Eduard Boďa

Einige Eigenschaften der Parameterideale und ihre Anwendungen für Buchsbaum Ringe

Mathematica Slovaca, Vol. 29 (1979), No. 3, 239--244

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/136213`

Math. Slovaca 29, 1979, No. 3

EINIGE EIGENSCHAFTEN DER PARAMETERIDEALE UND IHRE ANWENDUNGEN FÜR BUCHSBAUM RINGE

EDUARD BOĎA

Sei $(A, \boldsymbol{m})$ ein lokaler noetherscher Ring (kommutativ mit Einselement) mit $\dim(A) = d$.

Definition 1. *Ein System $\{a_1, \ldots, a_d\}$ der Elemente von $\boldsymbol{m}$ heisst ein Parametersystem in A, wenn $\boldsymbol{q} = (a_1, \ldots, a_d)$ ein $\boldsymbol{m}$-primäres Ideal ist. Ein $\boldsymbol{m}$-primäres Ideal $\boldsymbol{q}$, das von einem Parametersystem erzeugt wird, heisst ein Parameterideal.*

Für ein beliebiges Ideal $\boldsymbol{a} \subset A$ bezeichnen wir mit $\dim(\boldsymbol{a})$ die Dimension des Ringes $A/\boldsymbol{a}$. $\mathrm{Ass}(\boldsymbol{a})$ bezeichne die Menge aller Primideale $\boldsymbol{p}$, die zu einer Primärzerlegung von $\boldsymbol{a}$ gehören. Ferner vereinbaren wir

$$\mathrm{Assh}(\boldsymbol{a}) = : \{\boldsymbol{p} \in \mathrm{Ass}(\boldsymbol{a}); \dim(\boldsymbol{p}) = \dim(\boldsymbol{a})\}.$$

$U(\boldsymbol{a})$ bezeichne den Durchschnitt aller Primärideale von $\boldsymbol{a}$, deren zugehörige Primideale in $\mathrm{Assh}(\boldsymbol{a})$ liegen.

Lemma 1. Sei $\boldsymbol{a} \subset A$ ein Ideal mit $\dim(\boldsymbol{a}) = t$ und $x \in \boldsymbol{m}$. Wenn $x \notin \boldsymbol{p}$ für alle $\boldsymbol{p} \in \mathrm{Assh}(\boldsymbol{a})$ ist, dann gilt

$$\dim((\boldsymbol{a}, x)) = t - 1.$$

Beweis. Nach der Voraussetzung ist $\bar{x} \notin \bar{\boldsymbol{p}}$ für alle $\bar{\boldsymbol{p}} \in \mathrm{Assh}(\bar{0})$, wobei $\bar{x} = (x + \boldsymbol{a})/\boldsymbol{a}$ und $(\bar{0})$ ein Nullideal in $\bar{A} = A/\boldsymbol{a}$ ist. Nach ([4], Ch. III B, Cor. 5) gilt dann

$$\dim(\bar{A}/(\bar{x})) = t - 1.$$

Da $\bar{A}/(\bar{x}) = A/(x, \boldsymbol{a})$ ist ([1], Ch. II, Pr. 2, 1), gilt auch

$$\dim(A/(x, \boldsymbol{a})) = t - 1.$$

Damit ist Lemma 1 bewiesen.

Lemma 2. *Sei $\boldsymbol{q} = (a_1, \ldots, a_d)$ ein Parameterideal in A. Dann gilt für alle $k = 0, \ldots, d$ und für alle Primideale $\boldsymbol{p} \in \mathrm{Assh}((a_1, \ldots, a_k))$*

(i) $a_{k+1} \notin \mathfrak{p}$
(ii) $\dim((a_1, \ldots, a_k)) = \dim(\mathfrak{p}) = d - k$

(für $k = 0$ setzen wir $(a_1, \ldots, a_k) = :(0)$).

Beweis. Die Behauptungen folgen aus ([6], Vol. I, Ch. VIII).

