Jozef Antoni

О суммировании подпоследовательностей

Mathematica Slovaca, Vol. 29 (1979), No. 1, 83--86

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/136201

Math. Slovaca 29, 1979, No. 1, 83—86

О СУММИРОВАНИИ ПОДПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

ЙОЗЕФ АНТОНИ

В работе [4] Б. И. Голубов на примерах показал, что мера множества Q может принимать значения 0 и 1. Множество Q состоит из всех таких подпоследовательностей $\{x_{n_k}\}$ ограниченной последовательности $x=\{x_n\}$ что множество всех предельных точек преобразованной подпоследовательности $\{x_{n_k}\}$ включает множество всех предельных точек последовательности $x=\{x_n\}$.

Введем следующие обозначения. Обозначим ω взаимнооднозначное отображение между $(0, 1\rangle$ и множеством всех подпоследовательностей. Отображение ω определено следующим образом: Пусть $x=\{x_n\}$-последовательность и $v\in(0, 1\rangle$, $v=0, v_1v_2v_3\ldots$ — двоичное разложение числа v среди которого имеется бесконечное множество единиц (всегда будем рассматривать только такое разложения). Пусть $v_{n_k}=1$ и $v_i=0$ для $i\neq n_k$. Тогда

$$\omega(x, v)=\{x_{n_k}\}.$$

Это известное взаимно-однозначное соответствие использовано уже в работе [2]. Используя отображения ω и ω^{-1} можно естественным путем перенести определения меры и категории на множества подпоследовательностей и множества натуральных чисел. Говорим, что множество B подпоследовательностей имеет меру, равную числу a, если мера множества

$$\{v\in(0, 1\rangle : \omega(x, v)\in B\}$$

равна a. Аналогично поступаем в случае категорий.

Пусть $T=(a_{mn})$ — регулярный метор. В работе [4] доказано, что дополнение множества

$$Q=\{v\in(0, 1\rangle : (T\omega(x, v))'\supset(x)'\},$$

где $(y)'$ обозначает множество всех предельных точек последовательности $y=\{y_n\}$, является множеством первой категории. Измеримость множества Q дана теоремой 1 работы [1], в ктоторой доказано, что множество Q можно написать как объединение множества типа G_δ и счетного множества. Здесь как и в [4], $x(n, v)$ обозначает n-тый член последовательности $\omega(x, v)$, т. е. $x(n, v) = (\omega(x, v))_n$.

Определение. (*см.* [5]) *Множество* $M \subset (0, 1\rangle$ *называется однородным, если для всяких промежутков* $I_1, I_2 \subset (0, 1\rangle$ *справедливо*

$$\frac{|I_1 \cap M|_e}{|I_1|} = \frac{|I_2 \cap M|_e}{|I_2|}.$$

Обозначим через $|A|$ и $|A|_e$ соответственно меру Лебега и внешную меру Лебега. Из теоремы 1 работы [5] вытекает, что мера измеримого однородного множества всегда равна 0 или 1.

В следующей теореме дано условие для того, чтобы для всякой ограниченной последовательности множество было однородным множеством.

Теорема. *Если* $x = \{x_n\}$ *ограниченная последовательность и* $T = (a_{mn})$ *регулярный метод, удовлетворяющий условию:* (i) *в каждой системе* $\mathscr{S}$ *возрастающих последовательностей натуральных чисел меры* 1 *для всякого целого числа* p *существуют последовательности* m_k, m_k^1 *из* $\mathscr{S}$, *для которыщх*

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |a_{m_k n+p} - a_{m_k^1 n}| = 0 \tag{1}$$

($a_{mn} = 0$, *когда* $m = 1, 2, \ldots$ *и* $n \leqslant 0$), *то* Q *однородное множество.*

Доказательство. Множество Q измеримо (теорема 1 работы [1], поэтому достаточно показать, что если $v \in Q$, $v = 0, v_1 v_2 \ldots$, то и точка, полученная изменением не более чем конечного числа v_i, также принадлежит Q (см. [3] стр. 403).

