую функцию $\eta(n)$ на константу.

Замечаем, что резултат, касающийся связности графа $G_n(q)$ при $q<1$ 2, можно получить аналогичным образом, как здесь.

ЛИТЕРАТУРА

[1] БУРТИН, Ю. Д.: О вероятности связности случайного подграфа n-мерного куба, Проблемы передачи информации, 1977, т. 13, вып. 2, 90–95.
[2] ЛУПАНОВ, О. Б.: О синтезе некоторых классов управляющих систем, Проблемы кибернетики, вып. 10, М., Физматгиз, 1963, 63–97.
[3] САПОЖЕНКО, А. А.: Геометрическое строение почти всех функций алгебры логики, Проблемы кибернетики, вып. 30, М., Наука, 1975, 227–261.
[4] ТОМАН, Э.: Геометрическое строение случайных булевых функций, Проблемы кибернетики, вып. 35., М., Наука, 1979, 111–132.

Поступило 25. 8. 1978

Katedra teoretickej kybernetiky
Prírodovedeckej fakulty Univerzity Komenského
Mlynská dolina
816 31 Bratislava