Hilfssatz 1. *Sei $\mathfrak{q} = (a_1, \ldots, a_d)$ ein Parameterideal in A. Dann existiert für alle $k = 0, \ldots, d$ ein Primideal $\mathfrak{p} \in \operatorname{Assh}((a_1, \ldots, a_k))$ mit $h(\mathfrak{p}) = k$.*

($h(\mathfrak{p})$ bezeichnet die Höhe von $\mathfrak{p}$, siehe [1], Ch. XI).

Beweis. Wir benutzen die Induktion nach k. Für $k = 0$ ist die Aussage trivial, da für $k = 0$ $(a_1, \ldots, a_k) = (0)$ ist. Sei $\mathfrak{p} \in \operatorname{Assh}((a_1, \ldots, a_k))$ mit $h(\mathfrak{p}) = k$ und $0 < k < d$. Da $a_{k+1} \notin \mathfrak{p}$ ist (Lemma 2), gilt nach Lemma 1 und 2 (ii)

$$\dim((a_{k+1}, \mathfrak{p})) = d - k - 1,$$

das heisst: Es gibt ein Primideal $\mathfrak{p}'$ mit $\dim(\mathfrak{p}') = d - k - 1$ und $\mathfrak{p}' \supset (a_1, \ldots, a_{k+1})$, $\mathfrak{p}' \supsetneqq \mathfrak{p}$. Da $\dim((a_1, \ldots, a_{k+1})) = d - k - 1$ ist, gilt $\mathfrak{p}' \in \operatorname{Assh}((a_1, \ldots, a_{k+1}))$ und $h(\mathfrak{p}') = k + 1$. Damit ist der Hilfssatz 1 bewiesen.

Hilfssatz 2. *Sei $\mathfrak{q} = (a_1, \ldots, a_d)$ ein Parameterideal in A. Dann existiert für alle $k = 1, \ldots, d$ und für alle Primideale $\mathfrak{p}_k \in \operatorname{Assh}((a_1, \ldots, a_k))$ mit $h(\mathfrak{p}_k) = k$ eine Kette*

$$\mathfrak{p}_k \supsetneqq \mathfrak{p}_{k-1} \supsetneqq \cdots \supsetneqq \mathfrak{p}_1 \supsetneqq \mathfrak{p}_0$$

von Primidealen mit $\mathfrak{p}_i \in \operatorname{Assh}((a_1, \ldots, a_i))$ für alle $i = 0, \ldots, k$.

Beweis. Wir führen die Induktion nach k. Sei $\mathfrak{p}_1 \in \operatorname{Assh}((a_1))$ mit $h(\mathfrak{p}_1) = 1$. Dann ist $\mathfrak{p}_1 \supsetneqq \mathfrak{p}_0$ und $h(\mathfrak{p}_0) = 0$. Da $\dim(\mathfrak{p}_1) = d - 1$ ist (Lemma 2), gilt $\dim(\mathfrak{p}_0) = d$, d. h. $\mathfrak{p}_0 \in \operatorname{Assh}(0)$.

Sei jetzt $\mathfrak{p}_{k+1} \in \operatorname{Assh}((a_1, \ldots, a_{k+1}))$ mit $h(\mathfrak{p}_{k+1}) = k + 1$ und $0 < k \leqq d - 2$. Dann ist der Ring $A_{\mathfrak{p}_{k+1}}$ noethersch und lokal mit $\dim(A_{\mathfrak{p}_{k+1}}) = k + 1$ und mit dem Parameterideal $(a_1, \ldots, a_{k+1}) \cdot A_{\mathfrak{p}_{k+1}}$. Betrachten wir das Ideal $(a_1, \ldots, a_k)$ in dem Ring $A_{\mathfrak{p}_{k+1}}$. Nach Hilfssatz 1 existiert ein Primideal $\mathfrak{p} \in \operatorname{Assh}((a_1, \ldots, a_k) \cdot A_{\mathfrak{p}_{k+1}})$ mit $h(\mathfrak{p}) = k$, d.h. es existiert ein Primideal $\mathfrak{p}_k \in \operatorname{Assh}((a_1, \ldots, a_k))$ mit $h(\mathfrak{p}_k) = k$ und $\mathfrak{p}_k \subsetneqq \mathfrak{p}_{k+1}$. Auf Grund der Induktionsvoraussetzung existiert dann die Kette