Пусть $v \in Q$, $v = 0, v_1 v_2 v_3 \ldots$. И точка $u = 0, u_1 u_2 u_3 \ldots$, полученная изменением не более чем конечного числа v_i. Обозначим $K = \min\{j : \text{для } i > j \text{ имеем } v_i = u_i\}$,

$$p = \sum_{i=1}^{K} (v_i - u_i), \quad p_1 = \sum_{i=1}^{K} v_i \quad \text{и} \quad p_2 = \sum_{i=1}^{K} u_i .$$

Следовательно $p = p_1 - p_2$. Число членов последовательности $\omega(x, v)$, соответственно $\omega(x, u)$ с индексами, не превосходящими K, равно p_1 соответственно p_2, причем $p_1 + 1$-ый член последовательности $\omega(x, v)$ равен $p_2 +$ 1-ому члену последовательности $\omega(x, u)$ и соответствующие очередные члены тоже равны. Это можно записать в виде $\omega(x, v)_{p+k} = \omega(x, u)_k$ для $k > p_2$. Если предположим, что $(T\omega(x, v))' \supset (x)'$, то из теоремы 1 работы [4] вытекает существование системы $\mathscr{S}_1$ подпоследовательностей натуральных чисел, для которой $|\mathscr{S}_1| = 1$ и для $\{n_k\} \in \mathscr{S}_1$ имеет место $(T\{\omega(x, v)_{n_k}\}_{k=1}^{\infty})' \supset$

$(x)'$. Условие (i) влечет за собой существование таких последовательностей $\{m_k\}$, $\{m_k^1\} \in \mathcal{S}_1$ что справедливо (1).

Пусть $|x_n| \leqslant C$, $C \neq 0$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Поскольку T-регулярный метод, то для всякого $\varepsilon > 0$ существует натуральное число m_0 такое, что

$$\sum_{n=1}^{K} |a_{mn}| \frac{\varepsilon}{3C} \quad \text{для} \quad m > m_0.$$

В силу (1) для $\varepsilon > 0$ существует k_0, что

$$\sum_{n=1}^{K} |a_{m_k n+p} - a_{m_k^1 n}| < \frac{\varepsilon}{3C} \quad \text{для} \quad k \geqslant k_0.$$

Для m_k, $m_k^1 > \max(m_{k_0}, m_0)$ имеем

$$|(T\omega(x, v))_{m_k} - (T\omega(x, u)_{m_k^1}| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_{m_k n} x(n, v) - \sum_{n=1}^{\infty} a_{m_k^1 n} x(n, u)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^{p_1} |a_{m_k n}|\, |x(n, v)| + \sum_{n=1}^{p_2} |a_{m_k^1 n}|\, |x(n, u)| + \left| \sum_{n=p_1+1}^{\infty} a_{m_k n} x(n, v) - \right.$$

$$\left. - \sum_{n=p_2+1} a_{m_k^1 n} x(n, u) \right| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \sum_{n=p_2+1}^{\infty} |a_{m_k n} - a_{m_k^1 n}|\, |x(n, u)| < \varepsilon.$$

Потому $(T\omega(x, u))' \supset (T\omega(x, v))' \supset (x)'$ и $u \in Q$.

Следствие 1. *Если регулярный метод удовлетворяет условию* (i), *то для всякой ограниченной последовательности мера множества Q равна* 0 *или* 1.

Лемма. *Всякий транслятивный регулярный метод удовлетворяет условию* (i).

Доказательство вытекает из известного условия для транслятивности метода

$$\lim_{m \to \infty} \sum_{n=1}^{\infty} |a_{mn} - a_{mn+1}| = 0$$

([3], стр. 143).

Следствие 2. *Для всякого транслятивного резуглярного метода и ограниченной последовательности множество Q однородно.*

Замечание. Теорема справедлива и для последовательностей комплексных чисел.

ЛИТЕРАТУРА

[1] ANTONI, J.: On the summability of subsequences. Mat. Čas., 21, 1971, 160—166.
[2] BUCK, R. C.—POLLARD, H.: Convergence and summability properties of subsequences. Bull. Amer. Soc., 49, 1943, 924—931.
[3] КУК, П.: Бесконечные матрицы и пространства последовательностей. Москва 1960.
[4] ГОЛУБОВ, Б. И.: О суммировании последовательностей. Изв. высш. учебн. завед. Математика, 41, 1964, 47—55.
[5] KNOPP, K.: Mengentheoretische Behandlung einiger Probleme der diophantischen Approximation und der transfiniten Wahrseinlichkeiten. Math. Ann., 95, 1926, 409—426.

Поступило 22. 6. 1977

Matematický ústav SAV
Obrancov mieru 49
886 25 Bratislava