$$\mathfrak{p}_{k+1} \supsetneqq \mathfrak{p}_k \supsetneqq \cdots \supsetneqq \mathfrak{p}_1 \supsetneqq \mathfrak{p}_0$$

von Primidealen mit $\mathfrak{p}_i \in \operatorname{Assh}((a_1, \ldots, a_i))$ für alle $i = 0, \ldots, k + 1$. Damit ist der Hilfssatz 2 bewiesen.

Für ein beliebiges Parameteriadeal $\mathfrak{q} = (a_1, \ldots, a_d)$ in A definieren wir für alle $i = 0, \ldots, d$ folgende Ideale $\mathfrak{a}_i$ durch den sgn. U-proces:

Für $i = 0$ sei $\mathfrak{a}_0 = (0)$.
Für $0 < i \leqq d$ sei $\mathfrak{a}_i = (a_i) + U(\mathfrak{a}_{i-1})$.

Es ist klar, dass $(a_1, \dots, a_i) \subset \boldsymbol{a}_i$ und

$$\dim (\boldsymbol{a}_i) = d - i \quad \text{für alle} \quad i = 0, \dots, d \quad \text{ist.}$$

Satz. 1. *Sei $\boldsymbol{q} = (a_1, \dots, a_d)$ ein Parameterideal in A. Dann ist für alle $i = 0, \dots, d$*

$$\text{Assh}\,(\boldsymbol{a}_i) = \{\boldsymbol{p} \in \text{Assh}\,((a_1, \dots, a_i))\,;\ h(\boldsymbol{p}) = i\}\,.$$

Beweis. Wir benutzen die Induktion nach k. Für $k = 0$ ist die Aussage trivial. Sei jetzt

$$\text{Assh}\,(\boldsymbol{a}_i) = \{\boldsymbol{p} \in \text{Assh}\,((a_1, \dots, a_i))\,;\ h(\boldsymbol{p}) = i\}$$

für $0 < i < d$ und sei $\boldsymbol{p} \in \text{Assh}\,(\boldsymbol{a}_{i+1})$. Dann ist

$$\boldsymbol{p} \in \text{Assh}\,((a_1, \dots, a_{i+1})) \text{ und es gilt } \boldsymbol{p} \supset U(\boldsymbol{a}_i), \text{ d. h.}$$

$\boldsymbol{p} \supsetneqq \boldsymbol{p}' \in \text{Assh}\,(\boldsymbol{a}_i)$. Da $h(\boldsymbol{p}') = i$ (nach Induktionsvoraussetzung) und $h(\boldsymbol{p}) \leqq i + 1$ ([1], Ch. XI, Cor. 11, 16) ist, gilt $h(\boldsymbol{p}) = i + 1$. Sei umgekehrt $\boldsymbol{p} \in \text{Assh}\,((a_1, \dots, a_{i+1}))$ mit $h(\boldsymbol{p}) = i + 1$. Auf Grund des Hilfssatzes 2 existiert ein Primideal

$$\boldsymbol{p}' \in \text{Assh}\,((a_1, \dots, a_i)) \text{ mit } h(\boldsymbol{p}') = i \text{ und } \boldsymbol{p} \supsetneqq \boldsymbol{p}'\,.$$

Nach Induktionsvoraussetzung ist $\boldsymbol{p}' \in \text{Assh}\,(\boldsymbol{a}_i)$, d. h.

$$\boldsymbol{p} \supsetneqq \boldsymbol{p}' \supset U(\boldsymbol{a}_i)\,.$$

Da $\dim (\boldsymbol{p}) = d - i - 1$ und $a_{i+1} \in \boldsymbol{p}$ ist, gilt

$$\boldsymbol{p} \in \text{Assh}\,((a_{i+1}, U(\boldsymbol{a}_i))) = \text{Assh}\,(\boldsymbol{a}_{i+1})\,.$$

Damit ist der Satz 1 bewiesen.

Jetzt wollen wir einige Anwendungen für Buchsbaum Ringe geben. Sei $(A, \boldsymbol{m})$ lokaler noetherscher Ring (kommutativ mit Einselement).

Definition 2. *Ein System $\{a_1, \dots, a_r\}$ von Elementen aus $\boldsymbol{m}$ heisst eine schwache A-Sequenz, wenn für jedes $i = 1, \dots, r$*

$$\boldsymbol{m} \cdot ((a_1, \dots, a_{i-1}) : a_i) \subset (a_1, \dots, a_{i-1}) \text{ gilt.}$$

(Für $i = 1$ setzen wir $(a_1, \dots, a_{i-1}) = : (0)$).

Definition 3. *A heisst ein Buchsbaum Ring, wenn die folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt sind:*

(i) *Jedes Parametersystem in A ist eine schwache A-Sequenz.*
(ii) *Es gibt eine von q unabhängige Invariante $I(A)$ des Ringes A, so dass für jedes Parameterideal $\boldsymbol{q} \subset A$ gilt*

$$l(A/\boldsymbol{q}) - e_0(\boldsymbol{q}, A) = I(A)\,,$$

wobei $l(B)$ die Länge von A-Modul B bezeichnet und $e_0(\mathfrak{q}, A)$ der Leitkoeffizient von Hilbert—Samuel Polynom $l(A/\mathfrak{q}^n)$ ist (sgn. dynamische Multiplizität von $\mathfrak{q}$ in A, siehe [5] *und* [6], Vol. II, Ch. VIII, § 10).

Hilfssatz 3. *Sei $\{a_1, \ldots, a_r\}$ eine schwache A-Sequenz in lokalem noetherschem Ring A mit* $\dim(A) = d$, *wobei $r \leqq d$ ist. Dann gilt für alle $k = 0, \ldots, r$ und für alle* $\mathfrak{p} \in \operatorname{Assh}((a_1, \ldots, a_k))$ $h(\mathfrak{p}) = k$.

Beweis. Wir führen die Induktion nach k. Für $k = 0$ ist die Aussage trivial. Sei jetzt $h(\mathfrak{p}) = k$ für alle Primideale $\mathfrak{p} \in \operatorname{Assh}((a_1, \ldots, a_k))$ und $\mathfrak{p}' \in \operatorname{Assh}((a_1, \ldots, a_{k+1}))$, wobei $0 < k < r$ ist. Wenn $\mathfrak{p}' = \mathfrak{m}$ ist, dann gilt $k + 1 \geqq d$ ([1], Ch. XI, Prop. 11, 7 und 11, 10). Da $k + 1 \leqq r \leqq d$ ([5], Korollar 4) und $h(\mathfrak{m}) = d$ ist, gilt $h(\mathfrak{p}') = k + 1$. Sei jetzt $\mathfrak{p}' \neq \mathfrak{m}$. Nach ([5], Hilfssatz 3) existiert $\mathfrak{p} \in \operatorname{Assh}((a_1, \ldots, a_k))$ mit $\mathfrak{p}' \supsetneqq \mathfrak{p}$. Auf dem Grund der Induktionsvoraussetzung ist dann $h(\mathfrak{p}') \geqq k + 1$. Da $h(\mathfrak{p}') \leqq k + 1$ ist ([1], Ch. XI, Cor. 11, 16), gilt $h(\mathfrak{p}') = k + 1$. Damit ist der Hilfssatz 3 bewiesen.

Satz 2. *Sei $(A, \mathfrak{m})$ ein Buchsbaum Ring mit* $\dim(A) = d$ *und $\mathfrak{q} = (a_1, \ldots, a_d)$ ein Parameterideal in A. Dann gilt*

(i) $\operatorname{Assh}(\mathfrak{a}_k) = \operatorname{Assh}((a_1, \ldots, a_k))$ *für alle* $k = 0, \ldots, d$

(ii) $U((a_1, \ldots, a_k)) \subset U((a_1, \ldots, a_{k+1}))$ *für alle* $k = 0, \ldots, d - 2$

(iii) $U((a_1, \ldots, a_k)) = U(\mathfrak{a}_k)$ *für alle* $k = 0, \ldots, d - 1$.

Beweis. Die Behauptung (i) folgt aus dem Hilfssatz 3 und Satz 1.

(ii) Da A ein Buchsbaum Ring ist, folgt es aus ([5], Satz 5), dass für alle $k = 0, \ldots, d - 1$ das Ideal $(a_1, \ldots, a_k)$ eine Primärzerlegung $(a_1, \ldots, a_k) = U((a_1, \ldots, a_k)) \cap {}^0\mathfrak{q}$ hat, wobei ${}^0\mathfrak{q}$ $\mathfrak{m}$-primär ist. Sei jetzt $x \in U((a_1, \ldots, a_k))$, wobei $k \leqq d - 2$ ist. Dann ist

$$(a_1, \ldots, a_k) : x \not\subset \mathfrak{p}, \text{ für alle Primideale } \mathfrak{p} \neq \mathfrak{m},$$

$$\text{d.h. } (a_1, \ldots, a_k) : x \not\subset \mathfrak{p} \text{ für alle } \mathfrak{p} \in \operatorname{Assh}((a_1, \ldots, a_{k+1})).$$

Da $(a_1, \ldots, a_k) : x \subset (a_1, \ldots, a_{k+1}) : x$ ist, folgt aus der letzten Aussage

$$(a_1, \ldots, a_{k+1}) : x \not\subset \mathfrak{p} \text{ für alle } \mathfrak{p} \in \operatorname{Assh}((a_1, \ldots, a_{k+1})),$$

$$\text{d.h. } x \in U((a_1, \ldots, a_{k+1}))$$

([6], Vol. I, Ch. IV, § 5, Th. 8).

(iii) Der Beweis folgt durch die Induktion nach k. Für $k = 0$ ist die Aussage trivial. Sei jetzt $U((a_1, \ldots, a_k)) = U(\mathfrak{a}_k)$, wobei $0 < k \leqq d - 2$ ist. Betrachten wir das Ideal $\mathfrak{a}_{k+1}$. Da

$$(a_1, \ldots, a_k) \subset \mathfrak{a}_k \subset U(\mathfrak{a}_k) \text{ ist, gilt}$$

$$\mathfrak{a}_{k+1} = (a_1, \ldots, a_{k+1}) + U(\mathfrak{a}_k).$$

Hieraus erhalten wir die folgenden Gleichungen:

$\boldsymbol{a}_{k+1} = U((a_1, \ldots, a_{k+1})) \cap \boldsymbol{q}' + U((a_1, \ldots, a_k))$, nach der Induktionsvoraussetzung

$= U((a_1, \ldots, a_{k+1})) \cap \boldsymbol{q}' + U((a_1, \ldots, a_k)) \cap U((a_1, \ldots, a_{k+1}))$, nach (ii)

$= U((a_1, \ldots, a_{k+1})) \cap (\boldsymbol{q}' + U((a_1, \ldots, a_k)))$.

Da das Ideal $\boldsymbol{q}'$ $\boldsymbol{m}$-primär ist, gilt es auch für das Ideal $\boldsymbol{q}' + U((a_1, \ldots, a_k))$. Daher ist

$$U(\boldsymbol{a}_{k+1}) = U((a_1, \ldots, a_{k+1})).$$

Korollar 1. *Sei* $(A, \boldsymbol{m})$ *ein Buchsbaum Ring mit* $\dim(A) = d$ *und* $\boldsymbol{q} = (a_1, \ldots, a_d)$ *ein Parameterideal in* A. *Dann gilt*

$$\boldsymbol{a}_d = (a_d) + U((a_1, \ldots, a_{d-1})).$$

Satz 3. *Sei* $(A, \boldsymbol{m})$ *ein Buchsbaum Ring mit* $\dim(A) = d$ *und* $\boldsymbol{q} = (a_1, \ldots, a_d)$ *ein Parameterideal in* A. *Dann gilt*

$$I(A) = l(U((a_1, \ldots, a_{d-1}))/U((a_1, \ldots, a_{d-1})) \cap \boldsymbol{q}).$$

Beweis. Für ein beliebiges Parameterideal $\boldsymbol{q}$ in einem lokalen noetherschen Ring A gilt nach [2]

$$e_0(\boldsymbol{q}, A) = l(A/\boldsymbol{a}_d),$$

wobei $\boldsymbol{a}_d = (a_d) + U(\boldsymbol{a}_{d-1})$ ist. Nach Definition 3 folgt

$$I(A) = l(A/\boldsymbol{q}) - l(A/\boldsymbol{a}_d),$$

also

$$I(A) = l(\boldsymbol{a}_d/\boldsymbol{q}).$$

Da $\boldsymbol{a}_d = (a_d) + U((a_1, \ldots, a_{d-1}))$ (Korollar 1) und

$$(a_d) + U((a_1, \ldots, a_{d-1}))/\boldsymbol{q} \cong U((a_1, \ldots, a_{d-1}))/U((a_1, \ldots, a_{d-1})) \cap \boldsymbol{q}$$

([3], § 1, Lemma 4) ist, gilt

$$I(A) = l(U((a_1, \ldots, a_{d-1}))/U((a_1, \ldots, a_{d-1})) \cap \boldsymbol{q}).$$

Damit ist der Satz 3 bewiesen.

LITERATUR

[1] ATIYAH, M. F.—MacDONALD, I. G.: Introduction to Commutative Algebra. Massachusetts 1969. First ed.

[2] BOĎA, E.: Zur Berechnung von Schnittmultiplizitäten durch Längen. Math. slov. 28, 1978, No. 2, 173—179.

[3] NORTHCOTT, D. G.: Lessons on Rings, Modules and Multiplicaties. Cambridge 1968. First ed.

[4] SERRE, J. P.: Algebre locale — Multiplicités. Lecture Notes in Mathematics 11. Berlin—Heidelberg—New York, Springer 1965.

[5] STUCKRAD, J. und VOGEL, W.: Eine Verallgemeinerung der Cohen—Macaulay Ringe und Anwendungen auf ein Problem der Multiplizitätstheorie. J. Math. Kyoto Univ. 13, 1973, 513—528.

[6] ZARISKI, O.—SAMUEL, P.: Commutative Algebra. New York 1958. First ed.

Received June 10, 1977

Katedra geometrie
Prírodovedeckej fakulty UK
Mlynská dolina
816 31 Bratislava

НЕКОТОРЫЕ СВОИСТВА ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ИДЕАЛОВ И ПРИМЕНЕНИЕ В КОЛЬЦАХ БУХСБАУМА

Эдуард Бодя

Резюме

Пусть $(A, \boldsymbol{m})$ – нетерово локальное кольцо и $\boldsymbol{q} = (a_1, \dots, a_d)$ – параметрический идеал в A. В работе доказано существование

(1) для каждого $k = 0, \dots, d$ простого идеала $\boldsymbol{p}$ высоты k ассоциированного с $(a_1, \dots, a_k)$

(2) для каждого $\boldsymbol{p}_k \in \operatorname{Assh}((a_1, \dots, a_k))$ высоты k цепочки

$$\boldsymbol{p}_k \supsetneqq \boldsymbol{p}_{k-1} \supsetneqq \dots \supsetneqq \boldsymbol{p}_1 \supsetneqq \boldsymbol{p}_0$$

свойства $\boldsymbol{p}_i \in \operatorname{Assh}((a_1, \dots, a_i))$ $(0 \leqq i \leqq k)$.

Вводится т. н. U-процесс и показывается (используя результаты в [2]) для применения (1) и (2) в кольцах Бухсбаума. В заключительной теореме 3 дается формула для вычисления инварианта $I(A)$ любого кольца Бухсбаума A.